

クラスター代数と q -Painlevé方程式

大久保, 直人
東京大学大学院数理科学研究科

<https://doi.org/10.15017/1807770>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告．26A0-S2 (18), pp.109-114, 2015-03．九州大学応用力学研究
所
バージョン：
権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.26AO-S2
「非線形波動研究の現状 — 課題と展望を探る—」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.26AO-S2

State of arts and perspectives of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 30 - November 1, 2014

Article No. 18 (pp. 109 - 114)

クラスター代数と q -Painleve 方程式

大久保 直人 (OKUBO Naoto)

(Received 15 January 2015; accepted 4 February 2015)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2015

クラスター代数と q -Painlevé 方程式

東京大学大学院数理科学研究科 大久保直人 (OKUBO Naoto)

概要

クラスター代数はクラスター変数, 係数, quiver に mutation と呼ばれる操作を繰り返すことで定義される. 本稿では mutation-period と呼ばれる性質をもつ適当な quiver を考えたとき, 係数の満たす関係式が, いくつかの q -Painlevé 方程式となることを紹介する.

1 はじめに

本稿では Fomin と Zelevinsky により導入されたクラスター代数 [1, 2] を扱う. クラスター代数はクラスター変数と係数によって記述される可換環の一種であり, その生成系はクラスター変数, 係数, quiver (有向グラフ) の組に対して, 新しいそれらの組を得る mutation という操作によって逐次に定義される. 以下でクラスター代数の定義を与える.

1.1 クラスター代数

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ と $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ をそれぞれ N 個の変数の組とし, Q を N 個の頂点をもつ quiver とする. Q の各頂点には 1 から N の番号が重複なく対応しているものとする. また, Q はループ ($i \rightarrow i$ となる矢印) と 2-サイクル ($i \rightarrow j \rightarrow i$ となる矢印の組) をもたないものとする. 各 x_i をクラスター変数, 各 y_i を係数といい, それらの組 $(Q, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ を seed という. Q の頂点 i から j に向かう矢印の本数を $\lambda_{i,j}$ と書く. また, $\lambda_{j,i} = -\lambda_{i,j}$ により $\lambda_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq N$) を定める. Q はループをもたないので $\lambda_{i,i} = 0$ である. クラスター代数の定義には, seed から新しい seed を得る操作である mutation を用いる. 1 から N までの各番号に対する mutation μ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) を定義する.

定義 1.1 (mutation) $\mu_k : (Q, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (Q', \mathbf{x}', \mathbf{y}')$ ($k = 1, 2, \dots, N$) を以下で定義する.

- 新しい quiver Q' は Q に以下の操作を順に施した quiver とする.
 - $\lambda_{i,k} > 0$ かつ $\lambda_{k,j} > 0$ となるすべての (i, j) の組に対して, i から j に $\lambda_{i,k}\lambda_{k,j}$ 本の矢印を加える.
 1. の操作で 2-サイクルが現れた場合は, 2-サイクルを消去する.
 - 頂点 k と繋がる矢印の向きを反転する.
- 新しい係数の組 $\mathbf{y}' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_N)$ は Q と $\mathbf{y}$ から以下の式で定義する:

$$\begin{aligned} y'_k &= y_k^{-1}, \\ y'_i &= y_i (y_k^{-1} + 1)^{-\lambda_{k,i}} & (\lambda_{k,i} > 0), \\ y'_i &= y_i (y_k + 1)^{\lambda_{i,k}} & (\lambda_{i,k} > 0), \\ y'_i &= y_i & (\lambda_{k,i} = 0). \end{aligned} \tag{1.1}$$

- 新しいクラスター変数の組 $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ は $Q, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ から以下の式で定義する:

$$x'_k = \frac{1}{(y_k + 1)x_k} \left(\prod_{\lambda_{k,j} > 0} x_j^{\lambda_{k,j}} + y_k \prod_{\lambda_{j,k} > 0} x_j^{\lambda_{j,k}} \right), \quad (1.2)$$

$$x'_i = x_i \quad (i \neq k).$$

任意の seed $(Q, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ に対して $\mu_k^2(Q, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (Q, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ が成り立つ。

例 1.2 Q を図 1 の左の quiver, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ とする. この seed に mutation μ_2 を施すと, 新しい quiver Q' は図 1 の右の quiver となり, 新しい係数とクラスター変数は

$$y'_1 = y_1(y_2 + 1), \quad y'_2 = y_2^{-1}, \quad y'_3 = y_3(y_2^{-1} + 1)^{-2}, \quad x'_1 = x_1, \quad x'_2 = \frac{x_3^2 + y_2 x_1}{(y_2 + 1)x_2}, \quad x'_3 = x_3 \quad (1.3)$$

となる.



図 1 mutation の例

定義 1.3 (クラスター代数) 任意の seed を一つ固定し, それを初期 seed と呼ぶ. 初期 seed $(Q, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ に対してクラスター代数 $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ を

$$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{Z}(\mathbf{y})[x|x \in X] \subset \mathbb{Q}(\mathbf{y})(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

で定義する. ただし, X は初期 seed に mutation を繰り返して得られるすべてのクラスター変数の集合とする.

例 1.4 $N = 2$ の場合は初期 seed $(Q, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ に対して mutation を繰り返すと, seed の列:

$$\dots \xleftarrow{\mu_2} (Q, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \xleftarrow{\mu_1} (Q', \mathbf{x}', \mathbf{y}') \xleftarrow{\mu_2} (Q'', \mathbf{x}'', \mathbf{y}'') \xleftarrow{\mu_1} \dots \quad (1.5)$$

が得られる. mutation で得られたクラスター変数の集合を $X = \{\dots, x_1, x_2, x'_1, x'_2, x''_1, x''_2, \dots\}$ とすると, クラスター代数は $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{Z}(y_1, y_2)[x|x \in X] \subset \mathbb{Q}(y_1, y_2)(x_1, x_2)$ となる.

quiver とクラスター変数の組 $(Q, \mathbf{x})$ (これも seed という) と, その mutation を用いて係数なしクラスター代数が定義される. mutation $\mu_k : (Q, \mathbf{x}) \mapsto (Q', \mathbf{x}')$ ($k = 1, 2, \dots, N$) の定義は, Q' は係数付きの場合と同様とし, $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ は

$$x'_k = \frac{1}{x_k} \left(\prod_{\lambda_{k,j} > 0} x_j^{\lambda_{k,j}} + \prod_{\lambda_{j,k} > 0} x_j^{\lambda_{j,k}} \right), \quad (1.6)$$

$$x'_i = x_i \quad (i \neq k)$$

で定義する. 初期 seed $(Q, \mathbf{x})$ に対して係数なしクラスター代数 $\mathcal{A}(Q, \mathbf{x})$ を

$$\mathcal{A}(Q, \mathbf{x}) = \mathbb{Z}[x|x \in X] \subset \mathbb{Q}(\mathbf{x}) \quad (1.7)$$

で定義する. ただし, X は初期 seed に mutation を繰り返して得られるすべてのクラスター変数の集合とする.

1.2 mutation-periodic quiver

本稿では mutation-period と呼ばれる性質をもつ quiver を初期 seed とするクラスター代数を考える. $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_h)$ ($i_j \in \{1, 2, \dots, N\}$) に対して, $\mu_{\mathbf{i}}(Q) = \mu_{i_h} \mu_{i_{h-1}} \cdots \mu_{i_1}(Q)$ とする. h は mutation の回数である. また, N 文字の置換 $\nu \in S_N$ に対して, $\nu(Q)$ を Q の頂点の番号を置き換えた quiver と定義する. mutation の繰り返しが頂点の置き換えとなるような quiver を mutation-periodic quiver という.

定義 1.5 (mutation-periodic quiver) quiver Q がある $\mathbf{i}$ と $\nu \in S_N$ に対して, $\mu_{\mathbf{i}}(Q) = \nu(Q)$ が成り立つとき, $\mathbf{i}$ は Q の ν -周期であるといい, Q を mutation-periodic quiver という.

例 1.6 図 2 の左の quiver を Q_I とする. $\mathbf{i} = (1)$, $\nu : (1, 2, 3, 4) \mapsto (2, 3, 4, 1)$ とすると, 図 2 の中央の quiver は $\mu_{\mathbf{i}}(Q_I) = \mu_1(Q_I)$, 右の quiver は $\nu(Q_I)$ である. この二つは quiver として同じものである. $\mathbf{i}$ は Q_I の ν -周期である. また, 図 3 の左の quiver を Q_{III} , 右の quiver を Q_{VI} とする. $\mathbf{i} = (1, 2)$, $\nu : (1, 2, 3, 4, 5, 6) \mapsto (3, 4, 5, 6, 2, 1)$ とすると $\mathbf{i}$ は Q_{III} の ν -周期であり, $\mathbf{i} = (1, 2, 3, 4)$, $\nu : (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \mapsto (5, 6, 7, 8, 4, 3, 2, 1)$ とすると $\mathbf{i}$ は Q_{VI} の ν -周期である.

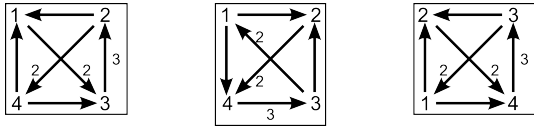


図 2 mutation-periodic quiver の例 (1)

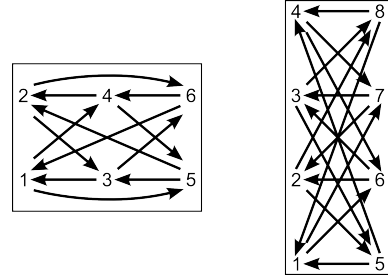


図 3 mutation-periodic quiver の例 (2)

mutation-periodic quiver のうち $\mathbf{i} = (i_1)$ であるものはすべて求められている [3]. $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_h)$ ($h \geq 2$) である mutation-periodic quiver を得る方法として, 差分方程式の reduction と対応する quiver の変形によるものがある [4]. 図 3 の Q_{III} と Q_{VI} は離散 mKdV 方程式の reduction を用いて得られる.

2 クラスター変数と係数の満たす q -Painlevé 方程式

初期 seed を $(Q(1), \mathbf{x}(1), \mathbf{y}(1))$ とし, seed の列:

$$\cdots \xrightarrow{\mu_{\nu^{-1}(\mathbf{i})}} (Q(1), \mathbf{x}(1), \mathbf{y}(1)) \xleftarrow{\mu_{\mathbf{i}}} (Q(2), \mathbf{x}(2), \mathbf{y}(2)) \xrightarrow{\mu_{\nu(\mathbf{i})}} (Q(3), \mathbf{x}(3), \mathbf{y}(3)) \xleftarrow{\mu_{\nu^2(\mathbf{i})}} \cdots \quad (2.1)$$

を考える. ただし, $\mathbf{x}(j) = (x_1(j), x_2(j), \dots, x_N(j))$, $\mathbf{y}(j) = (y_1(j), y_2(j), \dots, y_N(j))$ であり, $\mathbf{i}$ は $Q(1)$ の ν -周期であるとする. このとき, $x_n(j), y_n(j)$ はある差分方程式を満たすが, $Q(1)$ の mutation-periodic quiver を適当にとることで, $x_n(j)$ はある双線形方程式, $y_n(j)$ は q -Painlevé 方程式を満たす. 先行研究として q -Painlevé I, II 方程式 [4] とそれらの高階類似 [5] が得られている. 本稿では q -Painlevé III, VI 方程式が得られることを紹介する.

2.1 係数とクラスター変数の満たす q -Painlevé III 方程式

初期 seed の quiver として図 3 の左の Q_{III} をとり, seed の列:

$$\begin{aligned}
& \dots \xleftrightarrow{\mu_5 \mu_6} (Q_{\text{III}}, w_1, x_1, w_2, x_2, w_3, x_3, y_{1,1}, z_{1,1}, y_{2,1}, z_{2,1}, y_{3,1}, z_{3,1}) \\
& \xleftrightarrow{\mu_2 \mu_1} (Q'_{\text{III}}, x_4, w_4, w_2, x_2, w_3, x_3, z_{4,2}, y_{4,2}, y_{2,2}, z_{2,2}, y_{3,2}, z_{3,2}) \\
& \xleftrightarrow{\mu_4 \mu_3} (Q''_{\text{III}}, x_4, w_4, x_5, w_5, w_3, x_3, z_{4,3}, y_{4,3}, z_{5,3}, y_{5,3}, y_{3,3}, z_{3,3}) \\
& \xleftrightarrow{\mu_6 \mu_5} (Q_{\text{III}}, x_4, w_4, x_5, w_5, x_6, w_6, z_{4,4}, y_{4,4}, z_{5,4}, y_{5,4}, z_{6,4}, y_{6,4}) \\
& \xleftrightarrow{\mu_1 \mu_2} (Q'_{\text{III}}, w_7, x_7, x_5, w_5, x_6, w_6, y_{7,5}, z_{7,5}, z_{5,5}, y_{5,5}, z_{6,5}, y_{6,5}) \xleftrightarrow{\mu_3 \mu_4} \dots
\end{aligned} \tag{2.2}$$

を考える. ただし, w_n, x_n はクラスター変数, $y_{i,j}, z_{i,j}$ は係数である. mutation を施した番号に対応するクラスター変数と係数は $w_i \rightarrow x_{i+3}$, $x_i \rightarrow w_{i+3}$, $y_{i,j} \rightarrow z_{i+3,j+1}$, $z_{i,j} \rightarrow y_{i+3,j+1}$ と変化し, それ以外のものは $w_i \rightarrow w_i$, $x_i \rightarrow x_i$, $y_{i,j} \rightarrow y_{i,j+1}$, $z_{i,j} \rightarrow z_{i,j+1}$ となっていることに注意する. 係数 $y_{i,j}, z_{i,j}$ を定義式 (1.1) に従って計算すると

$$\begin{aligned}
y_{n,n} &= y_{n,n-1}(y_{n-1,n-1} + 1)(z_{n-1,n-1}^{-1} + 1)^{-1}, \\
y_{n,n-1} &= y_{n,n-2}(y_{n-2,n-2}^{-1} + 1)^{-1}(z_{n-2,n-2} + 1), \\
y_{n,n-2} &= z_{n-3,n-3}^{-1}, \\
z_{n,n} &= z_{n,n-1}(z_{n-1,n-1} + 1)(y_{n-1,n-1}^{-1} + 1)^{-1}, \\
z_{n,n-1} &= z_{n,n-2}(z_{n-2,n-2}^{-1} + 1)^{-1}(y_{n-2,n-2} + 1), \\
z_{n,n-2} &= y_{n-3,n-3}^{-1}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

が得られる. $y_n := y_{n,n}, z_n := z_{n,n}$ とおき, y_n, z_n だけの式に書き換えると

$$\begin{aligned}
y_{n+3} &= (y_{n+2} + 1)(z_{n+2}^{-1} + 1)^{-1}(y_{n+1}^{-1} + 1)^{-1}(z_{n+1} + 1)z_n^{-1}, \\
z_{n+3} &= (z_{n+2} + 1)(y_{n+2}^{-1} + 1)^{-1}(z_{n+1}^{-1} + 1)^{-1}(y_{n+1} + 1)y_n^{-1}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

となる. この差分方程式系は 4 個の保存量:

$$\begin{aligned}
A_1^2 &= \frac{y_{n+2}z_{n+2}}{y_n z_n}, & A_2^2 &= \frac{y_{n+2}y_n(z_{n+1}^{-1} + 1)^2}{z_{n+2}z_n(y_{n+1}^{-1} + 1)^2}, \\
A_3^2 &= \frac{y_{2n+1}z_{2n+1}y_{2n}z_{2n}}{A_1^{4n+1}}, & A_4^2 &= \frac{A_1 y_{2n}z_{2n}}{y_{2n+1}z_{2n+1}}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

をもつ. これらの保存量を用いて (2.4) の階数を落とし, y_n と z_n を分離すると

$$\begin{aligned}
y_{n+1}y_{n-1} &= A_2 A_3^2 A_1^{2n} \frac{y_n + 1}{y_n \left(y_n + A_3 A_4^{(-1)^n} A_1^n \right)}, \\
z_{n+1}z_{n-1} &= A_2^{-1} A_3^2 A_1^{2n} \frac{z_n + 1}{z_n \left(z_n + A_3 A_4^{(-1)^n} A_1^n \right)}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

が得られる. これらの式は各々 q -Painlevé III 方程式である. 実際に, y_n の式において従属変数および定数を

$$y_{2n} = a_1^{-1} q^n u_n, \quad y_{2n+1} = a_0 q^n v_n, \quad A_1 = q, \quad A_2 = qc^2, \quad A_3 = a_0 a_1^{-1} q^{-1/2}, \quad A_4 = a_0^{-1} a_1^{-1} q^{1/2} \tag{2.7}$$

とおくと

$$u_{n+1}u_n = qc^2 \frac{1 + a_0 q^n v_n}{v_n(a_0 q^n + v_n)}, \quad v_n v_{n-1} = qc^2 \frac{a_1 q^{-n} + u_n}{u_n(1 + a_1 q^{-n} u_n)} \tag{2.8}$$

となる．これは q -Painlevé III 方程式 [6] であり，坂井の Mul.6 系に対応する [7]．また，係数なしクラスター代数において (2.2) と同様の seed の列を考える．クラスター変数 w_n, x_n を定義式 (1.6) に従って計算すると

$$w_{n+3}x_n = w_{n+1}x_{n+2} + w_{n+2}x_{n+1}, \quad x_{n+3}w_n = x_{n+1}w_{n+2} + x_{n+2}w_{n+1} \quad (2.9)$$

が得られる．この双線形方程式と (2.6) の間の変数変換は

$$y_n = \frac{x_{n+1}w_n}{x_nw_{n+1}}, \quad z_n = \frac{w_{n+1}x_n}{w_nx_{n+1}} \quad (2.10)$$

で与えられる．

2.2 係数とクラスター変数の満たす q -Painlevé VI 方程式

q -Painlevé VI 方程式も同様の手法で得ることができる．初期 seed の quiver として図 3 の右の Q_{VI} をとり，seed の列:

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\mu_5\mu_6\mu_7\mu_8} & (Q_{\text{VI}}, w_1, x_1, W_1, X_1, w_2, x_2, W_2, X_2, \\ & y_{1,1}, z_{1,1}, Y_{1,1}, Z_{1,1}, y_{2,1}, z_{2,1}, Y_{2,1}, Z_{2,1}) \\ \xrightarrow{\mu_4\mu_3\mu_2\mu_1} & (Q'_{\text{VI}}, X_3, W_3, x_3, w_3, w_2, x_2, W_2, X_2, \\ & Z_{3,2}, Y_{3,2}, z_{3,2}, y_{3,2}, y_{2,2}, z_{2,2}, Y_{2,2}, Z_{2,2}) \\ \xrightarrow{\mu_8\mu_7\mu_6\mu_5} & (Q_{\text{VI}}, X_3, W_3, x_3, w_3, X_4, W_4, x_4, w_4, \\ & Z_{3,3}, Y_{3,3}, z_{3,3}, y_{3,3}, Z_{4,3}, Y_{4,3}, z_{4,3}, y_{4,3}) \\ \xrightarrow{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} & (Q'_{\text{VI}}, w_5, x_5, W_5, X_5, X_4, W_4, x_4, w_4, \\ & y_{5,4}, z_{5,4}, Y_{5,4}, Z_{5,4}, Z_{4,4}, Y_{4,4}, z_{4,4}, y_{4,4}) \xrightarrow{\mu_5\mu_6\mu_7\mu_8} \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

を考える．ただし， w_n, x_n, W_n, X_n はクラスター変数， $y_{i,j}, z_{i,j}, Y_{i,j}, Z_{i,j}$ は係数である．係数を定義式 (1.1)，クラスター変数を係数なしの場合の定義式 (1.6) に従って計算し，係数は $y_n := y_{n,n}, z_n := z_{n,n}, Y_n := Y_{n,n}, Z_n := Z_{n,n}$ とおき， y_n, z_n, Y_n, Z_n だけの式に書き換えると

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= (y_{n+1} + 1)(z_{n+1}^{-1} + 1)^{-1}(Y_{n+1}^{-1} + 1)^{-1}(Z_{n+1} + 1)Z_n^{-1}, \\ z_{n+2} &= (z_{n+1} + 1)(y_{n+1}^{-1} + 1)^{-1}(Z_{n+1}^{-1} + 1)^{-1}(Y_{n+1} + 1)Y_n^{-1}, \\ Y_{n+2} &= (Y_{n+1} + 1)(Z_{n+1}^{-1} + 1)^{-1}(y_{n+1}^{-1} + 1)^{-1}(z_{n+1} + 1)z_n^{-1}, \\ Z_{n+2} &= (Z_{n+1} + 1)(Y_{n+1}^{-1} + 1)^{-1}(z_{n+1}^{-1} + 1)^{-1}(y_{n+1} + 1)y_n^{-1}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} w_{n+2}X_n &= x_{n+1}W_{n+1} + w_{n+1}X_{n+1}, & x_{n+2}W_n &= w_{n+1}X_{n+1} + x_{n+1}W_{n+1}, \\ W_{n+2}x_n &= X_{n+1}w_{n+1} + W_{n+1}x_{n+1}, & X_{n+2}w_n &= W_{n+1}x_{n+1} + X_{n+1}w_{n+1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

を得る．差分方程式系 (2.12) は 6 個の保存量:

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \frac{y_{n+1}z_{n+1}Y_{n+1}Z_{n+1}}{y_nz_nY_nZ_n}, & A_2^2 &= \frac{z_{2n+1}z_{2n}Y_{n+1}Z_{n+1}Y_nZ_n}{Y_{2n+1}Y_{2n}y_{n+1}z_{n+1}y_nz_n}, \\ A_3^2 &= \frac{y_{2n+1}z_{2n+1}y_{2n}z_{2n}}{A_1^{4n+1}}, & A_4^2 &= \frac{A_1y_{2n}z_{2n}}{y_{2n+1}z_{2n+1}}, \\ A_5^2 &= \frac{y_{2n+1}Y_{2n+1}y_{2n}Y_{2n}}{A_1^{4n+1}}, & A_6^2 &= \frac{A_1y_{2n}Y_{2n}}{y_{2n+1}Y_{2n+1}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

をもつ．これらの保存量を用いて (2.12) の階数を落とし， y_n, z_n, Y_n, Z_n を分離すると

$$\begin{aligned}
y_{n+1}y_{n-1} &= A_2^{-1}A_3A_5A_1^{2n} \frac{(y_n+1) \left(A_2A_4^{(-1)^{n+1}}A_6^{(-1)^{n+1}}y_n+1 \right)}{\left(y_n+A_3A_4^{(-1)^n}A_1^n \right) \left(y_n+A_5A_6^{(-1)^n}A_1^n \right)}, \\
z_{n+1}z_{n-1} &= A_2A_3^3A_5^{-1}A_1^{2n} \frac{(z_n+1) \left(A_3^{-1}A_5A_4^{(-1)^{n+1}}A_6^{(-1)^n}z_n+1 \right)}{\left(z_n+A_3A_4^{(-1)^n}A_1^n \right) \left(z_n+A_2A_3A_6^{(-1)^{n+1}}A_1^n \right)}, \\
Y_{n+1}Y_{n-1} &= A_2A_3^{-1}A_5^3A_1^{2n} \frac{(Y_n+1) \left(A_3A_5^{-1}A_4^{(-1)^n}A_6^{(-1)^{n+1}}Y_n+1 \right)}{\left(Y_n+A_2A_5A_4^{(-1)^{n+1}}A_1^n \right) \left(Y_n+A_5A_6^{(-1)^n}A_1^n \right)}, \\
Z_{n+1}Z_{n-1} &= A_2^3A_3A_5A_1^{2n} \frac{(Z_n+1) \left(A_2^{-1}A_4^{(-1)^n}A_6^{(-1)^n}Z_n+1 \right)}{\left(Z_n+A_2A_5A_4^{(-1)^{n+1}}A_1^n \right) \left(Z_n+A_2A_3A_6^{(-1)^{n+1}}A_1^n \right)}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

が得られる．これらの式は各々 q -Painlevé VI 方程式 [7] である． q -Painlevé VI 方程式 (2.15) と双線形方程式 (2.13) との間の変数変換は

$$y_n = \frac{X_n w_n}{W_n x_n}, \quad z_n = \frac{W_n x_n}{X_n w_n}, \quad Y_n = \frac{x_n W_n}{w_n X_n}, \quad Z_n = \frac{w_n X_n}{x_n W_n} \tag{2.16}$$

で与えられる．

3 まとめと今後の課題

本稿では，適当な mutation-periodic quiver を初期 seed にもつクラスター代数を考え，mutation により seed の列に現れる係数たちが q -Painlevé III, VI 方程式を満たすことを紹介した．今後の課題としては，現在までに得られていない q -Painlevé 方程式や，それらの高階類似などを同様の手法で得ることを目標としている．mutation-periodic quiver や係数の満たす関係式の保存量を見つける手法は，今のところ統一的な方法が見つかっていないため，それも今後の課題としたい．

参考文献

- [1] S. Fomin, A. Zelevinsky, "Cluster algebras IV: Coefficients", *Compositio Mathematica* **143**, (2007), 112-164.
- [2] S. Fomin, "Total positivity and cluster algebras", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, **2**, (2010), 125-145.
- [3] A. P. Fordy, R. J. Marsh, "Cluster mutation-periodic quivers and associated Laurent sequences", *Journal of Algebraic Combinatorics*, **34**, no. 1, (2011), 19-66.
- [4] N. Okubo, "Discrete integrable systems and cluster algebras", *RIMS Kokyuroku Bessatsu, Research Institute for Mathematical Sciences*, **B41**, (2013), 25-42.
- [5] A. N. W. Hone, R. Inoue, "Discrete Painlevé equations from Y-systems", *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**, 474007, (2014).
- [6] K. Kajiwara, K. Kimura, "On a q -difference Painlevé III equation: I. Derivation, symmetry and Riccati type solutions", *J. Nonlin. Math. Phys.*, **10**, (2003), 86-102.
- [7] H. Sakai, "Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations", *Communications in Mathematical Physics*, **220**, (2001), 165-229.