

## 平面渦の定常配置と安定性

上野, 拓  
立教大学大学院理学研究科数学専攻

笥, 三郎  
立教大学理学部

<https://doi.org/10.15017/1807778>

---

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 26A0-S2 (27), pp.151-156, 2015-03. 九州大学応用力学研究所  
バージョン :  
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.26AO-S2  
「非線形波動研究の現状 — 課題と展望を探る—」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.26AO-S2

*State of arts and perspectives of nonlinear wave science*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 30 - November 1, 2014

Article No. 27 (pp. 151 - 156)

## 平面渦の定常配置と安定性

上野 拓 (UENO Taku), 笥 三郎 (KAKEI Saburo)

(Received 15 January 2015; accepted 2 March 2015)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2015

# 平面渦の定常配置と安定性

立教大学大学院理学研究科数学専攻 上野 拓 (UENO, Taku)

立教大学理学部 笥 三郎 (KAKEI, Saburo)

## 概要

Hemery と Veselov は、2次元平面での完全流体における渦の周期的な定常配置に対して、ソリトン理論に基づいた新しい例の構成法を提案した。本研究では、それらの安定性を考察する。

## 1 はじめに

流体力学における渦の運動は、Helmholtz による 1858 年の研究 [4] 以来、150 年以上に渡って研究され続けている [6, 7, 9]。Helmholtz は、平行な直線渦の運動を、それらに垂直な断面上での点の運動としてとらえるというアイデアも提唱している [4]。この“点渦”の運動を記述する方程式は、2次元非圧縮非粘性の仮定の下で、オイラー方程式より導出することができる [6, 8, 9]。運動方程式は、複素座標  $z = x + iy$  を導入すると扱いやすい形にまとめられる [1, 2, 3, 5, 6, 8, 9]:

$$\frac{d\bar{z}_m}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k(\neq m)} \frac{\Gamma_k}{z_m - z_k}. \quad (1)$$

ここで  $z_m$  は  $m$  番目点渦の複素座標、 $\Gamma_k$  は渦の強さを表す。また、無限個の点渦が実軸方向に周期  $L$  を持ち、1 周期の間に  $N$  個の点渦が存在するとき、

$$\frac{d\bar{z}_m}{dt} = \frac{1}{2iL} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq m)}}^N \Gamma_k \cot \left[ \frac{\pi}{L} (z_m - z_k) \right] \quad (2)$$

という方程式が得られる。

本研究では、点渦の定常配置における安定性について考察する。点渦の定常配置とは、点渦系が相対的な位置関係を変えずに剛体回転運動をすることである。本稿の主題である周期的な定常配置の例としては、次のものが知られている [2, 5, 6]:

- 直線渦列 (1 直線上に等間隔に並ぶ強さが等しい点渦列)
- 2 重渦列 (ある直線上に等間隔に並ぶ強さが等しい点渦列と、それと平行な直線上に同じ間隔、同じ強さで向きが反対の点渦列)

2 重渦列は、方程式 (1) の次の解に対応する:

$$\begin{aligned} z_{2n}(t) &= Ut + nL, & z_{2n+1}(t) &= Ut + nL + a - ib, \\ \Gamma_{2n} &= -\Gamma, & \Gamma_{2n+1} &= \Gamma, \quad (n \in \mathbb{N}, b, c, U \in \mathbb{R}, a = 0 \text{ or } L/2). \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、渦列全体の運動速度  $U$  は、

$$U = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2L} \coth \left( \frac{\pi b}{L} \right) & (a = 0) \\ \frac{\Gamma}{2L} \tanh \left( \frac{\pi b}{L} \right) & (a = L/2) \end{cases} \quad (4)$$

で与えられる. (3) において  $a = L/2$  の場合, すなわち 2 重渦列において, 2 つの直線上の点渦列が半周期ずれて配置される場合, カルマン渦列と呼ばれる.

解 (3) は実軸方向に周期  $L$  を持ち,  $0 \leq \text{Re}(z) < L$  の間には 2 つの点渦が存在する. 対応する (2) の解は,

$$z(t) = Ut, \quad z'(t) = Ut + a - ib \quad (a = 0 \text{ or } L/2) \quad (5)$$

で与えられる ( $U$  は (4) のもの).

Hemery と Veselov は, 2 次元平面での完全流体における渦の周期的な定常配置に対して, ソリトン理論に基づいた新しい例の構成法を提案した [5]. 本研究の目的は, 彼らによって構成された定常配置の安定性を考察することである.

## 2 2 重渦列の安定性

Hemery と Veselov [5] の例を考察する前に, 2 重渦列解 (3) の安定性を再考する. 文献 [2, 6, 8] では運動方程式 (1) に基づいて 2 重渦列解の線形安定性を議論しているが, 無限和を三角関数に書き換える公式を用いた技巧的な議論であり, Hemery と Veselov が扱っているような, より複雑な場合を扱うことは難しい. 直線渦列 ( $N = 1$ ), 2 重渦列 ( $N = 2$ ) の場合には, 安定性を議論する解の持つ周期  $L$  のちょうど 2 倍の周期の摂動が最も不安定であることが知られている (ペアリング不安定性) [2, 6, 8]. そこでここでは, 2 倍周期の摂動のみを考えることにして, (1) ではなく (2) を用いて線形安定性を議論する. すなわち, (2) で  $L$  を  $2L$  に,  $N$  を  $2N$  に置き換えた方程式を考え, 定常解の安定性を考える.

以下では簡単のため渦列の周期を  $L = \pi$  として,

$$\frac{d\bar{z}_m}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq m)}}^N \Gamma_k \cot(z_m - z_k) \quad (6)$$

の定常解を考える. これに対する 2 周期分の系 ( $L = 2\pi$ ) を考えて,

$$\frac{d\bar{z}_m}{dt} = \frac{1}{4\pi i} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq m)}}^N \Gamma_k \cot \frac{z_m - z_k}{2} \quad (7)$$

という運動方程式の定常解を考察していく.

### 2.1 カルマン渦列の場合 ( $a = L/2$ )

(7) の周期  $\pi$  の定常解

$$\begin{aligned} z_0(t) &= Ut, & z_1(t) &= Ut + \pi & (\Gamma_0 = \Gamma_1 = -1) \\ z'_0(t) &= Ut + \frac{\pi}{2} - ib, & z'_1(t) &= Ut + \frac{3\pi}{2} - ib & (\Gamma'_0 = \Gamma'_1 = +1) \end{aligned} \quad (8)$$

を考える. この 4 点の速度は, 運動方程式 (7) より,

$$U = \frac{d\bar{z}_0}{dt} = \frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{dz'_0}{dt} = \frac{dz'_1}{dt} = \frac{-\tanh b}{2\pi} \quad (9)$$

である. 次に, この 4 点に摂動を加える ( $x_i, y_i, x'_i, y'_i$  ( $i = 0, 1$ ) は微量とする):

$$\begin{cases} z_0(t) = x_0(t) + iy_0(t) + Ut, \\ z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t) + Ut + \pi, \\ z'_0(t) = x'_0(t) + iy'_0(t) + Ut + \frac{\pi}{2} - ib, \\ z'_1(t) = x'_1(t) + iy'_1(t) + Ut + \frac{3\pi}{2} - ib. \end{cases} \quad (10)$$

これらの式を運動方程式 (7) に代入し 1 次近似を行うと, 次の線形微分方程式系が得られる:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_1 \\ y_1 \\ x'_0 \\ y'_0 \\ x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} - \frac{1}{\cosh^2 b} & 0 & \cdots & \frac{1}{2 \cosh^2 b} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{\cosh^2 b} & 0 & -\frac{1}{4} & \cdots & \frac{\sinh b}{2 \cosh^2 b} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & \frac{1}{2 \cosh^2 b} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} - \frac{1}{\cosh^2 b} & \cdots & -\frac{\sinh b}{2 \cosh^2 b} \\ -\frac{\sinh b}{2 \cosh^2 b} & -\frac{1}{2 \cosh^2 b} & \frac{\sinh b}{2 \cosh^2 b} & \cdots & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2 \cosh^2 b} & -\frac{\sinh b}{2 \cosh^2 b} & -\frac{1}{2 \cosh^2 b} & \cdots & 0 \\ \frac{\sinh b}{2 \cosh^2 b} & -\frac{1}{2 \cosh^2 b} & -\frac{\sinh b}{2 \cosh^2 b} & \cdots & \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cosh^2 b} \\ -\frac{1}{2 \cosh^2 b} & -\frac{\sinh b}{2 \cosh^2 b} & -\frac{1}{2 \cosh^2 b} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_1 \\ y_1 \\ x'_0 \\ y'_0 \\ x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(11) の係数行列 (8 次正方行列) に対して, 固有値の実部の最大値  $A$  を, 定常解のパラメータ  $b$  の関数としてグラフにしたものが図 1 である.

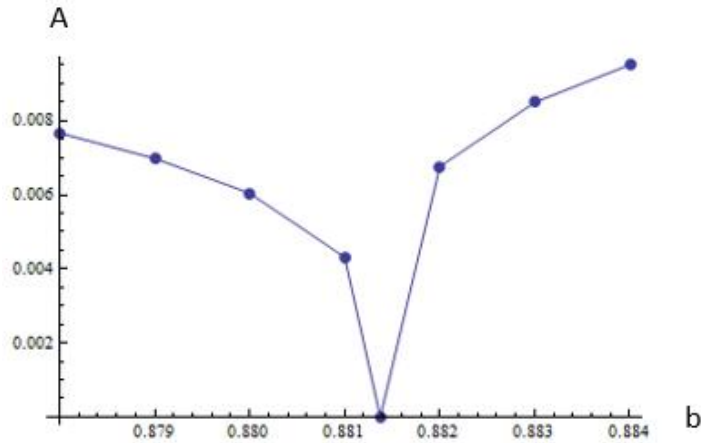


図 1 2 重渦列に対する摂動:  $a = L/2$  の場合

図 1 から,  $b$  の値が  $b = 0.8814$  程度であるときに複素固有値の実部の最大値が 0 になり, そこでは中立安定となることが分かる. また, その他の点では  $A$  の値が正の実数になることから, 不安定であることが分かる. 周期性を仮定しない摂動論 [2, 6, 8] の結果によると,  $b = \log(1 + \sqrt{2}) \simeq 0.88137 \dots$  のときに中立安定であることが知られており, 上の結果と一致する.

## 2.2 ずれがない場合 ( $a = 0$ )

今度は次の 4 点の運動を考える.

$$\begin{aligned} z_0(t) &= Ut, & z_1(t) &= Ut + \pi & (\Gamma_0 = \Gamma_1 = -1) \\ z'_0(t) &= Ut - ib, & z'_1(t) &= Ut + \pi - ib & (\Gamma'_0 = \Gamma'_1 = +1) \end{aligned} \quad (12)$$

この場合の速度は,

$$U = \frac{d\bar{z}_0}{dt} = \frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{dz'_0}{dt} = \frac{dz'_1}{dt} = \frac{-\coth b}{2\pi}, \quad (13)$$

となる. この4点に摂動を加える ( $x_i, y_i, x'_i, y'_i$  ( $i = 0, 1$ ) は微量とする):

$$\begin{cases} z_0(t) = x_0(t) + iy_0(t) + Ut, \\ z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t) + Ut + \pi, \\ z'_0(t) = x'_0(t) + iy'_0(t) + Ut - ib, \\ z'_1(t) = x'_1(t) + iy'_1(t) + Ut + \pi - ib. \end{cases} \quad (14)$$

これらの式を運動方程式 (7) に代入し 1 次近似を行うと, 次の線形微分方程式系が得られる:

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = M\vec{P}, \quad \vec{P} = {}^t(x_0, y_0, x_1, y_1, x'_0, y'_0, x'_1, y'_1), \quad (15)$$

$$M = \frac{1}{16\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 - \frac{2}{1+\cosh b} - \frac{2}{1-\cosh b} & 0 & \cdots & \frac{2}{1+\cosh b} \\ 1 - \frac{2}{1+\cosh b} - \frac{2}{1-\cosh b} & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & \frac{2}{1-\cosh b} \\ -1 & 0 & 1 - \frac{2}{1+\cosh b} - \frac{2}{1-\cosh b} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{2}{1-\cosh b} & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{2}{1-\cosh b} & 0 & -\frac{2}{1+\cosh b} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{2}{1+\cosh b} & 0 & \cdots & 1 - \frac{2}{1+\cosh b} - \frac{2}{1-\cosh b} \\ -\frac{2}{1+\cosh b} & 0 & -\frac{2}{1-\cosh b} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

係数行列  $M$  の固有多項式の根は,  $b$  の値によらず  $0$  (4 重根),  $\frac{1}{8\pi}$  (2 重根),  $-\frac{1}{8\pi}$  (2 重根) となる. したがって, この定常配置は常に不安定であることが分かる.

### 3 新しい定常解の安定性

Hemery と Veselov [5] の構成法が与える定常解の例は, 前節で議論した 2 重渦列を含む. より複雑な例として, 次の 6 点の運動を考える (図 2):

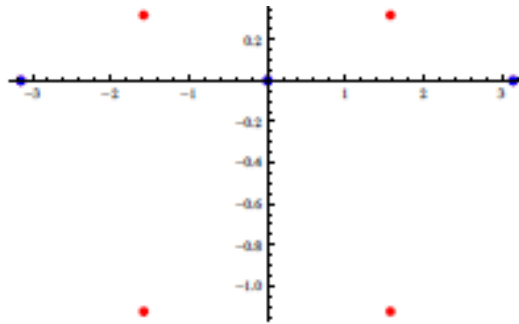


図 2 Hemery-Veselov の例 (文献 [5] より引用)

$$\begin{aligned} z_0(t) &= Ut, & z_1(t) &= Ut + \pi, & (\Gamma_0 = \Gamma_1 = -2) \\ z'_0(t) &= Ut + \frac{\pi}{2} - ib, & z'_1(t) &= Ut + \frac{3\pi}{2} - ib, & (\Gamma'_0 = \Gamma'_1 = 1) \\ z''_0(t) &= Ut + \frac{\pi}{2} - ic, & z''_1(t) &= Ut + \frac{3\pi}{2} - ic, & (\Gamma''_0 = \Gamma''_1 = 1). \end{aligned} \quad (16)$$

ただし、パラメータ  $b, c$  は次で与えられるものとする ( $b < 0 < c$ ):

$$b = \frac{1}{2} \log \left[ \frac{4 - k^2 - \sqrt{3(4 - k^2)}}{(k - 1)(k - 2)} \right], \quad c = \frac{1}{2} \log \left[ \frac{4 - k^2 + \sqrt{3(4 - k^2)}}{(k - 1)(k - 2)} \right] \quad (-1 < k < 1). \quad (17)$$

この 6 点の速度は、運動方程式 (7) より、

$$U = \frac{d\bar{z}_0}{dt} = \frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{d\bar{z}'_0}{dt} = \dots = -\frac{1}{2\pi}(\tanh b + \tanh c) \quad (18)$$

となる。この 6 点に摂動を加える ( $x_i, y_i, x'_i, y'_i, x''_i, y''_i$  ( $i = 0, 1$ ) は微量とする):

$$\begin{cases} z_0(t) = x_0(t) + iy_0(t) + Ut, \\ z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t) + Ut + \pi, \\ z'_0(t) = x'_0(t) + iy'_0(t) + Ut + \frac{\pi}{2} - ib, \\ z'_1(t) = x'_1(t) + iy'_1(t) + Ut + \frac{3\pi}{2} - ib \\ z''_0(t) = x''_0(t) + iy''_0(t) + Ut + \frac{\pi}{2} - ic, \\ z''_1(t) = x''_1(t) + iy''_1(t) + Ut + \frac{3\pi}{2} - ic. \end{cases} \quad (19)$$

これらの式を運動方程式 (7) に代入し 1 次近似を行うと、次の線形微分方程式系が得られる:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_1 \\ y_1 \\ x'_0 \\ y'_0 \\ x'_1 \\ y'_1 \\ x''_0 \\ y''_0 \\ x''_1 \\ y''_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{\cosh^2 b} - \frac{1}{\cosh^2 c} & \dots & \frac{1}{2\cosh^2 c} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\cosh^2 b} - \frac{1}{\cosh^2 c} & 0 & \dots & \frac{\sinh c}{2\cosh^2 c} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2\cosh^2 c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{\cosh^2 c} & -\frac{\sinh c}{\cosh^2 c} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_1 \\ y_1 \\ x'_0 \\ y'_0 \\ x'_1 \\ y'_1 \\ x''_0 \\ y''_0 \\ x''_1 \\ y''_1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

係数行列 (12 次正方行列) の  $M$  の固有値の実部の最大値  $A$  を、(17) のパラメータ  $k$  の関数としてグラフにしたものが図 3 である。

図 3 から、 $A$  は  $-1 \leq k \leq 1$  のすべての値で正の実数になることが分かる。以上よりこの定常配置は不安定である。

## 4 おわりに

本研究では、点渦系の定常配置の安定性を議論する手法として、方程式 (1) を直接扱うのではなく、周期系 (2) に対する倍周期の摂動を調べるという手法を導入し、いくつかの例を考察した。文献 [5] で得られた定常配置のうち、今回は 3 重渦列について安定性を扱ったが、3 重渦列で安定となるパラメータを見いだすことはできなかった。文献 [5] ではより広いクラスの定常解が構成されているので、それらについて今回の手法を適用することは、興味深い課題である。また、文献 [5] の手法の拡張を試みることも重要であろう。例えば [9] で扱われているような球面上の渦の定常配置に関する拡張は、物理的な意味でも興味深い。

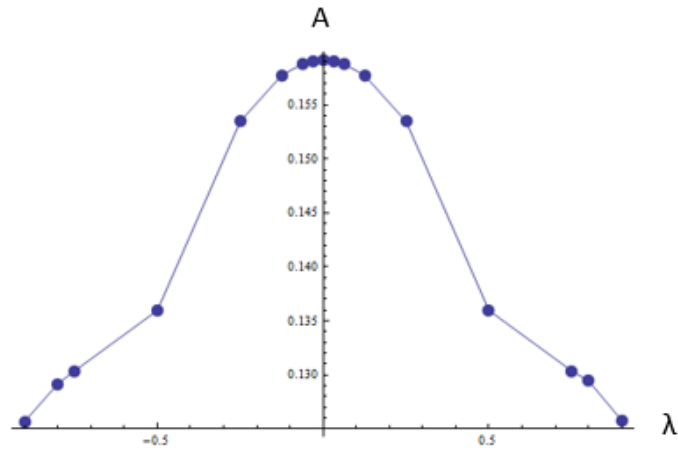


図3 3重渦列に対する摂動

## 参考文献

- [1] H. Aref, Vortex dynamics of wakes, in *IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence*, A.V. Borisov, V.V. Kozlov, I.S. Mamaev, M.A. Sokolovskiy (Eds.), IUTAM Bookseries, Vol. 6, Springer, 2008, 11–26
- [2] 福本 康秀, 点渦系 ([連載] 渦運動の基礎知識 2), *ながれ* **24** (2005), 327–340
- [3] 福本 康秀, 渦糸をめぐる可積分系, *数学の楽しみ (数学セミナー 別冊)*, No.25, 日本評論社 (2001), 21–31
- [4] H. von Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen, *J. für die reine und angewandte Mathematik* **55** (1858), 25–55.
- [5] A.D. Hemery and A.P. Veselov, Periodic vortex streets and complex monodromy, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)* **10** (2014), 114, 18 pages.
- [6] H. Lamb, *流体力学 1* (今井功・橋本英典訳), 東京図書 (1978)
- [7] K. Moffatt, Vortex dynamics: the legacy of Helmholtz and Kelvin, in *IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence*, A.V. Borisov, V.V. Kozlov, I.S. Mamaev, M.A. Sokolovskiy (Eds.), IUTAM Bookseries, Vol. 6, Springer, 2008, 1–10
- [8] 中野 徹, カルマン渦列の不安定性, *流体物理学特論 I 講義ノート*, 中央大学 (2008), [http://www.phys.chuo-u.ac.jp/labs/nakano/tokuron1/sec8\(tokuron1\).pdf](http://www.phys.chuo-u.ac.jp/labs/nakano/tokuron1/sec8(tokuron1).pdf)
- [9] 坂上 貴之, *渦運動の数理的諸相*, 共立出版 (2013)