

一般化戸田格子の超離散化

野邊, 厚
千葉大学教育学部

<https://doi.org/10.15017/1807487>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告．26A0-S2 (1), pp.1-7, 2015-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.26AO-S2
「非線形波動研究の現状 — 課題と展望を探る—」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.26AO-S2

State of arts and perspectives of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 30 - November 1, 2014

Article No. 01 (pp. 1 - 7)

一般化戸田格子の超離散化

野邊 厚 (NOBE Atsushi)

(Received 15 January 2015; accepted 7 February 2015)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2015

一般化戸田格子の超離散化

野邊 厚

ATSUSHI NOBE

千葉大学教育学部

概要

[1] にはじまる Lie 代数を用いた戸田格子の一般化は、有限次元 Lie 代数の系列（戸田分子の一般化）とアフィン Lie 代数の系列（周期戸田格子の一般化）についてよく研究されている．本稿では、Lie 代数による一般化戸田格子のうち、とくに分岐しない Dynkin 図をもつアフィン Lie 代数（ $A_{N-1}^{(1)}$, $A_{2N}^{(2)}$, $C_N^{(1)}$, $D_{N+1}^{(2)}$ 型）に付随するものは周期戸田格子の部分力学系として実現可能であることを示す．このような性質は離散化・超離散化においても保たれる．

1 Lie 代数と戸田格子

$\bar{\mathfrak{g}}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元単純 Lie 代数とする． Δ を $\bar{\mathfrak{g}}$ の Dynkin 図とし、 Δ の自己同型群を $\text{Aut}(\Delta)$ とする．このとき、 $\text{Int}(\bar{\mathfrak{g}})$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ の内部自己同型群として、 $\text{Aut}(\bar{\mathfrak{g}})/\text{Int}(\bar{\mathfrak{g}}) \simeq \text{Aut}(\Delta)$ が成り立つ [3]． $\sigma \in \text{Aut}(\Delta)$ に対応する、 $\text{Aut}(\bar{\mathfrak{g}})$ の $\text{Int}(\bar{\mathfrak{g}})$ に関する共役類を K_σ とおく．

定義 1 $\theta \in K_\sigma$ で次をみたすものを $(\bar{\mathfrak{g}}, \sigma)$ の Coxeter 自己同型とよぶ [4]：

1. $\bar{\mathfrak{g}}^\theta := \{x \in \bar{\mathfrak{g}} \mid \theta(x) = x\}$ は $\bar{\mathfrak{g}}$ の可換部分代数．
2. θ は $\bar{\mathfrak{g}}^{\theta'}$ が可換であるような自己同型 θ' の中で最小位数をもつ．

Coxeter 自己同型 θ の位数を m とする．分岐しない Dynkin 図をもつアフィン Lie 代数（ $A_{N-1}^{(1)}$, $A_{2N}^{(2)}$, $C_N^{(1)}$, $D_{N+1}^{(2)}$ 型）の場合、Coxeter 自己同型の位数は表 1 のようになることが知られている [5]：

表 1: The order m of the Coxeter automorphism θ of $(\bar{\mathfrak{g}}, \sigma)$.

Type $\bar{\mathfrak{g}}^{(r)}$ ($\sigma^r = 1$)	$A_{N-1}^{(1)}$	$A_{2N}^{(2)}$	$C_N^{(1)}$	$D_{N+1}^{(2)}$
Order m of θ	N	$4N + 2$	$2N$	$2N + 2$

$\omega = \exp(2\pi i/m)$ とし、 θ の固有空間を $\bar{\mathfrak{g}}_j$ で表す：

$$\bar{\mathfrak{g}}_j := \{u \in \bar{\mathfrak{g}} \mid \theta(u) = \omega^j u\}$$

とくに $\mathfrak{a} := \bar{\mathfrak{g}}_0 = \bar{\mathfrak{g}}^\theta$ とおくと、定義から $\mathfrak{a}$ は $\bar{\mathfrak{g}}$ の可換部分代数である．任意の $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対し

$$\bar{\mathfrak{g}}_j^\alpha := \{u \in \bar{\mathfrak{g}}_j \mid [H, u] = \alpha(H)u, \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

とおく．このとき $\bar{\mathfrak{g}}_j = \bigoplus_\alpha \bar{\mathfrak{g}}_j^\alpha$ であり、 $\dim \bar{\mathfrak{g}}_j^\alpha \leq 1$ が $\alpha \neq 0$ について成り立つ．よって、 $\bar{\mathfrak{g}}_1^\alpha$ は E_α で張られるとし、 $\Phi := \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \mid \bar{\mathfrak{g}}_1^\alpha = \langle E_\alpha \rangle \neq 0\}$ とおく． $s = \dim \mathfrak{a}$ とすると、 $\#\Phi = s + 1$ かつ $0 \notin \Phi$ である．また、 $\bar{\mathfrak{g}}$ の内積の不変性より、 $\bar{\mathfrak{g}}_{-1} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \bar{\mathfrak{g}}_{-1}^{-\alpha}$ が成り立つ． $\bar{\mathfrak{g}}_{-1}^{-\alpha} = \langle E_{-\alpha} \rangle$ とする．

ここで、ループ代数 $\mathfrak{g}$ を $\bar{\mathfrak{g}}$ 係数 Laurent 多項式の Lie 代数として導入する：

$$\mathfrak{g} := \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda^k u_k \mid u_k \in \bar{\mathfrak{g}}, \theta(u_k) = \omega^k u_k \right\}$$

$\mathfrak{g}_k := \lambda^k \bar{\mathfrak{g}}_{k(\bmod m)}$ とおくと、 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$ が成り立つ。ループ代数 $\mathfrak{g}$ はアフィン Lie 代数 $\bar{\mathfrak{g}}^{(r)}$ ($\sigma^r = 1$) となる。

いま、 $Q = Q(t)$, $P = P(t)$ を $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ の元とする。 $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ 上の微分方程式

$$\begin{cases} \dot{Q} = P, \\ \dot{P} = - \sum_{\alpha \in \Phi} e^{\alpha(Q)} [E_\alpha, E_{-\alpha}] \end{cases} \quad (1)$$

を一般化戸田格子とよぶ [2]。ここで

$$T := P + \lambda \sum_{\alpha \in \Phi} E_\alpha + \frac{1}{\lambda} \sum_{\alpha \in \Phi} e^{\alpha(Q)} E_{-\alpha}, \quad (2)$$

$$\mathcal{A}_+ := P + \lambda \sum_{\alpha \in \Phi} E_\alpha \quad (3)$$

とおく。 $\alpha \neq -\beta$ ならば $[E_\alpha, E_\beta] = 0$ および $P \in \mathfrak{a}$ に注意すると次を得る：

$$[T, \mathcal{A}_+] = \sum_{\alpha \in \Phi} e^{\alpha(Q)} [E_{-\alpha}, E_\alpha] + \frac{1}{\lambda} \sum_{\alpha \in \Phi} e^{\alpha(Q)} \alpha(P) E_{-\alpha}$$

したがって、(1) の Lax 形式は次で与えられる：

$$\dot{T} = [T, \mathcal{A}_+] \quad (4)$$

Lax 行列 T の固有多項式 $\det(T + \mu I)$ がスペクトル曲線を定義し、その係数が保存量を与える。

例 1 $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{gl}_N$ とすると、 $\bar{\mathfrak{g}}$ は (非単純) A_{N-1} 型 Lie 代数である。 A_{N-1} 型 Dynkin 図 Δ の位数 1 の自己同型 (恒等変換) を考えると、 $\mathfrak{g}$ は $A_{N-1}^{(1)}$ 型アフィン Lie 代数となる。対応する Coxeter 自己同型 θ は位数 N であり (表 1)、次のような実現をもつ [5]：

$$\theta(u) = \Omega u \Omega^{-1}, \quad \Omega := \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1}), \quad \omega = \exp \frac{2\pi i}{N}$$

$u = (u_{ij}) \in \mathfrak{gl}_N$ とすれば

$$\theta(u) = (\omega^{i-j} u_{ij}) = \begin{bmatrix} \omega^0 u_{1,1} & \omega^{-1} u_{1,2} & \cdots & \omega^{1-N} u_{1,N} \\ \omega^1 u_{2,1} & \omega^0 u_{2,2} & \cdots & \omega^{2-N} u_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{N-1} u_{N,1} & \omega^{N-2} u_{N,2} & \cdots & \omega^0 u_{N,N} \end{bmatrix}$$

であり、 $\mathfrak{a} = \{u \in \bar{\mathfrak{g}} \mid \theta(u) = u\}$ は対角行列全体のなす $\bar{\mathfrak{g}}$ の部分空間、すなわち $\bar{\mathfrak{g}}$ の Cartan 部分代数 $\bar{\mathfrak{h}}$ である。また、 E_{ij} を行列単位として

$$\bar{\mathfrak{g}}_1 = \{u \in \bar{\mathfrak{g}} \mid \theta(u) = \omega u\} = \langle E_{2,1}, E_{3,2}, \dots, E_{N,N-1}, E_{1,N} \rangle$$

が成り立つ。 $Q \in \mathfrak{a}$ とすると、 $Q = \sum_{l=1}^N q_l E_{l,l}$ より

$$[Q, E_{k+1,k}] = \sum_{l=1}^N q_l [E_{l,l}, E_{k+1,k}] = (q_{k+1} - q_k) E_{k+1,k} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1),$$

$$[Q, E_{1,N}] = (q_1 - q_N) E_{1,N}$$

である。よって、 $\Phi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}\}$ および以下を得る：

$$\begin{aligned} \alpha_0(Q) &= q_1 - q_N, & \alpha_k(Q) &= q_{k+1} - q_k & (k = 1, 2, \dots, N-1), \\ E_{\alpha_0} &= E_{1,N}, & E_{\alpha_k} &= E_{k+1,k} & (k = 1, 2, \dots, N-1), \\ E_{-\alpha_0} &= E_{N,1}, & E_{-\alpha_k} &= E_{k,k+1} & (k = 1, 2, \dots, N-1) \end{aligned}$$

このとき、(1) は周期戸田格子方程式になる：

$$\begin{cases} \dot{q}_k = p_k, \\ \dot{p}_k = e^{q_{k+1}-q_k} - e^{q_k-q_{k-1}} & (k = 1, 2, \dots, N), \\ q_0 = q_N, \quad q_{N+1} = q_1 \end{cases} \quad (5)$$

また、Lax 行列は次のようになる：

$$T = \begin{bmatrix} I_1 & V_1/\lambda & & \lambda \\ \lambda & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & V_{N-1}/\lambda \\ V_N/\lambda & & \lambda & I_N \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_+ = \begin{bmatrix} I_1 & & & \lambda \\ \lambda & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & I_N \end{bmatrix}$$

ただし、 $I_k := p_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$), $V_k := e^{q_{k+1}-q_k}$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$), $V_N := e^{q_1-q_N}$ とおいた。(4) より、(5) と等価な次式を得る [6]：

$$\begin{cases} (\log \dot{V}_k) = I_{k+1} - I_k, \\ \dot{I}_k = V_k - V_{k-1} & (k = 1, 2, \dots, N), \\ V_0 = V_N, \quad I_{N+1} = I_1 \end{cases} \quad (6)$$

□

例 2 $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}_{2N+1}$ とすると、 $\bar{\mathfrak{g}}$ は A_{2N} 型 Lie 代数である。 A_{2N} 型 Dynkin 図 Δ の位数 2 の自己同型 σ を考えると (図 1), $\mathfrak{g}$ は $A_{2N}^{(2)}$ 型アフィン Lie 代数となる。対応する Coxeter 自己同型 θ は位数 $4N+2$ であり (表

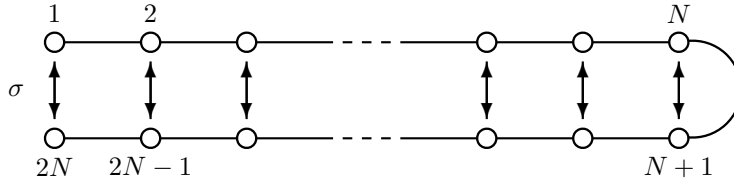


図 1: The Dynkin automorphism σ of order 2.

1), 次のような実現をもつ [5]：

$$\begin{aligned} \theta(u) &= -\Theta^t u \Theta^{-1}, & \Theta &:= \text{diag} (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{2N}) S_{2N+1}, \\ S_{2N+1} &:= (\delta_{j, 2N-k+2})_{1 \leq j, k \leq 2N+1}, & \omega &= \exp \frac{2\pi i}{4N+2} \end{aligned}$$

$u = (u_{ij}) \in \mathfrak{sl}_{2N+1}$ とすれば

$$\theta(u) = -(\omega^{i-j} u_{2N+2-j, 2N+2-i}) = - \begin{bmatrix} \omega^0 u_{2N+1, 2N+1} & \omega^{-1} u_{2N, 2N+1} & \cdots & \omega^{-2N} u_{1, 2N+1} \\ \omega^1 u_{2N+1, 2N} & \omega^0 u_{2N, 2N} & \cdots & \omega^{1-2N} u_{1, 2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{2N} u_{2N+1, 1} & \omega^{2N-1} u_{2N, 1} & \cdots & \omega^0 u_{1, 1} \end{bmatrix}$$

であり, $\mathfrak{a}$ は B_N 型 Lie 代数 $\mathfrak{so}_{2N+1}$ の Cartan 部分代数と一致する. したがって, 行, 列の番号付けを $1, 2, \dots, N, 0, -N, \dots, -2, -1$ とすると, $Q \in \mathfrak{a}$ は次のように表される:

$$Q = \sum_{k=1}^N q_k (E_{k,k} - E_{-k,-k})$$

また, $\omega^{2N+2} = -\omega$ に注意すると

$$\bar{\mathfrak{g}}_1 = \langle E_{2,1} - E_{-1,-2}, E_{3,2} - E_{-2,-3}, \dots, E_{N,N-1} - E_{-N+1,-N}, E_{0,N} - E_{-N,0}, E_{1,-1} \rangle$$

が分かる. 例 1 と同様にして, $\Phi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ および以下を得る:

$$\begin{aligned} \alpha_0(Q) &= 2q_1, & \alpha_k(Q) &= q_{k+1} - q_k & (k = 1, 2, \dots, N-1), & \alpha_N(Q) &= -q_N, \\ E_{\alpha_0} &= E_{1,-1}, & E_{\alpha_k} &= E_{k+1,k} - E_{-k,-k-1} & (k = 1, 2, \dots, N-1), & E_{\alpha_N} &= E_{0,N} - E_{-N,0}, \\ E_{-\alpha_0} &= E_{-1,1}, & E_{-\alpha_k} &= E_{k,k+1} - E_{-k-1,-k} & (k = 1, 2, \dots, N-1), & E_{-\alpha_N} &= E_{N,0} - E_{0,-N} \end{aligned}$$

このとき, (1) は例 1 の (5) において境界条件を $q_0 = -q_1$, $q_{N+1} = 0$ と変更したものになる. $\square$

Lax 形式の対称性を利用すると, $A_{2N}^{(2)}$ 型の戸田格子を $A_{2N}^{(1)}$ 型の戸田格子の部分力学系として実現することができる. 次のように $I_1, \dots, I_{2N+1}$, $V_1, \dots, V_{2N+1}$ を定める:

$$\begin{aligned} I_k &:= p_k, \quad I_{2N+2-k} := -I_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad I_{N+1} := 0, \\ V_k &:= e^{q_{k+1} - q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1), \quad V_N := e^{-q_N}, \\ V_{2N+1-k} &:= V_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad V_{2N+1} := e^{2q_1} \end{aligned}$$

このとき, $A_{2N}^{(2)}$ 型の Lax 行列 T および $\mathcal{A}_+$ は $A_{2N}^{(1)}$ 型の T および $\mathcal{A}_+$ において, $N+1$ 行目以降かつ $N+1$ 列目以降の λ をそれぞれ $-\lambda$ に置き換えたものになる (T のみ示す. $\mathcal{A}_+$ も同様.):

$$T = \begin{bmatrix} I_1 & V_1/\lambda & & & & \lambda \\ \lambda & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & I_{N+1} & -V_{N+1}/\lambda & & \\ & & -\lambda & I_{N+2} & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -V_{2N}/\lambda \\ V_{2N+1}/\lambda & & & & -\lambda & I_{2N+1} \end{bmatrix}$$

$A_{2N}^{(2)}$ 型の T および $\mathcal{A}_+$ は $A_{2N}^{(1)}$ 型の Lax 行列と等価な行列に同じ基本変形でそれぞれ変換されるので, Lax 形式 (4) は $A_{2N}^{(1)}$ 型 ((6) で $N \rightarrow 2N+1$ としたもの) となる. ただし, 変数のとり方から自然に定まる次の拘束条件を満たさなければならない:

$$\begin{cases} I_{2N+2-k} + I_k = 0 & (k = 1, 2, \dots, N+1), \\ V_{2N+1-k} - V_k = 0 & (k = 1, 2, \dots, N), \\ \prod_{k=1}^{2N+1} V_k = 1 \end{cases} \quad (7)$$

これらの条件式の左辺は保存量なので, $A_{2N}^{(1)}$ 型戸田格子に初期条件として (7) を課したものが $A_{2N}^{(2)}$ 型戸田格子に他ならない.

一般に, $A_{2N}^{(2)}$ 型戸田格子はシステムサイズ N の周期戸田格子 ($A_{N-1}^{(1)}$ 型) の境界条件を変更したものと見なされる. しかし, 上のような変数のとり方をすると, システムサイズ $2N+1$ の周期戸田格子 ($A_{2N}^{(1)}$ 型) に

において、境界条件は変更せず初期条件を制限したものと解釈することもできる。このように解釈すると、戸田格子のアフィン Lie 代数による一般化は、幾何学的には、周期戸田格子のスペクトル曲線の族において、より高種数かつ対称性の高い曲線上での加法の定める力学系を考えることに他ならない¹。この対称性を与えるのが拘束条件としての保存量 (7) である。すなわち、種数 $2N$ の超楕円曲線に $2N + 1$ 個の保存量の定める対称性を仮定し、適切な加法を定めたものが $A_{2N}^{(1)}$ 型戸田格子であり、さらに、 $N + 1$ 個の保存量の定める対称性を課すことで $A_{2N}^{(2)}$ 型戸田格子が導かれる。紙幅の都合上詳細は省くが、 $C_N^{(1)}$ 型および $D_{N+1}^{(2)}$ 型戸田格子についても、同様に、それぞれ $A_{2N-1}^{(1)}$ 型および $A_{2N+1}^{(1)}$ 型戸田格子の部分力学系として実現可能である。それぞれの場合の拘束条件は次のようになる：

$$C_N^{(1)} \begin{cases} I_{2N+1-k} + I_k = 0 & (k = 1, 2, \dots, N), \\ V_{2N-k} - V_k = 0 & (k = 1, 2, \dots, N-1), \\ \prod_{k=1}^{2N} V_k = 1 \end{cases}$$

$$D_{N+1}^{(2)} \begin{cases} I_{2N+2-k} + I_k = 0 & (k = 1, 2, \dots, N+1), \quad I_{2N+2} = 0, \\ V_{2N+1-k} - V_k = 0 & (k = 1, 2, \dots, N), \quad V_{2N+1} - V_{2N+2} = 0, \\ \prod_{k=1}^{2N+2} V_k = 1 \end{cases}$$

また、このような性質は離散化・超離散化においても保たれる。

2 離散化

$\mathfrak{g}$ を $A_{N-1}^{(1)}$, $A_{2N}^{(2)}$, $C_N^{(1)}$, $D_{N+1}^{(2)}$ 型アフィン Lie 代数とする。 $Q = Q(t)$, $P = P(t)$ を $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ の元とする。 $h > 0$ に対し、 $\bar{P} := P(t+h)$, $\bar{Q} := Q(t+h)$ とおく。差分方程式

$$\begin{cases} \bar{Q} - Q = h\bar{P}, \\ e^{h\bar{P}-hP} = \frac{I + h^2 \sum_{\alpha \in \Phi} e^{\alpha(Q)} E_{-\alpha} E_{\alpha}}{I + h^2 \sum_{\alpha \in \Phi} e^{\alpha(Q)} E_{\alpha} E_{-\alpha}} \end{cases} \quad (8)$$

を一般化戸田格子の離散化とよぶ [2]。

$$L := e^{hP} + h\lambda \sum_{\alpha \in \Phi} E_{\alpha} = I + h\mathcal{A}_+ + \frac{P^2}{2}h^2 + o(h^2),$$

$$M := I - \frac{h}{\lambda} e^{hP} \sum_{\alpha \in \Phi} e^{\alpha(Q)} E_{-\alpha} = I - h(T - \mathcal{A}_+) - \frac{h^2}{\lambda} P \sum_{\alpha \in \Phi} e^{\alpha(Q)} E_{-\alpha} + o(h^2)$$

とおくと、Lax 形式は次で与えられる：

$$M\bar{L} = L\bar{M} \quad (9)$$

実際、 $\bar{L}$, $\bar{M}$ の $h = 0$ 周りでの Taylor 展開

$$\bar{L} = I + h\mathcal{A}_+ + \left(\frac{P^2}{2} + \dot{\mathcal{A}}_+ \right) h^2 + o(h^2),$$

$$\bar{M} = I - h(T - \mathcal{A}_+) - \left(\frac{P}{\lambda} \sum_{\alpha \in \Phi} e^{\alpha(Q)} E_{-\alpha} + \dot{T} - \dot{\mathcal{A}}_+ \right) h^2 + o(h^2)$$

¹このように解釈すると、一般化により Lax 行列のサイズ（すなわち、スペクトル曲線の種数）が大きくなることも自然に理解できる。

より

$$\begin{aligned} M\bar{L} &= I - h(T - 2\mathcal{A}_+) + \left(\frac{P^2}{2} - \frac{P}{\lambda} \sum_{\alpha \in \Phi} e^{\alpha(Q)} E_{-\alpha} + \dot{\mathcal{A}}_+ - (T - \mathcal{A}_+) \mathcal{A}_+ \right) h^2 + o(h^2), \\ L\bar{M} &= I - h(T - 2\mathcal{A}_+) + \left(\frac{P^2}{2} - \frac{P}{\lambda} \sum_{\alpha \in \Phi} e^{\alpha(Q)} E_{-\alpha} + \dot{\mathcal{A}}_+ - \dot{T} - \mathcal{A}_+ (T - \mathcal{A}_+) \right) h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

したがって、次を得る：

$$M\bar{L} - L\bar{M} = \left(\dot{T} - [T, \mathcal{A}_+] \right) h^2 + o(h^2)$$

離散 Lax 行列 L, M より定まる行列 LM^{-1} の固有多項式 $\det(L + \mu M)$ がスペクトル曲線を定義し、その係数が保存量を与える。

例 3 例 1 と同様に、 $\mathfrak{g}$ を $A_{N-1}^{(1)}$ 型アフィン Lie 代数とする。このとき、(8) は周期境界をもつ離散戸田格子となる：

$$\begin{cases} \bar{q}_k - q_k = h\bar{p}_k, \\ h\bar{p}_k - hp_k = \log \frac{1 + h^2 e^{q_{k+1} - q_k}}{1 + h^2 e^{q_k - q_{k-1}}} \quad (k = 1, 2, \dots, N), \\ q_0 = q_N, \quad q_{N+1} = q_1 \end{cases} \quad (10)$$

また、 $I_k := e^{hp_k}$, $V_k := h^2 e^{hp_k + q_{k+1} - q_k}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) , $\zeta := h\lambda$ とおくと、離散 Lax 行列は次のようになる：

$$L = \begin{bmatrix} I_1 & & & \zeta \\ \zeta & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \zeta & I_N \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -V_1/\zeta & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -V_{N-1}/\zeta \\ -V_N/\zeta & & & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

(9) より、(10) と等価な次式を得る：

$$\begin{cases} \bar{I}_k = \frac{I_k + V_k}{I_{k-1} + V_{k-1}} I_{k-1}, \\ \bar{V}_k = \frac{I_{k+1} + V_{k+1}}{I_k + V_k} I_k \\ I_0 = I_N, \quad I_{N+1} = I_1, \quad V_0 = V_N, \quad V_{N+1} = V_1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (12)$$

□

例 4 例 2 に倣って、 $\mathfrak{g}$ を $A_{2N}^{(2)}$ 型アフィン Lie 代数とすると、連続時間の場合と同様に、(8) は (10) の境界条件を $q_0 = -q_1$, $q_{N+1} = 0$ に置き換えたものになる。また、Lax 形式を利用して $A_{2N}^{(1)}$ 型離散戸田格子に下のような拘束条件を課したものとして実現することも可能である：

$$\begin{cases} I_{2N+2-k} I_k = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, N+1), \\ \frac{V_k}{V_{2N+1-k}} - I_k I_{k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N), \\ \prod_{k=1}^{2N+1} V_k = h^{2(2N+1)} \end{cases} \quad (13)$$

これらの左辺も保存量となるので、 $A_{2N}^{(1)}$ 型離散戸田格子に初期条件として (13) を課したものが $A_{2N}^{(2)}$ 型離散戸田格子に他ならない。 □

3 超離散化

$A_{N-1}^{(1)}$ 型離散戸田格子 (10), (12) は subtraction-free なので超離散化可能である．実際, (10) において, $u_k := \epsilon(q_{k+1} - q_k)$ とおき, $\epsilon \rightarrow 0$ とすると, 周期境界をもつ戸田型セルオートマトン [7] が得られる:

$$\begin{cases} \bar{u}_k - 2u_k + \underline{u}_k = \lceil u_{k-1}, \ell \rceil - 2 \lceil u_k, \ell \rceil + \lceil u_{k+1}, \ell \rceil & (k = 1, 2, \dots, N), \\ u_0 = u_N, u_{N+1} = u_1 \end{cases} \quad (14)$$

ただし, $\underline{u}_k := u_k(t - h)$, $\lceil \cdot \rceil := \max(\cdot)$ であり, $h^2 = e^{-\ell/\epsilon}/(1 - e^{-\ell/\epsilon})$ とおいた.

一方, (12) において, $I_k := e^{-J_k/\epsilon}$, $V_k := e^{-W_k/\epsilon}$ とおき, $\epsilon \rightarrow 0$ とすると次を得る:

$$\begin{cases} \bar{J}_k = \lfloor J_k, W_k \rfloor + J_{k-1} - \lfloor J_{k-1}, W_{k-1} \rfloor, \\ \bar{W}_k = \lfloor J_{k+1}, W_{k+1} \rfloor + W_k - \lfloor J_k, W_k \rfloor & (k = 1, 2, \dots, N), \\ J_0 = J_N, J_{N+1} = J_1, W_0 = W_N, W_{N+1} = W_1 \end{cases} \quad (15)$$

ただし, $\lfloor \cdot \rfloor := \min(\cdot)$ である. J_k を玉の入った箱の連続する個数, W_k を空き箱の連続する個数とし, これらを交互に並べた初期状態を考える. (15) によりその時間発展を与えると, 箱と玉を使った戸田型セルオートマトンの実現が得られる². (14), (15) を $A_{N-1}^{(1)}$ 型超離散戸田格子とよぶこともある.

また, $A_{N-1}^{(1)}$ 型離散戸田格子のスペクトル曲線のトロピカル化が $A_{N-1}^{(1)}$ 型超離散戸田格子のスペクトル曲線を与え, その係数が保存量となる. さらに, $A_{2N}^{(2)}$ 型離散戸田格子を $A_{2N}^{(1)}$ 型として実現する際の拘束条件 (13) も超離散化可能である³:

$$\begin{cases} J_{2N+2-k} + J_k = 0 & (k = 1, 2, \dots, N+1), \\ W_k - W_{2N+1-k} - J_k - J_{k+1} = 0 & (k = 1, 2, \dots, N), \\ \sum_{k=1}^{2N+1} W_k = (2N+1)\ell \end{cases} \quad (16)$$

したがって, 種数 $2N$ のトロピカル超楕円曲線に $2N+1$ 個の保存量の定める対称性を仮定し, 適切な加法を定めたものが $A_{2N}^{(1)}$ 超離散戸田格子であり, さらに, $N+1$ 個の保存量の定める対称性を課すことで $A_{2N}^{(2)}$ 型超離散戸田格子が導かれる. 他のアフィン Lie 代数 ($C_N^{(1)}$, $D_{N+1}^{(2)}$ 型) に付随する超離散戸田格子についても同様である.

参考文献

- [1] Bogoyavlensky, O I, *Commn. Math. Phys.* **51** (1976) 201.
- [2] Suris, Y B, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Birkhäuser (Basel, Switzerland) (2003).
- [3] Fulton, W and Harris, J, *Representation Theory A First Course*, Springer (New York, USA) (1991).
- [4] Kats, V G, *Funct. Anal. Appl.* **3** (1969) 252.
- [5] Belavin, A A and Drinfel'd, V G, *Funct. Anal. Appl.* **16** (1982) 159.
- [6] Hirota, R, *J. Phys. Soc. Japan* **43** (1977) 2074.
- [7] Takahashi, D and Matsukidaira, J, *Phys. Lett. A*, **209** (1995) 184.

² 離散 2 次元戸田格子からのリダクションが異なるため, いわゆる周期箱玉系とは異なる系である.

³ $A_{2N}^{(1)}$ 型超離散戸田格子に拘束条件 (16) を課すことで $A_{2N}^{(2)}$ 型超離散戸田格子を実現できる.