

Analyses of Deterministic Processes Analogous to Finite Markov Chains

白髪, 丈晴

<https://doi.org/10.15017/1807055>

出版情報：九州大学, 2016, 博士（工学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

氏 名 : 白髪 丈晴

論 文 名 : Analyses of Deterministic Processes Analogous to Finite Markov Chains (有限マルコフ連鎖に類似する決定性過程の解析)

区 分 : 甲

論 文 内 容 の 要 旨

マルコフ連鎖(ランダムウォーク)は数理モデリングや解析技法として、理論計算機科学を含む多くの分野で用いられている単純かつ重要な確率過程である。例えば、ランダムウォークはその簡素さ、局所性、構造の変化に対する耐故障性からネットワーク探索への有望なアプローチとして研究が進んでおり、マルコフ連鎖モンテカルロ法(MCMC 法)は乱択近似数え上げアルゴリズム設計の汎用手法として確立されている。これらの乱択アルゴリズムの性能はマルコフ連鎖の混交時間、全訪問時間といった特徴量に依存している。これまでに多くのこれらの特徴量の解析手法が開発され、確率的計算理論の基礎をなしている。

近年、ランダムウォークの代替として、決定性ランダムウォーク (deterministic random walk) と呼ばれるマルコフ連鎖を類似する決定性過程について、ネットワークの決定的探索、物理現象の決定的シミュレーションなど複数の文脈で研究が為されている。特に、ローターモデルと呼ばれる単純ランダムウォークに対応する決定性ランダムウォークについて研究が進んでおり、超立方体、整数格子、正則グラフなどの上でその混交性、全訪問時間の解析が与えられている。しかし、マルコフ連鎖に対し為されてきた多くの研究に比べると、決定性ランダムウォークの研究はまだ黎明期である。例えば、単純ランダムウォークを超えた一般の遷移確率に対応する決定性過程に関する研究は殆ど為されていない。確率的計算と決定性計算の計算能力の差の解明は理論計算機科学における重要な課題であるが、分かっていることは少ない。

本論文では確率的計算と決定性計算のギャップ解明を目指し、決定性ランダムウォーク解析の一般的な枠組み構築を行う。具体的には、一般の有限マルコフ連鎖に対応する決定性ランダムウォークの混交性と全訪問時間の解析を行い、本質的に大きく以下の 3 つの結果を与える。

まず、マルコフ連鎖によるトークンの期待配置と、対応する決定性ランダムウォークにおけるトークン配置の単一頂点誤差の解析を行う。そして、解析において重要な役割を果たす“局所誤差”を最小化する SRT ルーターモデルと呼ぶ決定性ランダムウォークを設計し、任意の可逆かつエルゴード的なマルコフ連鎖と SRT ルーターモデルに対し単一頂点誤差の上界 $O((\pi_{\max}/\pi_{\min})\Delta t_{\text{mix}})$ を導出する。ここで t_{mix} は混交時間、 π_{\max} 、 π_{\min} はそれぞれ定常分布の最大値と最小値、 Δ は状態遷移図の最大次数を表す。この上界はトークン数に依存せず、従ってトークン数を増やすことで SRT ルーターモデルによりマルコフ連鎖の分布を上手く模倣出来ることを示唆している。またこの上界は、未解決であった多項式時間収束するマルコフ連鎖と対応する決定性過程との単一頂点誤差の多項式サイズ上界について肯定的な解決を与えるものである。

次に、MCMC 法の脱乱択化を動機として、MCMC 法に基づく乱択アルゴリズム設計において重要な指標である、総変動誤差の解析を与える。まず、任意のエルゴード的なマルコフ連鎖と決定性ラ

ランダムウォークの総変動誤差に対する初の上界 $O(mt_{\text{mix}})$ を与える。ここで m はマルコフ連鎖の状態遷移図の枝数を表す。この上界は枝数に依存する代わりに定常分布に依存せず、また既存の誤差の解析と異なり可逆性を仮定しない。一方、総変動誤差の下界として、定常分布が一様分布となるマルコフ連鎖と任意の決定性過程に対し、下界が $\Omega(n)$ となるトークン数が存在することを示す。ここで n はマルコフ連鎖の状態数を表す。即ち、状態数が入力の指数サイズ程度となる構造に対し、MCMC法の脱乱択化には対象の構造活用の必要性があることを示唆している。

最後に、上記の解析が位相平均にあたるトークン分布の解析であるのに対し、時間平均に当たる訪問頻度の誤差の解析を与える。この解析は複数トークンに対して上界を与えており、単数トークンのみに対応していた既存研究を一般化している。具体的には、任意の可逆かつエルゴード的なマルコフ連鎖とSRTルーターモデルに対し訪問頻度の誤差 $O((\pi_{\text{max}}/\pi_{\text{min}})\Delta t_{\text{mix}})$ を導出する。この解析手法を応用することで、可逆マルコフ連鎖に対応する決定性ランダムウォークの全訪問時間の上界が得られる。この上界は k トークンのロータールーターモデルの全訪問時間の上界 $T_{\text{cov}}^{(k)} = O(t_{\text{mix}} + (mt_{\text{mix}}/k))$ を与え、これは非正則グラフに対し既存研究を改善している。さらにこの成果からエキスパンダーグラフ上のロータールーターモデルに対し、 k トークンによる高速化比 $T_{\text{cov}}^{(1)}/T_{\text{cov}}^{(k)} = \Theta(k)$ が示され、これはエキスパンダーグラフ上の単純ランダムウォークの高速化比と同様の成果であり、決定性過程により確率過程と遜色ない高速化が実現出来る例を示している。