時間遅れをもつ交通流モデルの離散化とその解について

松家, 敬介
東京大学大学院数理科学研究科数理科学連携基盤センター | 東京大学生物医学と数学の融合拠点

金井, 政宏
東京大学大学院数理科学研究科

https://doi.org/10.15017/1807497

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 26AO-S2 (14), pp.80-86, 2015-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.26AO-S2
「非線形波動研究の現状 — 課題と展望を探る—」（研究代表者　増田　哲）

Reports of RIAM Symposium No.26AO-S2

State of arts and perspectives of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 30 - November 1, 2014

Article No. 14 (pp. 80 - 86)

時間遅れをもつ交通流モデルの離散化とその解について

松家 敬介（MATSUYA Keisuke），金井 政宏（KANAI Masahiro）

（Received 9 January 2015; accepted 19 February 2015）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2015

時間遅れをもつ交通流モデルの離散化とその解について

東京大学大学院数理科学研究科
数理科学連携基盤センター 生物医学と数学の融合拠点　松家 敬介　(MATSUYA Keisuke)
東京大学大学院数理科学研究科　金井 政宏　(KANAI Masahiro)

概　要

本稿では, Newell が提案した時間遅れ微分方程式で記述される交通流モデルの離散化及び超離散化を紹介する. 離散化及び超離散化で得られた差分方程式は時間遅れをもつことがわかった. また, それらの進行波解についても議論する.

1　はじめに

本稿では, Newell が提案し [1], Whitham が特殊な場合において進行波解を与えた [2] 交通流モデル:

$$\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}T}(T+\tau) = V(h_n) \tag{1.1}$$

を扱う. ただし, $n \in \mathbb{Z},\ \tau > 0,\ x_n := x_n(T),\ T \geq 0,\ h_n := x_{n+1} - x_n$. このモデルは, x が車の位置を表し, 車間距離 h に対して, 関数 $V(h)$ が最適な速度を返すものとなっている. また, このモデルは戸田格子との対応などから, 楕円関数解が存在することが知らている [2, 3, 4].

微分方程式の解の挙動を計算機で解析するために, 方程式の離散化を行う必要がある. また, 離散化で得られた方程式を以下の極限公式 $(A, B \in \mathbb{R})$:

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \log\left(\exp\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)\exp\left(\frac{B}{\varepsilon}\right)\right) = A + B,\ \lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \log\left(\exp\left(\frac{A}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{B}{\varepsilon}\right)\right) = \max\,[A, B]$$

により, 超離散化することが出来る. 超離散化によって, 従属変数の値までもが離散化されたセルオートマトンが得られる. セルオートマトンは, 従属変数の値が離散化されているので丸め誤差を考える必要がなく, 数値計算に適している. 超離散化によって得られるセルオートマトンとして代表的なものには, 箱玉系 [5, 6] と呼ばれる離散力学系が挙げられる. 一方で, 筆者らは微分方程式の解の構造を保存した離散化及び超離散化に興味がある. この様な離散化及び超離散化は, ソリトン方程式に代表される可積分系の方程式に対して様々なものが報告されている. そのうちの一つとして, modified Lotka–Volterra 方程式 (mLV) が挙げられる. (1.1) は, $V(h) := \tanh(h - c) + \tanh c,\ c > 0$ の場合, (mLV) との関連が指摘されており [7], 本稿では (mLV) の離散化及び超離散化の手法に倣って [6, 8], この場合の (1.1) に対して, 変数変換: $g_n := \tanh(h_n - c)$ を行った方程式:

$$\frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}T} = (1 - g_n^2)(g_{n+1}(T-\tau) - g_n(T-\tau)) \tag{NW}$$

の離散化及び超離散化について考察する. (NW) の離散化及び超離散化は, [7] でも報告されている. しかし, [7] で提案されている方程式には時間遅れのパラメータが入っていない. これは, [7] の最終目標が (1.1) と関連が指摘されている OV モデル:

$$\frac{\mathrm{d}^2x_n}{\mathrm{d}T^2} = \frac{1}{\tau}\left(V(h_n) - \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}T}\right) \tag{OV}$$

の離散化及び超離散化であったことに起因している．実際に, [7] では, (OV) の二階微分を直接, 二階差分に離散化してしまうのではなく, (1.1) を経由することで二階差分への離散化を行っている．方程式に時間遅れのパラメータが含まれたものが, (NW) の離散化及び超離散化として適切であると筆者らは考えている．この様な背景から, 本稿では時間遅れのパラメータも含んだ (NW) の離散化及び超離散化について議論する．

(mLV) は,

$$\frac{\mathrm{d}r_j}{\mathrm{d}T} = r_j(1+ar_j)(r_{j+1}-r_{j-1}) \tag{mLV}$$

で与えられる． ただし, $j \in \mathbb{Z}$, $r_j := r_j(T)$, $a \in \mathbb{R}$. (mLV) に対して, $r_j = -1/(2a) + \sqrt{-1}\xi s(\tilde{T}, X)$, $X = (j - T/(2a))\xi$, $\tilde{T} = \xi^3 T/3$ として, 極限: $\xi \to +0$ をとることにより, $s := s(\tilde{T}, X)$ が満たす方程式:

$$\frac{\partial s}{\partial \tilde{T}} = \frac{\partial^3 s}{\partial X^3} - \frac{\partial}{\partial X}(s^3) \tag{mKdV}$$

が得られる．この方程式は, modified Korteweg–de Vries 方程式と呼ばれるソリトン方程式で, そのソリトン解を保存した離散化として, 次の差分方程式:

$$v_j^{t+1}\frac{1+\delta v_{j+1}^{t+1}}{1+av_j^{t+1}} = v_j^t\frac{1+\delta v_{j-1}^t}{1+av_j^t} \tag{d–mKdV}$$

が知られている [8]．ただし, $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\delta > 0$. (d–mKdV) に対して, $v_j^t = r_j(-\delta t)$, $T = -\delta t$ とし, 極限: $\delta \to +0$ をとることにより, (mLV) が得られるので, (d–mKdV) は (mLV) の離散化でもある．

[7] で指摘されている様に, (NW) と (mLV) は一部の解を共有している．実際に, (NW) に対して, 進行波解: $g_n = G(\phi)$, $\phi := T + 2\tau n$ を課すと, 次の微差分方程式:

$$G'(\phi) = (1 - G(\phi)^2)(G(\phi+\tau) - G(\phi-\tau)) \tag{1.2}$$

が得られる．一方で, (mLV) に対して, 変数変換: $r_j = -(1+\bar{r}_j)/(2a)$ を施し, 進行波解: $\bar{r}_j = \bar{R}(\psi)$, $\psi := -T/(4a) + \tau j$ を課すと, $\bar{R}(\psi)$ が ψ に関して (1.2) と同じ方程式を満たすことが従う．このことから, (NW) と (mLV) は一部の解を共有していることが分かる．

2 (NW) の離散化と進行波解

2.1 (NW) の離散化

前節で述べた様に, (NW) は (mLV) と一部の解を共有していた．そこで, (d–mKdV) から出発して (NW) の離散化を行いたい．まず, (d–mKdV) に対して, 変数変換: $v_j^t = -(1+\bar{v}_j^t)/(2a)$ を施し, 進行波解: $\bar{v}_j^t = \bar{V}(\Psi)$, $\Psi := t + mj$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ を課すと, Ψ に関する差分方程式:

$$\begin{aligned}\frac{1-2\gamma}{\gamma}\left(\bar{V}(\Psi+1) - \bar{V}(\Psi)\right) &= \left(1-\bar{V}(\Psi)\right)\left(1+\bar{V}(\Psi+1)\right)\bar{V}(\Psi+1+m) \\ &\quad - \left(1-\bar{V}(\Psi+1)\right)\left(1+\bar{V}(\Psi)\right)\bar{V}(\Psi-m)\end{aligned}$$

が得られる．ただし, $\gamma := \delta/(4a)$. ここで, (NW) と (mLV) の解の対応を参考にし, 新しい従属変数: $U(\Phi)$, $\Phi := t + 2mn$ を用意する．さらに, $U(\Phi)$ が Φ に関して上記と同じ差分方程式を満たすとする．$\Phi + 1 + m = (t - m + 1) + 2m(n+1)$, $\Phi - m = (t-m) + 2mn$ であることから, $U(\Phi+1) \to u_n^{t+1}$, $U(\Phi) \to u_n^t$, $U(\Phi+1+m) \to u_{n+1}^{t-m+1}$, $U(\Phi - m) \to u_n^{t-m}$ という置き換えを行うと,

$$\frac{1-2\gamma}{\gamma}(u_n^{t+1} - u_n^t) = (1-u_n^t)(1+u_n^{t+1})u_{n+1}^{t-m+1} - (1-u_n^{t+1})(1+u_n^t)u_n^{t-m} \tag{d–NW}$$

が得られる. 以下では, $\gamma > 0$ とする. (d–NW) に対して, $u_n^t = g_n(\gamma t),\ \gamma m = \tau,\ \gamma t = T$ とし, 極限: $\gamma \to +0$ をとることにより, (NW) が得られるので, (d–NW) は (NW) の離散化と言える.

2.2 (d–NW) の進行波解

ここでは (d–NW) の進行波解を求める. (NW) と (mLV) は進行波解を共有していたので, (d–NW) の解として以下の形をしたものが求まる.

$$u_n^t = \frac{M + NL^tK^n}{1 + L^tK^n}$$

解の形から $L > 1$ とし, さらに (d–NW) の定数解を除くために $M \neq N$ とし, 空間一様な解も除くために $K \neq 1$ とする. この解を仮定すると, (d–NW) から以下の三つの関係式:

$$\begin{aligned}(LK-1)M^2 - 2L^m(L-1)M + L^m(L-1)\Delta - (LK-1) = 0,\\ L^m(LK-1)N^2 - 2(L-1)KN + (L-1)K\Delta - L^m(LK-1) = 0,\\ (L+1)(LK-1)MN - (LK+1)(L-1)(M+N) + (LK+1)(L-1)\Delta - (L+1)(LK-1) = 0\end{aligned}$$

が得られる. ただし, $\Delta := (1-2\gamma)/\gamma$. これらの関係式が両立するための条件として, 分散関係に相当する以下の関係式:

$$(2M-\Delta)(L-1)(K-1)(L^2K-1)[4L(L^{2m}+K) - \{2(L+1)(LK+1) - (L-1)(LK-1)\Delta\}L^m] = 0$$

も得られる. この関係式において, $2M - \Delta = 0$ の場合, 前述の三つの関係式から $N = M$ が従ってしまい, 仮定に反してしまう. したがって, 以下に挙げる二種類の分散関係が成り立つ場合について考える. それぞれの場合における (d–NW) の解と連続極限は, 以下に挙げられる様になる.

- $L^2K - 1 = 0$ の場合:

$$u_n^t = \frac{L^{m+1}\left(-L^{m+1} \pm \sqrt{D}\right) + \left(-1 \pm \sqrt{D}\right)L^{t-2n}}{L^{m+1}(1 + L^{t-2n})}$$

ただし, $D := L^{2m+2} + \Delta L^{m+1} + 1$. $u_n^t = g_n(\gamma t),\ \gamma m = \tau,\ \gamma t = T$ とし, 極限: $\gamma \to +0$ をとることにより, $g_n(T) \equiv \text{const.}\ (T \geq \tau)$ が得られる. この解は, 離散系では進行波解であるが, 連続系に移すと定数解となって形が潰れてしまう離散系特有の解と言える.

- $4L(L^{2m}+K) - \{2(L+1)(LK+1) - (L-1)(LK-1)\Delta\}L^m = 0$ の場合:

$$u_n^t = \frac{L^m(-2L^m + LK + 1) + \{-L^m(LK+1) + 2LK\}L^tK^n}{L^m(LK-1)(1 + L^tK^n)} \tag{2.1}$$

もしくは,

$$u_n^t = \frac{L^m(2L^{m+1} - LK - 1) + \{L^m(LK+1) - 2K\}L^tK^n}{L^m(LK-1)(1 + L^tK^n)} \tag{2.2}$$

この場合, 分散関係に差分パラメータ γ が含まれているため, L を K 及び γ で定まる変数と見なせる. したがって, 連続極限をとる際の L の挙動に注意する必要がある. 分散関係から, 極限: $\gamma \to +0$ をとることにより, L は 1 もしくは $1/K$ のいずれかに近づくことが従う. しかし, それぞれの解の分母に $LK - 1$ があるので, $L = 1 + \beta\gamma + O(\gamma^2)$ $(\gamma \to 0)$ となる L を

採用する．さらに, $K=e^{\alpha},\ u_n^t=g_n(\gamma t),\ \gamma m=\tau,\ \gamma t=T$ とし, 極限: $\gamma\to+0$ をとることにより, [9] で報告されている (NW) の解:

$$g_n(T)=\pm\frac{\left(\frac{\beta/2}{1-e^{-\beta\tau}}-1\right)+\left(\frac{e^{-\beta\tau}\beta/2}{1-e^{-\beta\tau}}-1\right)e^{\beta T+\alpha n}}{1+e^{\beta T+\alpha n}}. \tag{2.3}$$

が得られる．また, 分散関係にも同じ変数変換及び極限を施すと, この (NW) の解の分散関係:

$$e^{\alpha}=\frac{\beta/4+1-e^{\beta\tau}}{\beta/4-1+e^{-\beta\tau}}$$

も得られる．以下に, (NW) 及び (d–NW) の解を図示したものを挙げる．連続及び離散のそれぞれの解に対して変数変換: $h_n := 1+0.5*\log{(1+g_n)}/(1-g_n),\ h_n^t := 1+0.5*\log{(1+u_n^t)}/(1-u_n^t)$ を施したものを図示している．これらの変数変換は, 車間距離に対応する量を見るためのものである．図 1 及び図 2 では, 車間距離の小さい層が左に伝搬する様子, 即ち渋滞が左に伝搬している様子が確認できる．

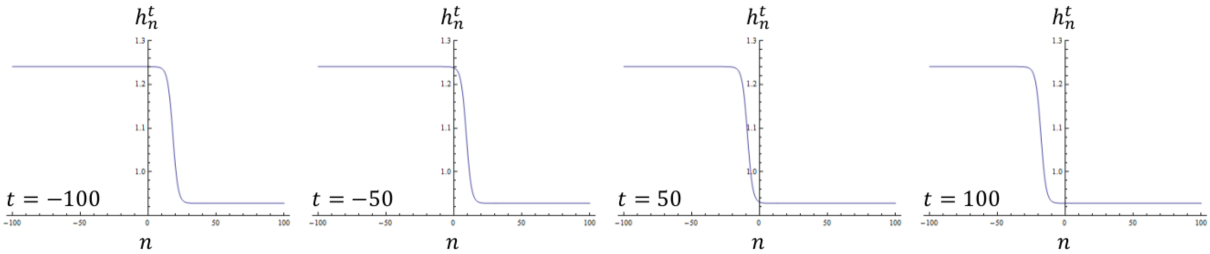

図 1: (2.1) を図示したもの $(L=1.1,\ \gamma=0.25,\ m=3)$

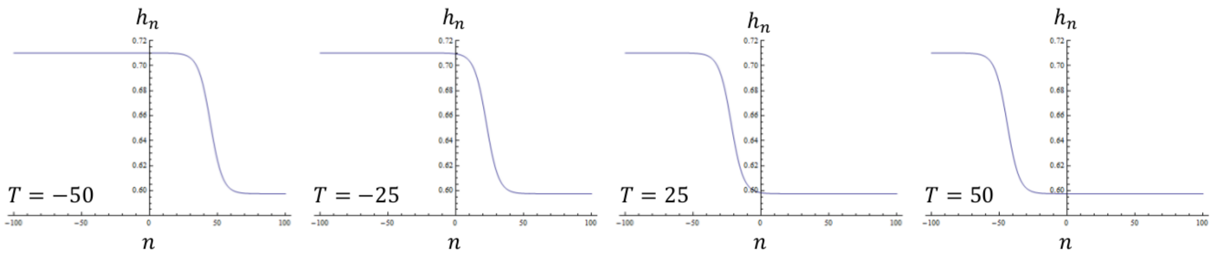

図 2: (2.3) でプラスの符号の解を図示したもの $(\beta=0.2,\ \tau=3/4)$

ところで, u_n^t は (NW) の $g_n(:=\ \tanh{(h_n-c)})$ に対応する従属変数であった． すなわち, $|u_n^t|<1$ を満たす解が, 交通流に対応したものとなっている．この解において, $|u_n^t|<1$ となるための必要十分条件は, L が $1-L+4\gamma(L-L^{-m})>0$ を満たすことである．これは, M 及び N の絶対値が 1 より小さいか否かを調べることで得られる条件である．さらに, この条件を満たす $L>1$ が存在するには, m 及び γ が

$$m>\frac{1-4\gamma}{4\gamma}$$

を満たすことが必要十分条件となる．この不等式は, 時間遅れ m が十分に大きい, すなわち, 運転手たちの反応が悪いと, ここで得られた種類の渋滞が起こりうることを示唆している．また, 連続極限をとることにより, この条件から $\tau>1/4$ という不等式が得られる．この不等式は, [9] で報告されている解 g_n の絶対値が 1 より小さくなる様な α,β が存在するための条件となっている．

3　(d–NW) の超離散化及びその解

3.1　(d–NW) の超離散化

[6, 7] を参考にして, (d–NW) に変数変換: $u_n^t = \tanh\big((H_n^t - C)/(2\varepsilon)\big)$, $\tilde{u}_n^t := \exp\big((H_n^t - C)/\varepsilon\big)$ を施し, 超離散変数 H_n^t 及び C を導入する. (d–NW) を $\tilde{u}_n^t$ で書き直すと

$$\frac{(1-4\gamma)\tilde{u}_{n+1}^{t-m+1}+1}{\tilde{u}_{n+1}^{t-m+1}+1}\tilde{u}_n^{t+1} = \frac{(1-4\gamma)\tilde{u}_n^{t-m}+1}{\tilde{u}_n^{t-m}+1}\tilde{u}_n^t \tag{3.1}$$

が得られる. ここで, $1-4\gamma > 0$ として, $1-4\gamma = \exp(-G/\varepsilon)$ とする. $1-4\gamma < 1$ であることから $G > 0$. 以上の変数変換から, (3.1) は超離散化でき,

$$\begin{aligned} &H_n^{t+1} + \max[0, H_{n+1}^{t-m+1} - C - G] - \max[0, H_{n+1}^{t-m+1} - C] \\ &\quad = H_n^t + \max[0, H_n^{t-m} - C - G] - \max[0, H_n^{t-m} - C] \end{aligned} \tag{ud–NW}$$

が得られる.

3.2　(ud–NW) の解

この小節では, 前節で示した (d–NW) の解であって分散関係が $4L(L^{2m}+K) - \{2(L+1)(LK+1) - (L-1)(LK-1)\Delta\}L^m = 0$ である (2.1) 及び (2.2) を超離散化することで (ud–NW) の解を構成する. また, この小節でも (d–NW) を超離散化する際に仮定した様に $1-4\gamma > 0$ とする. まず, (d–NW) の解 (2.1) 及び (2.2) をそれぞれ $\tilde{u}_n^t$ に対応する形に変数変換すると,

$$\frac{L^{1-m}K-1}{1-L^{-m}}\frac{1+L^{t-m}K^n}{1+L^{t-m+1}K^{n+1}}, \quad \frac{L-L^{-m}}{L^{-m}K-1}\frac{1+L^{t-m}K^{n+1}}{L+L^{t-m}K^n}$$

が得られる. 一方, 分散関係を用いると,

$$\boxed{\frac{L^{1-m}K-1}{1-L^{-m}}} = \frac{L-1}{1-L+4\gamma(L-L^{-m})}, \quad \boxed{\frac{L-L^{-m}}{L^{-m}K-1}} = \frac{L\{1-L+4\gamma(L-L^{-m})\}}{(1-4\gamma)(L-1)},$$
$$K = \frac{1-L+4\gamma L^m(L-L^{-m})}{\{1-L+4\gamma(L-L^{-m})\}L}$$

が得られる. $1-L+4\gamma(L-L^{-m}) > 0$ となるように L をとることにすると, $m > 0$, $L > 1$ 及び $0 < 1-4\gamma < 1$ から, 上記の四角で囲まれた二つの式及び K が正となり,

$$\frac{L^{1-m}K-1}{1-L^{-m}} = \exp\left(\frac{B}{\varepsilon}\right), \quad \frac{L-L^{-m}}{L^{-m}K-1} = \exp\left(\frac{B'}{\varepsilon}\right),$$

$L = \exp(Q/\varepsilon)$ 及び $K = \exp(P/\varepsilon)$ と超離散変数 B, B', Q 及び P が導入できる. また, $L > 1$ としていたことから, $Q > 0$ とする. さらに, 分散関係から以下の三つが従う.

1. 分散関係から
$$\frac{L^{1-m}K-1}{1-L^{-m}}\frac{L-L^{-m}}{L^{-m}K-1} = \frac{L}{1-4\gamma}$$
が得られ, この等式に対して超離散極限をとることによって,
$$B + B' = Q + G$$
が成り立つ.

2. $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ であるから, 分散関係より,

$$L^{m-1} + \cdots + 1 = (1-4\gamma)(L^m + \cdots + 1) + \frac{1-L^{-m}}{L^{1-m}K-1}L^m$$

が得られ, この等式を超離散化し, $m, Q > 0$ を用いると,

$$Q = \min[G, B]$$

が得られる.

3. 分散関係を

$$\frac{L^{1-m}K-1}{1-L^{-m}}L + \frac{L}{1-4\gamma} = \frac{L^{1-m}K}{1-4\gamma} + \frac{L^{1-m}K-1}{1-L^{-m}}L^{-m}$$

と変形し, この等式を超離散化して整理すると, $\max[B, G] + Q = \max[P + G + Q, B] - mQ$ が得られる. この関係式と 2. で得られた関係式及び $m, Q, G > 0$ から,

$$B = P + (1-m)Q,\ \min[G - Q, P - mQ] = 0$$

が得られる.

(2.1) 及び (2.2) を超離散化し, 前述の関係式を用いると, (ud–NW) の解について, 次の定理で纏められる.

定理

$$\begin{aligned} H_n^t &= C + (1-m)Q + P + \max[0, (t-m)Q + nP] - \max[0, (t-m+1)Q + (n+1)P] \\ H_n^t &= C + mQ - P + G + \max[0, (t-m)Q + (n+1)P] - \max[Q, (t-m)Q + nP] \end{aligned}$$

は (ud–NW) の解となる. ただし, P 及び $Q > 0$ は, 分散関係:

$$\min[G - Q, P - mQ] = 0$$

を満たす定数.

以下に, 定理で得られた解を図示したもの挙げる. 連続と離散の場合と同様に渋滞が左に伝搬する様子が確認できる.

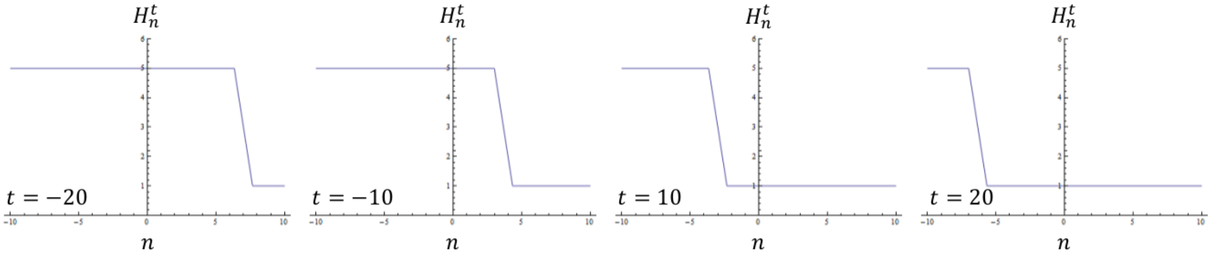

図 3: 定理の一つ目の解を図示したもの ($Q = 1,\ G = 2,\ m = 3,\ C = 4$)

4　まとめと今後の課題

本稿では, (NW) の離散化及び超離散化を行った．さらに, 得られた離散化及び超離散化は時間遅れをもつ方程式になっており, それぞれのある進行波解に対して具体形を与えた．今回得られた離散方程式 (d–NW) には恒等的に定数という解がある．この定数解の安定性を解析することで交通流において渋滞が生じるか否かについて議論できる．(d–NW) の定数解の安定性解析を今後の課題とし, さらには, (NW) と (d–NW) それぞれの定数解の安定性の対応について明らかにしていきたい．また, (1.1) と (OV) は関連が指摘されていた．これは, (1.1) の左辺を $\tau = 0$ の周りで展開し, τ の 2 次以上の項を無視することで (OV) が得られるというものである．この関連から, (d–NW) に対して何らかの極限操作を行うことで (OV) が得られると期待される．この予想から, (d–NW) と (OV) との関連についても今後の課題としたい.

謝辞

本研究は, 文部科学省の生命動態システム科学推進拠点事業/生物医学と数学の融合拠点及び JSPS 科研費 26610033 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] G. F. Newell, “Nonlinear Effects in the Dynamics of Car Following”, Oper. Res. **9**(1961) 209–229.

[2] G. B. Whitham, “Exact Solutions for a Discrete System Arising in Traffic Flow”, Proc. R. ZSoc. Lond. A Math. Phys. Sci. **428**(1990) 49–69.

[3] Y. Igarashi, K. Itoh and K. Nakanishi “Toda Lattice Solutions of Differential-Difference Equations for Dissipative Systems”, J. Phys. Soc. Jpn. **68**(1999) 791–796.

[4] K. Hasebe, A. Nakayama and Y. Sugiyama, “Exact solutions of differential equations with delay for dissipative systems”, Phys. Lett. A **259**(1999) 135–139.

[5] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma, “From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure”, Phys. Rev. Lett. **76**(1996), 3247.

[6] D. Takahashi and J. Matsukidaira, “Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation”, J. Phys. A **30**(1997) L733–L739.

[7] M. Kanai, S. Isojima, K. Nishinari and T. Tokihiro, “Ultradiscrete optimal velocity model: A cellular-automaton model for traffic flow and linear instability of high-flux traffic”, Phys. Rev. E **79**(2009) 056108.

[8] S. Tsujimoto and R. Hirota, “非線形差分方程式の保存量”, RIMS Kôkyûroku **933**(1995) 105–112.

[9] Y. Tutiya and M. Kanai, “Exact Shock Solution of a Coupled System of Delay Differential Equations: A Car-Following Model”, J. Phys. Soc. Jpn. **76**(2007) 083002.