九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

結合型変形KdV方程式のソリトン解の構造

中川, 剛
立教大学大学院

筧, 三郎
立教大学理学部

https://doi.org/10.15017/1807779

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 26AO-S2 (29), pp.157-162, 2015-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.26AO-S2
「非線形波動研究の現状 — 課題と展望を探る—」（研究代表者　増田　哲）

Reports of RIAM Symposium No.26AO-S2

State of arts and perspectives of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 30 - November 1, 2014

Article No. 29 (pp. 157 - 162)

結合型変形KdV方程式のソリトン解の構造

中川 剛（NAKAGAWA Takeshi），筧 三郎（KAKEI Saburo）

（Received 15 January 2015; accepted 10 February 2015）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2015

結合型変形 KdV 方程式のソリトン解の構造

立教大学大学院　中川 剛 (NAKAGAWA, Takashi)
立教大学理学部　筧 三郎 (KAKEI, Saburo)

概要

岩尾・広田によって提出された結合型変形 KdV 方程式のソリトン解は, 多くのパラメーターを含んだ複雑な構造を持つ. 本稿では, ソリトン解の構成に関しては, ある意味で“1 ソリトン解”を調べれば十分であることを示す.

1　はじめに

ソリトン方程式の解の数学的構造に関しては古くから多くの議論がなされている [3, 12, 14]. 近年, ソリトン理論では「ソリトン方程式の本質的な構造」とは何かについての研究がなされてきた. 一つの統一的な観点として, 広田良吾によって, 「ソリトン方程式（双線形形式）とはパフィアンの恒等式である」という描像が提案された [3]. その後, 広田らは, 代表的なソリトン方程式である KdV 方程式, 変形 KdV 方程式, KP 方程式などが行列式型の解を持つことに着目し, 解の構成に現れる行列式の恒等式 (Plücker 関係式) をパフィアンに対するもので置き換えることにより, 知られているソリトン方程式を“結合型”に拡張するという研究を行った [4, 5, 6, 7, 8]. Gilson, Nimmo らはこの手法を“パフィアン化 (Pfaffianization)”と名付け, 様々な方程式を考察した [2, 13].

本稿で考察するソリトン方程式は, 岩尾・広田 [6] の意味での結合型変形 KdV 方程式

$$(v_i)_t + 6\left(\sum_{1\le j<k\le N} c_{jk} v_j v_k\right)(v_i)_x + (v_i)_{xxx} = 0 \quad (i = 1, \cdots, N). \tag{1}$$

である. この方程式のソリトン解は岩尾・広田による論文 [6] で与えられており, パフィアンによって解を記述することができる. しかし彼らのパフィアン解は, 多くのパラメータを含んだ複雑な構造をしている. そこで本稿では, 方程式 (1) のソリトン解に対して, ある意味で“1 ソリトン解”が十分一般的な解であることを示す. 次節より方程式 (1) の 1 ソリトン解の求め方を「広田の直接法」を用いて紹介し, そこから“M-ソリトン解”が構成できることを 3 節で述べる.

2　広田の直接法による“1 ソリトン解”の導出

この節では, 様々なソリトン方程式のソリトン解を求める際によく使われる「広田の直接法」を用いて, 方程式 (1) の 1 ソリトン解を, $N=2$ と $N=3$ の場合に分けて紹介する (“結合型”でない通常の変形 KdV 方程式のソリトン解の, 広田の直接法による導出については [3, 9] を参照していただきたい). まず, 広田の D-operator の定義を確認しておく [3]:

$$D_x^n D_t^m f\cdot g = (\partial_x - \partial_{x'})^n (\partial_t - \partial_{t'})^m f(x,t) g(x',t')|_{x'=x,t'=t}.$$

いくつかの例を以下にあげる:

$$
\begin{aligned}
&D_x f \cdot g = f_x g - f g_x, \\
&D_x^2 f \cdot g = f_{xx} g - 2 f_x g_x + f g_{xx}, \\
&D_x^3 f \cdot g = f_{xxx} g - 3 f_{xx} g_x + 3 f_x g_{xx} - f g_{xxx}.
\end{aligned}
$$

方程式 (1) に対しては, $v_i = g_i/f$ とおくことで, 以下の双線形形式を得る:

$$
\begin{cases}
(D_t + D_x^3) g_i \cdot f = 0, \\
D_x^2 f \cdot f = 2 \displaystyle\sum_{1 \le j < k \le N} c_{jk} g_j g_k.
\end{cases}
\tag{2}
$$

この双線形形式をもとに,「摂動法」を用いて, $N = 2, 3$ のときの 1 ソリトン解を導出する.

ここで “1 ソリトン解” とは, (形式的) 摂動展開

$$
f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \cdots, \tag{3}
$$

$$
g_j = \varepsilon g_{j1} + \varepsilon^2 g_{j2} + \varepsilon^3 g_{j3} + \cdots \quad (j = 1, 2, \ldots, N), \tag{4}
$$

において, (4) の g_{j1} $(j = 1, 2, \ldots, N)$ を, 適当な指数関数によって

$$
g_{j1} = e^{\eta_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, N) \tag{5}
$$

という形に選ぶことを意味している.

2.1 $N = 2$ の場合の 1 ソリトン解

$N = 2$ のとき, 双線形形式 (2) は次のように書くことができる:

$$
\begin{cases}
(D_t + D_x^3) g_1 \cdot f = 0, \\
(D_t + D_x^3) g_2 \cdot f = 0, \\
D_x^2 f \cdot f = 2 c_{12} g_1 g_2.
\end{cases}
\tag{6}
$$

双線形方程式 (6) に摂動展開 (3), (4) を代入して ε のべきで整理した後, 低次から順に解いていく.

- $\underline{(D_t + D_x^3) g_1 \cdot f = 0}$

  摂動展開 (3), (4) を代入すると,

$$
0 = (D_t + D_x^3)(\varepsilon g_{11} + \varepsilon^2 g_{12} + \varepsilon^3 g_{13} + \cdots) \cdot (1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \cdots)
$$

  が得られる. これを ε の次数について整理して, 各次数の方程式を書き下ろしてみる.

$$
O(\varepsilon^1) : 0 = (D_t + D_x^3) g_{11} \cdot 1 = (\partial_t + \partial_x^3) g_{11}, \tag{7}
$$

$$
O(\varepsilon^2) : 0 = (D_t + D_x^3) g_{11} \cdot f_1 + (\partial_t + \partial_x^3) g_{12}, \tag{8}
$$

$$
O(\varepsilon^3) : 0 = (D_t + D_x^3) g_{11} \cdot f_2 + (D_t + D_x^3) g_{12} \cdot f_1 + (\partial_t + \partial_x^3) g_{13}, \tag{9}
$$

$$
\vdots
$$

- $\underline{(D_t + D_x^3) g_2 \cdot f = 0}$

  摂動展開 (3), (4) を代入すると,

$$
0 = (D_t + D_x^3)(\varepsilon g_{21} + \varepsilon^2 g_{22} + \varepsilon^3 g_{23} + \cdots) \cdot (1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \cdots)
$$

が得られる．上と同様に, ε の次数について整理して, 各次数の方程式を書き下ろしてみる．

$$
\begin{aligned}
O(\varepsilon^1) &: 0 = (D_t + D_x^3) g_{21} \cdot 1 = (\partial_t + \partial_x^3) g_{21}, && (10)\\
O(\varepsilon^2) &: 0 = (D_t + D_x^3) g_{21} \cdot f_1 + (\partial_t + \partial_x^3) g_{22}, && (11)\\
O(\varepsilon^3) &: 0 = (D_t + D_x^3) g_{21} \cdot f_2 + (D_t + D_x^3) g_{22} \cdot f_1 + (\partial_t + \partial_x^3) g_{23}, && (12)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- $\underline{D_x^2 f \cdot f = 2c_{12} g_1 g_2}$
  摂動展開 (3), (4) を代入すると,

$$
\begin{aligned}
&D_x^2(1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \cdots) \cdot (1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \cdots)\\
&\quad = 2c_{12}(\varepsilon g_{11} + \varepsilon^2 g_{12} + \varepsilon^3 g_{13} + \cdots)(\varepsilon g_{21} + \varepsilon^2 g_{22} + \varepsilon^3 g_{23} + \cdots)
\end{aligned}
$$

が得られる．こちらも ε の次数について整理して, 各次数の方程式を書き下ろしてみる．

$$
\begin{aligned}
O(\varepsilon^1) &: D_x^2 1 \cdot f_1 + D_x^2 f_1 \cdot 1 = 2\partial_x^2 f_1 = 0, && (13)\\
O(\varepsilon^2) &: D_x^2 1 \cdot f_2 + D_x^2 f_2 \cdot 1 + D_x^2 f_1 \cdot f_1 = 2\partial_x^2 f_2 + D_x^2 f_1 \cdot f_1 = 2c_{12} g_{11} g_{21}, && (14)\\
O(\varepsilon^3) &: D_x^2 1 \cdot f_3 + D_x^2 f_1 \cdot f_2 + D_x^2 f_2 \cdot f_1 + D_x^2 f_3 \cdot 1\\
&\qquad = 2\partial_x^3 f_3 + 2D_x^2 f_1 \cdot f_2 = 2c_{12}\left\{g_{11} g_{22} + g_{12} g_{21}\right\}, && (15)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

(7), (10) より, $g_{11} = e^{\eta_1}$, $g_{21} = e^{\eta_2}$ という指数関数の形が示唆される．ただし,

$$
\eta_j = p_j x - p_j^3 t + \eta_j^{(0)} \tag{16}
$$

であり, $p_j, \eta_j^{(0)}$ は定数である．(13) より, $f_1 = 0$ としてよい．このとき (14) より, f_2 の満たすべき微分方程式は

$$
\partial_x^2 f_2 = c_{12} e^{\eta_1 + \eta_2} \tag{17}
$$

となり, f_2 は以下のようになる:

$$
f_2 = \frac{c_{12}}{(p_1 + p_2)^2} e^{\eta_1 + \eta_2}. \tag{18}
$$

さらに (8), (11), (15) より, $g_{12} = g_{22} = f_3 = 0$ としてよい．以降, 摂動展開は有限で切れて, $g_{13} = g_{14} = \cdots = 0$, $g_{23} = g_{24} = \cdots = 0$, $f_4 = f_5 = \cdots = 0$ としてよい．以上で得られた $N = 2$ のときの 1 ソリトン解をまとめると, 次のようになる:

$$
g_1 = e^{\eta_1}, \quad g_2 = e^{\eta_2}, \quad f = 1 + \frac{c_{12}}{(p_1 + p_2)^2} e^{\eta_1 + \eta_2}. \tag{19}
$$

2.2 $N = 3$ の場合の 1 ソリトン解

$N = 3$ のとき, 双線形形式は次のようになる

$$
\begin{cases}
(D_t + D_x^3) g_1 \cdot f = 0\\
(D_t + D_x^3) g_2 \cdot f = 0\\
(D_t + D_x^3) g_3 \cdot f = 0\\
D_x^2 f \cdot f = 2(c_{12} g_1 g_2 + c_{13} g_1 g_3 + c_{23} g_2 g_3).
\end{cases} \tag{20}
$$

$N=2$ のときと同様に, 摂動法によって 1 ソリトン解を求めると,

$$\begin{aligned} g_1 &= e^{\eta_1} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{13}\beta_{23}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3}, \\ g_2 &= e^{\eta_2} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}\beta_{13}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3}, \\ g_3 &= e^{\eta_3} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{13}\beta_{12}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3}, \\ f &= 1 + \alpha_{12}\beta_{12}e^{\eta_1+\eta_2} + \alpha_{23}\beta_{23}e^{\eta_2+\eta_3} + \alpha_{13}\beta_{13}e^{\eta_1+\eta_3} \end{aligned} \tag{21}$$

が得られる. ただし, $\eta_\mu = p_\mu x - p_\mu^3 t + \eta_\mu^{(0)}$, $\alpha_{\mu\nu} = \dfrac{p_\mu - p_\nu}{p_\mu + p_\nu}$, $\beta_{\mu\nu} = \dfrac{c_{\mu\nu}}{p_\mu^2 - p_\nu^2}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$ である.

3 N 結合系に対する M ソリトン解

冒頭にも述べたように, (1) の一般のソリトン解はパフィアンで表すことができるが, パラメータを多く含んだ複雑な形をしている. この節では, 2 節の意味での 1 ソリトン解, すなわち摂動展開 (3), (4) において $g_{j1} = e^{\eta_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ という形の解を考えれば, “M ソリトン解” はそこから直接求めることができることを示す. すなわち, 「結合数 N の方程式の M ソリトン解」は「結合数 MN の方程式の 1 ソリトン解」から得られるという意味である.

定理 1 自然数 N の分割 λ に対して $N' = l(\lambda)$ (分割 λ に対応するヤング図形の行数) とする. このとき, 結合数 N の方程式の解から, 結合数 N' の方程式の解を構成することができる.

以下では,$N=4$ のときを考える. 4 の分割は次の 5 種類である.

λ	(4)	$(3,1)$	$(2,2)$	$(2,1,1)$	$(1,1,1,1)$
$l(\lambda)$	1	2	2	3	4

ここでは $(2,2)$ の場合を取り上げ, $N=4$ のときの 1 ソリトン解がわかれば, $N=2$ のときの 2 ソリトン解がわかることを紹介する.

$N=4$ のときの双線形形式は次のような形をしている:

$$(D_t + D_x^3)g_1 \cdot f = 0, \tag{22}$$
$$(D_t + D_x^3)g_2 \cdot f = 0, \tag{23}$$
$$(D_t + D_x^3)g_3 \cdot f = 0, \tag{24}$$
$$(D_t + D_x^3)g_4 \cdot f = 0, \tag{25}$$
$$D_x^2 f \cdot f = 2(c_{12}g_1g_2 + c_{13}g_1g_3 + c_{14}g_1g_4 + c_{23}g_2g_3 + c_{24}g_2g_4 + c_{34}g_3g_4). \tag{26}$$

(22) と (23) の双線形形式の和は以下のようになる:

$$(22) + (23)\ :\ (D_t + D_x^3)\{(g_1 + g_2)\cdot f\} = (D_t + D_x^3)\widetilde{g}_1 \cdot f = 0 \tag{27}$$

ただし $\widetilde{g}_1 = g_1 + g_2$ とおいた. 同様にして, (24) と (25) の双線形形式の和を考え, $\widetilde{g}_2 = g_3 + g_4$ とすれば, $(D_t + D_x^3)\widetilde{g}_2 \cdot f = 0$ を得る. さらに, 次の条件を考える:

$$c_{12} = c_{34} = 0, \quad c_{13} = c_{14} = c_{23} = c_{24} = \widetilde{c}_{12}.$$

このようにして得られた双線形形式をまとめると,

$$\begin{cases} (D_t + D_x^3)\widetilde{g}_1 \cdot f = 0 \\ (D_t + D_x^3)\widetilde{g}_2 \cdot f = 0 \\ D_x^2 f \cdot f = 2\widetilde{c}_{12}\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2. \end{cases} \tag{28}$$

となり, この方程式は $N=2$ のときの双線形形式と同じであることがわかる. 実際の $N=2$ の 2 ソリトン解は,

$$\widetilde{g}_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + \alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}\beta'_{23}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3} - \alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}\beta'_{13}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3} + \alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{24}\beta'_{24}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_4} - \alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{24}\beta'_{14}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_4}, \tag{29}$$

$$\widetilde{g}_2 = e^{\eta_3} + e^{\eta_4} - \alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{34}\beta'_{14}e^{\eta_1+\eta_3+\eta_4} + \alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{34}\beta'_{13}e^{\eta_1+\eta_3+\eta_4} - \alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{34}\beta'_{24}e^{\eta_2+\eta_3+\eta_4} + \alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{34}\beta'_{23}e^{\eta_2+\eta_3+\eta_4}, \tag{30}$$

$$f = 1 + \alpha_{13}\beta'_{13}e^{\eta_1+\eta_3} + \alpha_{14}\beta'_{14}e^{\eta_1+\eta_4} + \alpha_{23}\beta'_{23}e^{\eta_2+\eta_3} + \alpha_{24}\beta'_{24}e^{\eta_2+\eta_4} + \{-\alpha_{13}\beta'_{13}\alpha_{24}\beta'_{24}\alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{34} + \alpha_{14}\beta'_{14}\alpha_{23}\beta'_{23}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{24}\alpha_{34}\}\, e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4} \tag{31}$$

である. ただし$\beta'_{\mu\nu} = \dfrac{\widetilde{c}_{12}}{p_\mu^2 - p_\nu^2}$ とした.

上の例では, $N=4$ の 1 ソリトン解を, $N=2$ の $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ に 2 つずつ振り分ける, いわば "(2, 2)-ソリトン解" を考えた. $N=2$ の方程式 (1) において, v_1 は 3 ソリトン解, v_2 は 1 ソリトン解を持つということも考えられる (上述の分割では $(3,1)$ に対応している). 上と同様に (22), (23), (24) の双線形形式の和を考える.

$$(22)+(23)+(24)\ :\ (D_t + D_x^3)\{(g_1+g_2+g_3)\cdot f\} = (D_t+D_x^3)\widetilde{g}_1\cdot f = 0$$

ただし, 改めて $\widetilde{g}_1 = g_1+g_2+g_3$ とした. さらに, 改めて $g_4 = \widetilde{g}_2$ とおき, $c_{12}=c_{13}=c_{23}=0,\quad c_{14}=c_{24}=c_{34}=\widetilde{c}_{12}$ という条件を考えると, 双線形形式 (28) を得る. 結果は次のようになる

$$\widetilde{g}_1 = e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+e^{\eta_3} + \alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{24}\beta'_{24}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_4} + \alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{34}\beta'_{34}e^{\eta_1+\eta_3+\eta_4} - \alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{24}\beta'_{14}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_4} + \alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{34}\beta'_{34}e^{\eta_2+\eta_3+\eta_4} - \alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{34}\beta'_{14}e^{\eta_1+\eta_3+\eta_4} - \alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{34}\beta'_{24}e^{\eta_2+\eta_3+\eta_4}, \tag{32}$$

$$\widetilde{g}_2 = e^{\eta_4},\quad f = 1 + \alpha_{14}\beta'_{14}e^{\eta_1+\eta_4} + \alpha_{24}\beta'_{24}e^{\eta_2+\eta_4} + \alpha_{34}\beta'_{34}e^{\eta_3+\eta_4}. \tag{33}$$

4　まとめと今後の課題

結合型変形 KdV 方程式のソリトン解に対しては, 双線形形式同士の和を考えることで構造が簡明に理解できることがわかった. ここまでに述べてきた考え方を適用できる方程式は他にもあり, 例えば [7] で扱われている結合型微分型変形 KdV 方程式, [11] で扱われている多成分短パルス方程式があげられる. これらのタイプの方程式のパフィアン解の構造は, 今回のアプローチによりわかりやすくなる.

現時点ではまだ方程式 (1) に関する課題はいくつも残っている. 以下にいくつかあげておく.

- $(2+1)$ 次元化による次元の拡張

  KdV 方程式から KP 方程式への $(2+1)$ 次元化の拡張があるように, 結合型変形 KdV 方程式から結合型変形 KP 方程式への $(2+1)$ 次元化の拡張があるはずだが, まだ発見されていない.

- リー代数との関連

  多くの $(1+1)$ 次元ソリトン方程式は, アフィン・リー環と密接な関係を持つことが知られている [12]。パフィアン解を持つソリトン方程式である結合型 KP 方程式は, D'_∞ という無限次元リー環と対応することが知られている [10]. しかし, 結合型変形 KdV 方程式 (1) がどのようなアフィン・リー環と対応しているかはまだ発見されていない.

- 多成分短パルス方程式との関連

  変形 KdV 階層の τ 関数は, 2 組の無限変数 $t=(t_1,t_3,\ldots)$, $\bar{t}=(\bar{t}_1,\bar{t}_3,\ldots)$ に依存する. ここから t_1と t_3 を選ぶことで変形 KdV 方程式が得られ, t_1と$\bar{t}_1$ を選ぶことで Sine-Gordon 方程式

が得られることはよく知られている．ソリトン解の形を見比べると, 結合型変形 KdV 方程式と多成分単パルス方程式 [11] が同じ階層に属していることが予想されるが, Lax 形式等も含めて, 階層としての統一的な形での議論はまだ見当たらない．短パルス方程式は非線形光学への応用が見出されており [1], その解の構造をよく理解することは重要であろう．

参考文献

[1] B.-F. Feng, Complex Short Pulse and Coupled Complex Short Pulse Equations, *Preprint*, arXiv:1312.6431v1.

[2] C.R. Gilson and J.J.C. Nimmo, Pfaffianization of the Davey-Stewartson Equations, *Theor. Math. Phys.* **128** (2001), 870–882.

[3] 広田良吾, 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店 (1992).

[4] R. Hirota, Discretization of Coupled Modified KdV Equations, 京都大学数理研究所講究録 **1020**, (1997), 143–159.

[5] R. Hirota and Y. Ohta, New Type of Soliton Equations, 応用力学研究所研究集会報告 **18ME-S5** (2007).

[6] M. Iwao and R. Hirota, Soliton Solutions of a Coupled Modified KdV Equations, *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** (1997), 577–588.

[7] M. Iwao and R. Hirota, Soliton Solutions of a Coupled Derivative Modified KdV Equations, *J. Phys. Soc. Jpn.* **69** (2000), 59–72.

[8] M. Iwao, R. Hirota and S. Tsujimoto, Soliton Equations Exhibiting Pfaffian Solutions, *Glasgow Math. J.* **43A** (2001), 33–41.

[9] 梶原健司 (述), 三谷浩将・筧三郎 (記), 離散曲線のダイナミクスと離散可積分系, 立教大学数理物理センター Lecture Note **1**, (2013), http://id.nii.ac.jp/1062/00007372/

[10] 筧三郎, 結合型 KP ヒエラルキーの対称性・離散化・超離散化, 数理解析研究所講究録 **1221** (2001), 199–208.

[11] Y. Matsuno, A Novel Multi-Component of the Short Pulse Equation and Its Multisoliton Solutions, *J. Math. Phys.* **52**, (2011).

[12] 三輪哲二・伊達悦朗・神保道夫, ソリトンの数理, 岩波書店, (2007).

[13] Y. Ohta, J.J.C. Nimmo and C.R. Gilson, A Bilinear Approach to a Pfaffian Self-Dual Yang-Mills Equation, *Glasg. Math. J.* **A43** (2001), 99–108.

[14] 戸田盛和, 非線形波動とソリトン [新版], 日本評論社 (2011).