九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

音響振動連成場の高精度数値解析と膜鳴楽器への応用

荒木, 陽三

https://doi.org/10.15017/1807039

出版情報：九州大学, 2016, 博士（芸術工学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

音響振動連成場の高精度数値解析と膜鳴楽器への応用

High-accuracy numerical analysis of vibro-acoustic fields and its application to membranophones

荒木 陽三
Yozo Araki

2017 年 3 月

目次

第 1 章　序論 1
1.1　背景 . . . 1
1.2　本研究の目的 . . . 5
1.3　本論文の構成 . . . 6
1.4　提案解析手法の評価方法 . . . 9

第 2 章　微分方程式の数値解法 11
2.1　有限要素法 . . . 11
2.1.1　Lagrange 方程式による定式化 . . . 11
2.1.2　内挿関数 . . . 14
2.2　境界要素法 . . . 17
2.2.1　境界積分方程式 . . . 17
2.2.2　境界の離散化 . . . 19
2.3　スペクトル法 . . . 20
2.3.1　Spectral Collocation Method . . . 20
2.3.2　Spectral Nodal Galerkin Method . . . 24
2.3.3　二次元空間への拡張 . . . 26

第 3 章　理論解析解と法線方向微分型境界要素法による膜鳴楽器の音響振動連成解析および設計 31
3.1　提案解析手法 . . . 32
3.1.1　理論解析解による円形膜振動場の解析 . . . 32
3.1.2　法線方向微分型境界要素法による音場の解析 . . . 33
3.1.3　音響振動場の連成解析 . . . 37
3.2　実測結果との比較 . . . 39
3.2.1　計算条件と測定方法 . . . 39
3.2.2　計算結果と考察 . . . 41
3.3　提案手法を用いた膜鳴楽器の設計 . . . 44
3.3.1　評価関数の定義 . . . 44
3.3.2　計算条件 . . . 44
3.3.3　計算結果と考察 . . . 45

3.4 まとめ 49

第 4 章 スペクトル法による張力を有する円形薄板振動場の解析 53
4.1 提案解析手法 53
4.1.1 張力を有する円形薄板振動場の振動方程式 53
4.1.2 半径方向の離散化 55
4.1.3 境界条件と補間多項式 57
4.2 数値計算例 59
4.2.1 張力を有する円形薄板の固有値問題 59
4.2.2 円形膜の強制振動問題 63
4.2.3 張力を有する円形薄板の強制振動問題 65
4.2.4 演算量 66
4.3 まとめ 66

第 5 章 スペクトル法による円筒シェル振動場の解析 73
5.1 提案解析手法 74
5.1.1 円筒シェル振動場の振動方程式 74
5.1.2 Hermite 補間型微分マトリクスの導出 76
5.1.3 Spectral Collocation Method による解析 78
5.1.4 Spectral Nodal Galerkin Method による解析 81
5.2 数値計算例 85
5.2.1 単純支持された円筒シェルの固有値問題 85
5.2.2 単純支持された円筒シェルの強制振動問題 88
5.2.3 完全固定された円筒シェルの強制振動問題 90
5.3 まとめ 90

第 6 章 スペクトル法による軸対称空洞内の音場解析 97
6.1 提案解析手法 97
6.1.1 一般曲線座標系における Helmholtz 方程式 97
6.1.2 Transfinite 補間 105
6.1.3 一般曲線座標系を導入した Spectral Collocation Method による解析 107
6.1.4 一般曲線座標系を導入した Spectral Nodal Galerkin Method による解析 . . . 109
6.2 数値計算例 112
6.2.1 円筒形空洞の固有値問題 112
6.2.2 円筒形空洞の強制振動問題 113
6.2.3 一般的な軸対称空洞の強制振動問題 115
6.3 まとめ 116

第 7 章 スペクトル法による軸対称形状・開領域音場解析 127

7.1 提案解析手法 127
7.1.1 Dirichlet-to-Neumann 写像 127
7.1.2 Spectral Nodal Galerkin Method における特性マトリクス 130
7.2 数値計算例 131
7.2.1 剛体球の散乱音場 131
7.2.2 一般的な軸対称形状を有する振動体からの放射音場 137
7.3 まとめ 141

第 8 章 スペクトル法による膜鳴楽器の音響振動連成解析 145
8.1 提案解析手法 145
8.1.1 音場の領域分割 145
8.1.2 音場と振動場の連成 147
8.2 数値計算例 152
8.2.1 ティンパニの計算例 152
8.3 まとめ 157

第 9 章 音響振動連成解析と計算知能による楽器の設計と創生への応用 159
9.1 数値解析手法と計算知能による最適設計 159
9.2 対話型進化計算による楽器の最適設計フレームワークの提案 160
9.3 まとめ 162

第 10 章 総括 163
10.1 本論文のまとめ 163
10.2 今後の課題と展望 167

付録 A 一般曲線座標系における微分作用素 169
A.1 共変基底ベクトルと反変基底ベクトル 169
A.2 微小要素 170
A.3 発散・勾配・ラプラシアン 171

参考文献 175

謝辞 179

第 1 章

序論

本章では，まず本研究の背景や音響振動場の数値解析手法，先行研究についてまとめる。それらを踏まえて本研究の目的とそれを実現するために取り組むべき課題について述べる。

1.1 背景

楽器の音響振動場解析の意義

楽器の音響振動場解析，すなわち楽器の振動や音響放射といった物理的なふるまいを理論的に把握し，その音色を予測することは，設計の効率化に有用な技術である。試作，実験に基づく古典的な方法では，実物の楽器を作らなければその音色を聴いたり調べることはできない。そのため，実際の楽器の物性値をパラメトリックに変化させながらそれによる音響特性の違いや変化を調べるといったことは困難であることが多い。例えば，現在の弦楽器の弦や膜鳴楽器の膜の張力については簡単に調整できるようになっているが，その曲げ剛性やそれらが張られている板や胴の物性値や形状を変化させることは容易ではない。一方，楽器のふるまいを表す数理モデルを構築することができれば，数値計算によって様々なパラメータを変化させながらその音響特性の違いや変化を簡単に予測することができる。将来的には実測に基づく方法よりも設計，開発にかかる時間やコストを大きく削減することも可能になると考える。

また，楽器の数理モデルは実際の楽器設計だけでなく，シンセサイザーなど音響合成にも応用されている。音響合成の方式は様々な方式があるが，信号処理に基づく方式と広義の物理モデルと呼ばれる方式に大別できる [1]。まず，信号処理に基づく方式は楽器によって作り出される音響信号の知覚的，数学的特徴に着目した合成方式であり，さらに細かく分類すると加算合成，減算合成，ウェーブテーブル合成，AM・FM 合成などがある (図 1.1)。演奏者の好みにもよるが，この方式によって合成された音色は人工的に聞こえるものが多く，自然な楽器の音色とは言い難い。また，方式によって制御するパラメータが多すぎたり，パラメータは少ないが細かい制御が困難であるといった欠点があり，実際の楽器を演奏するときのように直観的に音色を制御することは難しい。

一方，物理モデルによる方式は，楽器の物理的なふるまいを表す微分方程式を近似的に解いて音色を合成する。信号処理に基づく方式では困難であった，楽器の材質や形状，加振位置など，物理的なパラメータを変化させたときの音色をリアルに再現できるという利点がある。文献 [1] によれば，物理モデルはさ

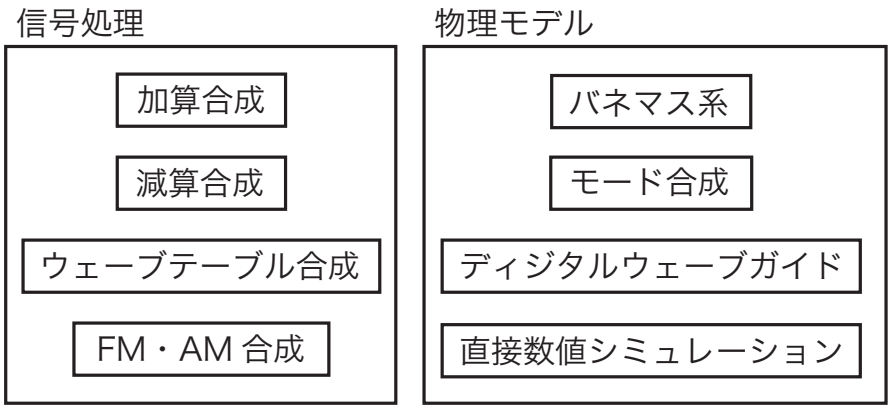


図 1.1: 文献 [1] による音響合成方式の分類

らにバネマス系，モード合成，ディジタルウェーブガイド，直接数値シミュレーションに分類される。物理モデルは信号処理に比べて演算量が膨大であるという欠点があり，これまで実用的ではなかった。しかし，近年計算機の性能が大きく向上し，物理モデル音源もシンセサイザーに搭載されてきており，今後，信号処理に基づく方式に替わり主流となることも期待される。

物理モデルに用いられる手法の中には，音響合成というよりも，もともとは本節の冒頭で述べたように楽器の音響振動特性を理解，把握することを目的として発展してきた手法もある [1]。つまりこれらの手法を発展させるということは，実際の楽器設計を目的とした音響学的研究，そしてシンセサイザーをはじめとする電子楽器に用いられる音響合成という二つのシーンにおいて意義があると言える。

音響振動場の解析手法

物理モデルに用いられる手法は文献 [1] では図 1.1 のように整理されているが，ここでは楽器に限らず，様々な音響振動問題の解析，予測に用いられる手法という観点で改めて整理しておくことにする。音響振動場の解析手法は大きく二つに分類することができる。まず，固有関数展開に代表される理論解析解である。これは問題としている場の支配方程式たる微分方程式の数学的に厳密な解であり，解析領域内の任意の点，任意の時間における解が陽な関数によって表される。そのため計算負荷が小さく，かつ厳密な解を得ることができる。しかし，複雑な形状や境界条件，支配方程式によっては解を求めることができないという欠点がある。

一方，近年，計算機の高性能化に伴い，主に建築音響の分野で大きく発展してきた手法が，差分法，有限要素法，境界要素法などの数値解析手法である。数値解析手法は空間を離散化し，問題を最終的に連立一次方程式に帰着させることで複雑な形状や境界条件，支配方程式であっても数値解を得られるというメリットがあり，楽器のような複雑な音響振動場の解析にも用いられてきている。

まず，差分法 (Finite Difference Method: FDM) は微分を差分で近似する手法である。特に時間領域の解法を時間領域有限差分法 (Finite Difference Time Domain method: FDTD 法) と呼ぶ。この手法は空間をデカルト座標系格子で離散化することが一般的であるため形状の近似は粗くなるが，実装は比較的容易である。それゆえ現在，楽器の直接数値シミュレーションの主流であり，ピアノ，ギター，バイオ

リン，金管楽器，そしてパーカッションといった多くの楽器の数値計算に応用されている [1, 2]。単純な演算のみで実行でき，また並列計算にも適していることから，GPU や FPGA などハードウェアによる高速化，リアルタイム化も試みられている [2–4]。

次に有限要素法 (Finite Element Method: FEM) は領域内を要素に分割し，その要素内では内挿関数と呼ばれる既知の単純な関数を用いて解を近似する手法である。要素内においてのみ値をもつ局所的な内挿関数によって，複雑な形状の解析も可能としている。FDM にも言えることであるが，領域型の解法であるため，楽器からの放射音場のような開領域を対象とする場合には有限な領域で打ち切る必要があり，単純な方法では厳密に解析できない。

楽器の数値計算に用いられた例はあまり見られないが，音響振動場のもう一つの主要な数値解析手法として境界要素法 (Boundary Element Method: BEM) がある。BEM は FDTD 法や FEM と異なり，境界のみを離散化するという点が大きな特徴である。領域内を離散化する必要がないため，自由度を大きく削減することができ，また開領域音場解析を得意とする手法である。

楽器に限らず音響振動問題において積極的には利用されていないが，スペクトル法 (Spectral method) という高精度な数値解析手法がある。FDM，FEM，および BEM については日本語の専門書が多く存在するが，このスペクトル法については日本語の専門書が少ない，また本論文の柱となる解析手法であるため，ここで詳しく説明しておくことにする。

スペクトル法の概説

スペクトル法は FDM や FEM と同じ領域型の数値解析手法であるが，その大きな特徴は解を近似する内挿関数にある。FDM，FEM，そしてスペクトル法は微分方程式の解 $u(x)$ を次のように内挿関数 $\phi_n(x)$ の線形和で近似する。

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n \phi_n(x) \tag{1.1}$$

FDM と FEM の場合，内挿関数 $\phi_n(x)$ は n 番目の節点の近傍においてのみ非零の値をもつ局所的な内挿関数である。それに対してスペクトル法は領域全体に広がる大域的な内挿関数を用いる。この大域的な内挿関数によって高精度の数値解を求めることができる。

スペクトル法の基本的な考え方は関数の内挿と級数展開に基づいており，その考え方自体は古くからあった [5, 6]。後述するようにスペクトル法にはいくつかの種類があるが，古典的なスペクトル法は解を Legendre 多項式や Chebyshev 多項式などの直交多項式の級数展開の形で近似し，その展開係数を未知数とする連立一次方程式を解くというものである。微分方程式の近似解法である重みつき残差法のうち，重み関数として内挿関数と同じものを選択する手法を Galerkin 法と呼ぶが，この Galerkin 法に則って連立一次方程式を立てることから，この種類のスペクトル法は Legendre Galerkin method や Chebyshev Galerkin method と呼ばれる。展開係数を連立一次方程式から数値的に求めるという違いはあるものの，基本的な考え方は理論解析解に近い手法であると言える。それゆえ，問題に対して適切な直交多項式を選択できれば，少ない展開次数でも精度よく解を近似できる。しかし，解があらかじめ境界条件を満たすように内挿関数を構成する必要があり，境界条件や支配方程式によってはそれが難しく，実用的，汎用的ではなかった。

スペクトル法が実用的な解析手法へと発展してきたのは 1970 年代である [5]。スペクトル法のうちより実用的なスペクトル選点法 (Spectral Collocation Method [5]，もしくは Fourier Collocation Method, Chebyshev Collocation Method [6] など) が様々な問題に応用された。この手法は，重みつき残差法において物理空間のある一点においてのみ値をもつ Delta 関数を重み関数として選択する手法である。前述の Legendre Galerkin method や Chebyshev Galerkin method は展開係数 (波数空間) を未知数としたが，このスペクトル選点法では節点値 (物理空間) を未知数とする連立方程式を立てる。それにより，それまで取り扱いが困難であった境界条件や空間依存する係数をもつ微分方程式，非線形問題など，適用可能な範囲が大きく広がった。

Galerkin 法の定式化の中であらわれる積分はもともと解析的に扱われていたが，1980 年代になると数値積分が用いられるようになり，その汎用性が飛躍的に向上した [6]。数値積分を用いる Galerkin 法は Spectral Nodal Galerkin Method [7]，もしくは Legendre Galerkin with Numerical Integration Method [6] などと呼ばれている。この手法は物理空間上の節点値を未知数とする点はスペクトル選点法と同じだが，Neumann 境界条件を自然な形で取り入れることができ，後に領域分割を取り入れるスペクトル要素法 (Spectral Element Method) [8] の土台となる手法である。

本論文でも示していくが，スペクトル法は少ない未知数でも高精度の数値解を求めることができる。その最大の要因は，解を近似するグローバルな内挿関数である。FEM の場合，最終的に得られる解の次数は用いる要素の次数によって決まる。例えば，もし三次要素を用いるならば，最終的に得られる解も三次多項式の線形和であり，要素数をどれだけ多くしても最大次数が三次であるということは変わらない。それに対してスペクトル法は節点数を増やしただけ解の次数が大きくなる。理論解析解を表す三角関数やベッセル関数などの固有関数の多くは冪級数展開，つまり高次の (厳密には無限次の) 多項式によって表される。そのため，スペクトル法の節点数を増やしていくと，最終的には理論解析解とほぼ同等な次数の解が得られる。

スペクトル法の欠点は形状が単純な解析対象にしか適用できないということである。このことが音響振動問題に用いられていない理由として考えられる。音響振動問題において数値解析手法が主に発展してきた分野は建築音響であるが，建築音響で対象となりやすいコンサートホールは壁面や客席など，形状が複雑である。そのため，形状に対して汎用性が高い FEM や BEM のほうが適していると考えられる。しかし，楽器についても必ずしもそのことが当てはまるわけではない。むしろなめらかな曲面が多く，スペクトル法はコンサートホールよりも楽器の解析に適した手法であると言える。

これらのことを踏まえて，解析手法におけるスペクトル法の位置づけについて考えておく。計算精度，計算負荷，扱える支配方程式と境界条件，解析領域の形状という観点から，理論解析解，スペクトル法，その他の数値解析手法を代表して FEM を比較した表を表 1.1 に示す。表中の Modal は展開係数を未知数とする Legendre Galerkin Method や Chebyshev Galerkin Method を，Nodal は節点値を未知数とする Spectral Collocation Method や Spectral Nodal Galerkin Method を指している。

まず，理論解析解は数学的に厳密，かつ陽な形で解が表されるが，適用できる問題がかなり限定的である。それに対して FEM は汎用的，実用的な解析手法であるが，特に高い周波数や大規模なモデルを解析する際には計算負荷が大きくなってしまい，逆に計算負荷を抑えるために自由度を下げると十分な精度の解が得られなくなってしまう。この二つの手法はほぼ正反対の性格をもつ解析手法であると言える。スペクトル法は FEM よりも少ない計算負荷で理論解析解に匹敵するほど高精度な数値解を得られ，また理論

表 1.1: 理論解析解，スペクトル法，FEM の比較 (◎:非常に有効，○:有効，△:有効ではない，×:適用不可)

	理論解析解	スペクトル法		FEM
		Modal	Nodal	
計算精度	◎	○	○	△
計算負荷	◎	○	○	△
複雑な支配方程式	×	△	◎	◎
複雑な境界条件	×	△	○	◎
複雑な形状	×	×	△	◎

解析解では解けない支配方程式や境界条件でも数値解を求めることができる。以上より，スペクトル法は理論解析解と FEM などの汎用的な数値解析手法の間に位置づけられると考えられる。

1.2 本研究の目的

本論文では解析対象としてドラムやティンパニのような膜をたたいて音を鳴らす膜鳴楽器と呼ばれる種類の楽器をとりあげる。膜鳴楽器は他の楽器に比べて比較的単純な形状をしており，モデルとしては扱いやすい。その一方で，膜鳴楽器という音響振動場において支配的な役割を果たしている構造体が膜としてモデル化されるヘッドであるが，膜は弦や板，シェルなどに比べて音場との相互作用が強く，その固有周波数が大きく変化する。それゆえ音響振動連成問題としても興味深い解析対象であると言える。

膜鳴楽器の音響学的研究は Rossing らによってされてきた [9–12]。これらの研究は高度な手法を使わない単純化したモデルに基づくものでありながら，膜鳴楽器の特徴的な性質について理論的に説明しており，マクロなふるまいを数理的に表すには十分であると言える。Christian らによるグリーン関数法を用いたティンパニの数値計算 [10] では，典型的なティンパニのケトル形状を円筒形でモデル化し，かつ外部音場を無限バフル中のヘッドからの放射音場で近似しているにもかかわらず，実測結果とよく一致した計算結果が得られている。そして，その計算によりヘッドの固有周波数が周囲の空気の影響によって整数比に近くなるというティンパニの特徴を説明している。しかしながら，Christian らも実測結果との誤差をより小さくするため，またより詳細な音響特性について議論するためには，円筒形だけでなく実際のケトル形状を考慮した計算が必要であることを述べている。

ケトルの形状を考慮したより厳密なティンパニの数値計算は Rhaouti らにより行われた [13]。手法としては時間領域 FEM を用いており，マレットとヘッドの連成についても考慮している。数値計算により得られた時間応答と周波数応答ともに実測結果とよく一致することが示されている。

スペクトル法を膜鳴楽器の解析に応用した数少ない研究例として，Sathej と Adhikari によるものがある [14]。この研究ではインドの伝統楽器タブラを対象としており，そのヘッドの固有値解析にスペクトル法が用いられた。理想的な円形膜の固有周波数は整数倍とならないが，タブラのヘッドは密度が不均一であり，低次の固有周波数が整数倍に近くなる。このことをスペクトル法による数値計算で確認した。

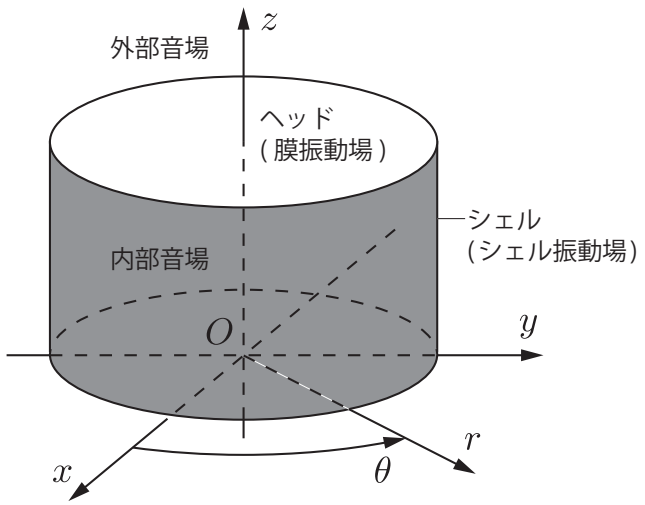


図 1.2: 膜鳴楽器の構成要素と振動・音響工学的モデル

これまであげた研究は膜鳴楽器の音響学的側面についての研究という色が強かったが，計算機の性能が飛躍的に向上した 2010 年以降，音響合成を目的とした膜鳴楽器の数値計算が Bilbao らにより精力的に行われている。実装が簡易であること，並列計算に適していることなどから手法としては FDTD 法を用いており，ヘッドと響き線の連成を考慮したスネアドラムの数値計算 [15]，GPGPU によるティンパニの数値計算の高速化 [3,4]，膜の非線形性を考慮した数値計算 [16,17] など，数々の難しい問題に取り組んでいる。

これらの膜鳴楽器の数値計算に関する先行研究はいずれも定式化と実装が容易な三次元の汎用的な手法を用いているため，問題の自由度が大きく効率的であるとは言えない。数値解析の厳密さという点では，楽器の外部音場に近似的な境界条件を設定しており，自由音場の放射条件を厳密にみたすものではない。また，これほど膜鳴楽器の数値計算に関する研究はされていても，数値計算を用いて膜鳴楽器の設計を試みたという研究は見られない。

これらの課題を踏まえて，本研究では数値計算による膜鳴楽器の設計や音響合成をより実用的にするべく，厳密，高精度かつ効率的な解析手法の提案，また提案手法による膜鳴楽器の設計を目的とする。なお，本論文における「設計」とは，楽器の特性を定量的に評価する評価関数 (目的関数) を所望の値に近付けるパラメータ (形状や材質の物性値など) の数値計算による探索を指す。

1.3 本論文の構成

本論文で考える膜鳴楽器のモデルを図 1.2 に示す。モデルやモデル化という用語は分野によって様々な意味で用いられるが，振動工学や楽器音響学などの分野においては，物理現象やシステムの性質を数理的に表すことを意味する。本論文でもそれに倣い，膜鳴楽器の構成要素のふるまいを数理的に表すことをモデル化と呼ぶ。膜鳴楽器はスティックやマレットを使ってたたくヘッドとそれが張られているシェル (ケトル) を主な構造体として構成される。振動工学的なモデルとしてはヘッドは膜振動場，もしくは薄板振動場として，シェルはシェル振動場としてモデル化できる。それらの構造体の振動が空気の粒子に伝わ

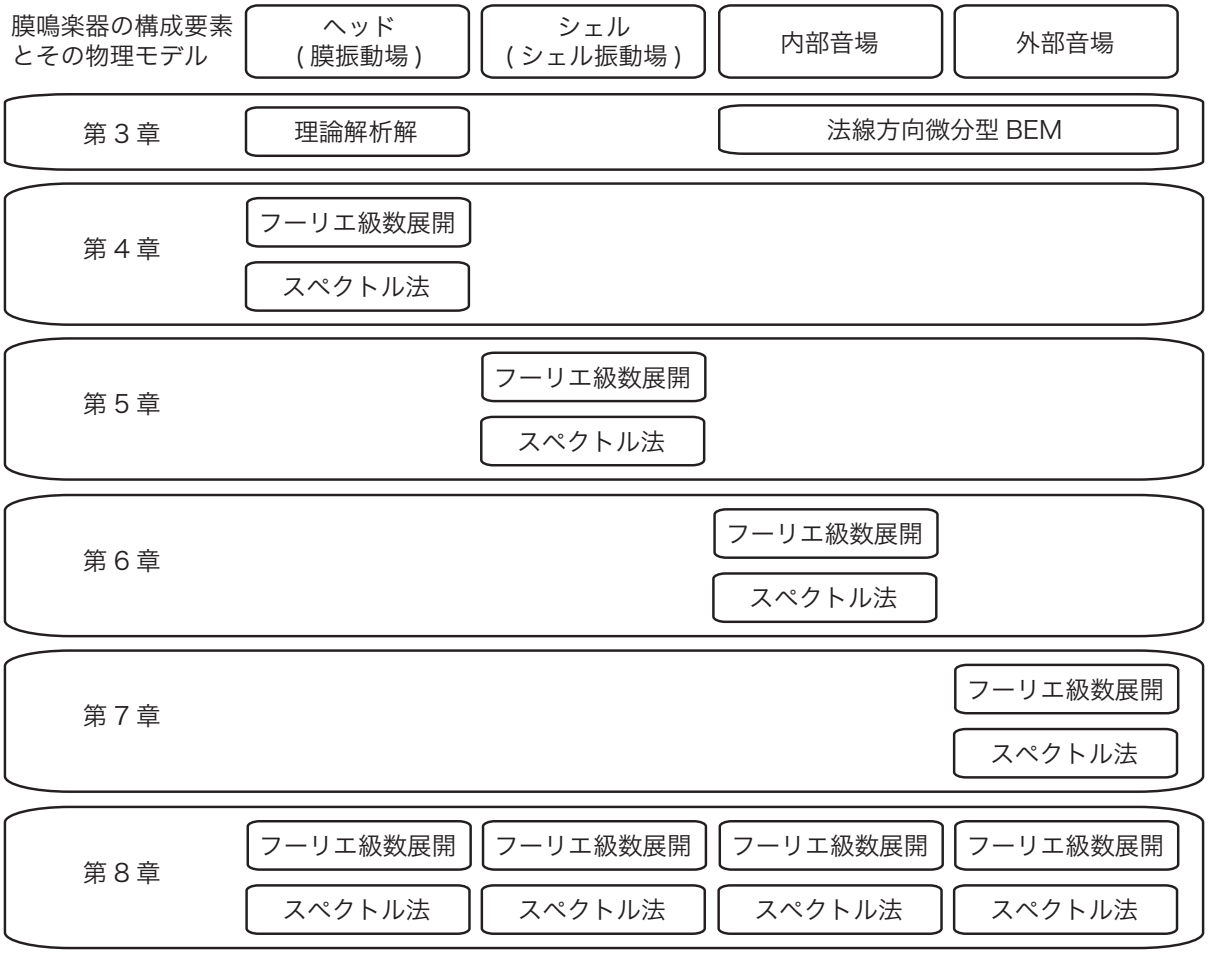


図 1.3: 各章で提案する解析手法

り，膜鳴楽器の内部と外部に音波が放射されることで音場を生じる。本論文では楽器の内部に生じる音場を内部音場，外部に生じる音場を外部音場と呼ぶこととする。

これらの構成要素を解析する準備として，まず第 2 章において本論文で用いる数値解析手法の定式化についてまとめておく。

第 3 章では膜振動場の理論解析解と音場の法線方向微分型 BEM という既往の二つの手法を連成した解析手法による膜鳴楽器の設計例を示し，数値計算によるより優れた膜鳴楽器の設計可能性について述べる。第 3 章で用いる解析手法は膜の曲げ剛性やシェル振動場を考慮していない。また設計の効率化を考えると計算コストのさらなる削減が必要である。

そこで次に計算コストの削減を目指し，膜鳴楽器の軸対称性と高精度な数値解析手法であるスペクトル法を利用した連成解析手法を構築する。第 4 章から第 7 章では，膜鳴楽器の構成要素である張力を有する板振動場，円筒シェル振動場，内部音場，そして外部音場の解析手法を提案する。そして最後に第 8 章でそれらを連成した膜鳴楽器としての解析手法を提案する。

図 1.3 に本論文の第 3 章から第 8 章において提案する解析手法を示す。各章の概要は次の通りである。

第 2 章

本論文で用いる数値解析手法 (FEM，BEM，スペクトル法) の基本的な定式化についてまとめる。

第 3 章

膜振動場の理論解析解と音場の法線方向微分型 BEM による膜鳴楽器の音響振動連成解析手法を提案する。実際のティンパニの実測結果と比較し，提案手法の妥当性について検証する。また，提案手法を用いてティンパニの固有周波数を整数比に近付けるための設計例について示す。

第 4 章

膜鳴楽器のヘッドを張力を有する円形薄板とみなしてその解析手法を提案する。円周方向についてはフーリエ級数展開し，半径方向はスペクトル法によって解析する。円形薄板の振動方程式は 4 階微分方程式であるため，境界において二つの境界条件を満たすように内挿関数を工夫する必要がある。その際，フーリエ級数の展開次数によって内挿関数の形に注意を要する。そのことについても定式化の中で述べる。FEM と比較し，提案手法が少ない自由度で高精度の解を得られることを示す。

第 5 章

ドラムのシェルは円筒シェルとしてモデル化できる。第 5 章ではフーリエ級数展開とスペクトル法による円筒シェル振動場の解析手法を提案する。円筒シェル振動場の支配方程式も薄板振動場と同様に 4 階微分方程式で表される。第 4 章の方法より汎用的な境界条件の与え方として，Hermite 補間マトリクスを用いた方法を提案する。また，二つの異なるスペクトル法により解析し，定式化や実装，計算におけるそれらの特性についても述べる。

第 6 章

膜鳴楽器の内部音場である軸対称空洞内の音場解析手法を提案する。第 4 章，第 5 章と同じく，円周方向をフーリエ級数展開し，回転断面をスペクトル法によって解析する。解析できる形状への汎用性を高めるため，一般曲線座標系を導入し，任意の軸対称形状を有する空洞内の音場を解析できるようにする。

第 7 章

膜鳴楽器の外部音場の解析手法を提案する。外部音場は開領域音場であるが，スペクトル法は領域型の解法であるため，本来無限に広がる解析領域を有限領域で打ち切る必要がある。その際，適切な境界条件を与えないと境界から疑似反射が生じてしまう。第 7 章では Dirichlet-to-Neumann 写像を境界条件として与え，開領域音場を厳密に解析できるようにする。

第 8 章

第 4 章から第 7 章までで構築してきた各構成要素の解析手法を連成し，膜鳴楽器の音響振動連成解析手法を提案する。数値計算例として，ティンパニからの放射音場の計算結果を示す。

第 9 章

音響振動連成解析と計算知能を応用した楽器の設計，さらに新しい楽器の創生の可能性について述べる。また，楽器の音響合成と対話型進化計算を組み合わせた新たな楽器設計のフレームワークを提案する。

第 10 章

本研究の成果をまとめ，今後の課題について整理する。

1.4 提案解析手法の評価方法

誤差解析における参照解

第 4 章から第 7 章において，提案解析手法によって得られた数値解と参照解の誤差を算出し，計算精度の検証を行う。まず，固有値問題のうち固有周波数の理論値が求められるものについてはそれを参照解として採用することとする。この固有周波数の理論値は，非線形方程式である固有方程式をニュートン法などの反復法で解くことにより求めることができ，丸め誤差の影響を無視すれば原理的には計算機イプシロンの精度を得ることができる。倍精度の浮動小数点数であれば，一般的に 15 桁程度は厳密解と一致する。

次に強制振動問題については，理論解析解を求められる場合には理論解析解を有限次数で打ち切ったものを参照解として採用することとする。有限次数で打ち切られた理論解析解は近似解ではあるが，FEM や BEM などの数値解析手法よりも解の収束が速く，それらの自由度よりもはるかに少ない打ち切り次数でも計算機イプシロン精度の解を得られるため，参照解として採用することは妥当であると言える。

境界条件や形状によっては固有周波数の理論値や理論解析解を求められない問題がある。そのような場合，内部問題には FEM，外部問題には BEM の要素数を十分に大きくして求めた数値解を参照解として誤差を算出することとする。なお，実用的に十分な精度を得るための要素寸法比の目安は，解析対象の波長に対して 1/5 以下とされているが，本論文では参照解として可能な限りの精度を保証するため，1/20 程度に設定した。

フーリエ級数展開の打ち切り次数

第 4 章から第 7 章の提案解析手法は円周方向の解析にフーリエ級数展開を用いるが，これは円周方向の理論解析解である。比較対象である軸対称要素を用いた FEM や BEM についても同じことが言える。そのため，誤差解析におけるフーリエ級数展開の打ち切り次数は，参照解とする理論解析解や FEM および

BEM，比較対象である FEM や BEM，そして提案解析手法において同じ次数を用いて評価することとする。なお実用的なシーンにおいては，求めたい周波数の 2 倍程度の範囲の固有周波数のモードを用いれば，精度的に十分であると言われている [18]。

第 2 章

微分方程式の数値解法

振動や波動は微分方程式によって表現される。その方程式の形や解析領域の形状，境界条件などが複雑な問題では，解析的に陽な形式で解を求めることができない。そのような問題においては，数値解析手法を用いることで数値的に近似解を求めることが可能である。本章では，音響振動問題において広く用いられている有限要素法，境界要素法，そしてスペクトル法という三つの数値解析手法をとりあげ，それらの基本的な定式化について述べる。

2.1 有限要素法

有限要素法 (Finite Element Method: FEM) は解析領域を要素分割し，要素上の節点における変位や速度ポテンシャルなどを未知数とする連立一次方程式を解くことで，微分方程式の数値解を求める手法である。要素内の変位や速度ポテンシャルについては，節点値とその要素においてのみ非零の値をもつ局所的な内挿関数によって内挿される。この局所的な内挿関数が複雑な形状の解析も可能としている。また，局所的な内挿関数を用いるということは，近傍の節点間のみの関係を考えるということであるため，導かれる連立一次方程式の係数行列は疎行列となる。解析領域全体を離散化するため，基本的には閉領域を解析対象としており，開領域を厳密に扱うためには工夫が必要である。

FEM はいくつかの方法によって定式化が可能であるが，ここでは解析力学の観点から Lagrange 方程式に基づく定式化について述べる。

2.1.1 Lagrange 方程式による定式化

Lagrange 方程式は Hamilton の原理から導かれ，ニュートン力学に限らず物理学の様々な現象を記述する基礎方程式である。問題を記述する変数を q とすると，Lagrange 方程式は次式で表される [19]。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{2.1}$$

L はラグランジアンと呼ばれる量であり，保存力のみが働く力学系においては運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U を用いて

$$L = T - U \tag{2.2}$$

と定義すると，式 (2.1) はニュートンの運動方程式と同値となる。外力のような非保存力が働く場合，それがなす仕事を W として，ラグランジアンは

$$L = T - U + W \tag{2.3}$$

と表される。

Lagrange 方程式から，具体的に音響問題における支配方程式を導出する。まず，速度ポテンシャルを ϕ，空気の密度を ρ，音速を c としたとき，解析領域 Ω における音波の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U はそれぞれ，

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 \right\} dV \tag{2.4}$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{\rho}{c^2} \int_\Omega \dot{\phi}^2 dV \tag{2.5}$$

で与えられる [20]。また，境界 Γ_v において振動変位を u_n とする外力によってなされる仕事 W は，

$$W = \rho \int_{\Gamma_v} \dot{\phi} u_n dS \tag{2.6}$$

である。

ここで，未知の速度ポテンシャル ϕ を未知定数 ϕ_i と既知の内挿関数 $N_i(x, y, z)$ によって，

$$\phi = \sum_{i=0}^{M} \phi_i N_i(x, y, z) \tag{2.7}$$

と近似する。ベクトル

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_M \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{Bmatrix} N_0(x,y,z) & N_1(x,y,z) & \cdots & N_M(x,y,z) \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{2.9}$$

を定義すると，式 (2.7) は内積の形で

$$\phi = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\phi} \tag{2.10}$$

と書ける。これを用いて，運動エネルギー T を書き換えると，

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\rho \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\partial x}\boldsymbol{\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\partial y}\boldsymbol{\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\partial z}\boldsymbol{\phi}\right)^2 \right\} dV \\ &= \frac{1}{2}\rho \int_\Omega \left(\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\frac{\partial \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\partial x}\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\frac{\partial \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\partial y}\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\frac{\partial \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\partial z}\boldsymbol{\phi} \right) dV \\ &= \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \int_\Omega \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\frac{\partial \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\frac{\partial \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\frac{\partial \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\partial z} \right) dV \boldsymbol{\phi} \\ &= \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi} \end{aligned} \tag{2.11}$$

となる。ここで,

$$\boldsymbol{K} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y} \frac{\partial \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z} \frac{\partial \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\partial z} \right) dV \tag{2.12}$$

とおいた。同じようにしてポテンシャルエネルギー U は,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \frac{\rho}{c^2} \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\phi}} \right)^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho}{c^2} \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\phi}} dV \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho}{c^2} \dot{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{T}} \int_{\Omega} \boldsymbol{N} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} dV \dot{\boldsymbol{\phi}} \\ &= \frac{1}{2} \rho \dot{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

となる。ただし,

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \boldsymbol{N} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} dV \tag{2.14}$$

である。最後に仕事 W は,

$$\begin{aligned} W &= \rho \int_{\Gamma_v} u_n \dot{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N} dS \\ &= \rho \dot{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{T}} \int_{\Gamma_v} u_n \boldsymbol{N} dS \\ &= \rho \dot{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}_n \end{aligned} \tag{2.15}$$

となる。ただし,

$$\boldsymbol{u}_n = \int_{\Gamma_v} u_n \boldsymbol{N} dS \tag{2.16}$$

である。

これらを Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} (T - U + W) \right\} - \frac{\partial}{\partial \phi} (T - U + W) = 0 \tag{2.17}$$

に代入すると,

$$\rho \boldsymbol{M} \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \rho \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi} - \rho \dot{\boldsymbol{u}}_n = 0 \tag{2.18}$$

となり，両辺を ρ で割り，既知のベクトル $\dot{\boldsymbol{u}}_n$ を右辺に移項すると，最終的に

$$\boldsymbol{M} \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi} = \dot{\boldsymbol{u}}_n = \boldsymbol{f} \tag{2.19}$$

という連立方程式が得られる。時間依存項が $e^{j\omega t}$ である調和振動のとき，上式は

$$\left[\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M} \right] \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{f} \tag{2.20}$$

となる。

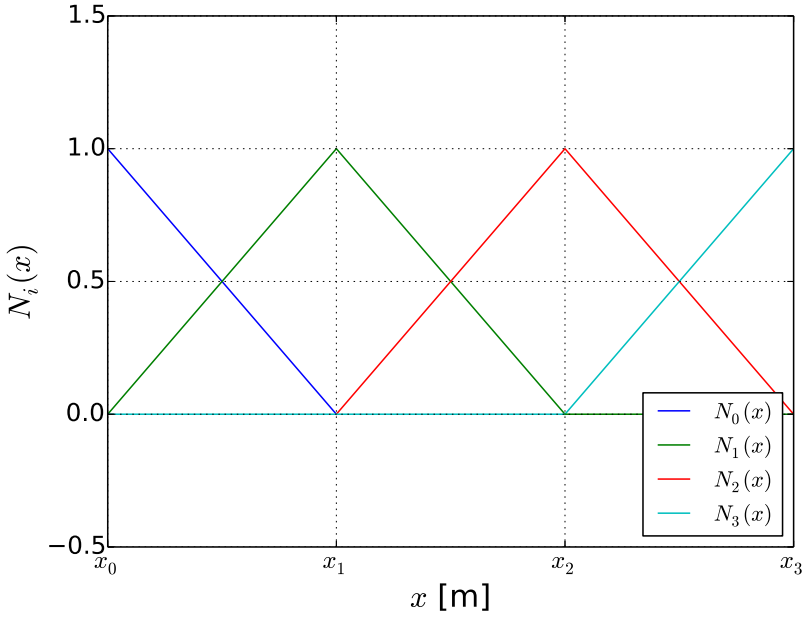


図 2.1: 一次の内挿関数

Lagrange 方程式は Hamilton の原理の枠組みの中で導出され，Hamilton の原理の中にはニュートンの運動方程式だけでなく，境界において未知数の法線方向微分が 0 となるという自然境界条件も含まれている [19]。つまり，Lagrange 方程式を通して Hamilton の原理から導出された式 (2.20) は，波動方程式に加えて境界において粒子速度が 0 となるという自然境界条件も含んでいる。そのため，自然境界条件については与える必要はない。未知数そのものを 0 とするような基本境界条件については，係数マトリクスから境界の未知数に関する行と列を取り除くことで与えることができる。

音響問題以外でも同じようにエネルギーと仕事を求め，未知量を内挿関数で近似し，Lagrange 方程式に代入することで連立一次方程式に帰着させることができる。

2.1.2　内挿関数

前項において未知の速度ポテンシャルを，既知の内挿関数 $N_i(x)$ を用いて式 (2.7) によって近似した。問題が一次元の場合，最も単純な $N_i(x)$ は図 2.1 に示すような一次関数である。図 2.1 から分かるように，i 番目の節点 x_i に関する内挿関数 $N_i(x)$ は，x_i において 1 という値をとり，隣り合う節点 x_{i-1}，x_{i+1} において 0 という値をとるように線形に変化する関数である。一つの要素に着目し，その要素を構成する節点を x_i，x_j，節点値を ϕ_i，ϕ_j とすると，要素内の速度ポテンシャル $\phi(x)$ は，

$$\phi(x) = N_i(x)\phi_i + N_j(x)\phi_j, \quad x_i \leq x \leq x_j \tag{2.21}$$

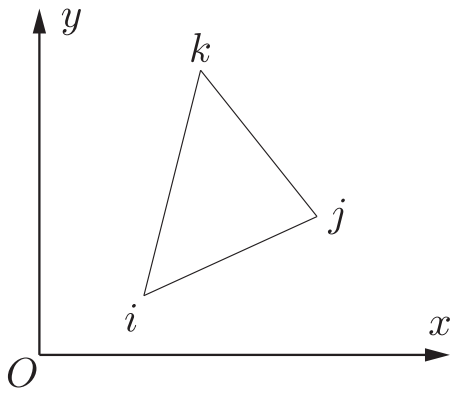


図 2.2: 三角形要素

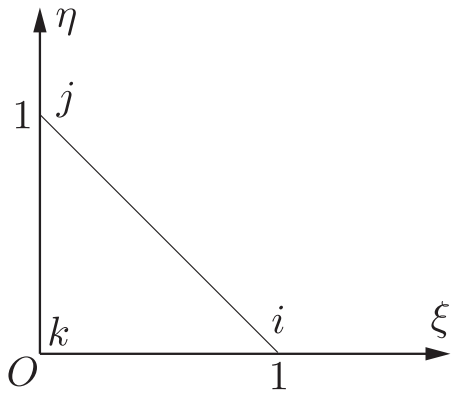


図 2.3: 局所座標系に写像した三角形要素

と内挿される。ここで，関数 $N_i(x)$ と $N_j(x)$ は，

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}, \quad x_i \leq x \leq x_j \tag{2.22}$$

$$N_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad x_i \leq x \leq x_j \tag{2.23}$$

で与えられる。式 (2.21) をすべての要素について足し合わせると，解析領域全体の近似解 $\phi(x)$ が表される。

実際に計算を行う際，要素内の座標を表す局所座標 $\xi \in [0, 1]$ によって x を

$$x = x_i + (x_j - x_i)\xi \tag{2.24}$$

と表すと，すべての要素に対して同じ演算結果を使い回すことができ，便利である。このとき，演算に必要な x の微小要素と x による微分は，

$$dx = (x_j - x_i)d\xi \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{x_j - x_i}\frac{\partial}{\partial \xi} \tag{2.26}$$

によって求められる。

問題が二次元である場合や，三次元でも軸対称形状をもつためある回転断面だけを考えればよい場合，領域を分割する要素のうち簡単なものとして図 2.2 のような三角形要素がある。節点 (x_i, y_i)，(x_j, y_j)，(x_k, y_k) から構成されるある要素内の速度ポテンシャルが，次のような一次関数で内挿されるとする。

$$\phi(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \tag{2.27}$$

$\phi(x, y)$ が節点上で節点値 ϕ_i，ϕ_j，ϕ_k に一致するように，

$$\phi(x_i, y_i) = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i = \phi_i \tag{2.28a}$$

$$\phi(x_j, y_j) = \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j = \phi_j \tag{2.28b}$$

$$\phi(x_k, y_k) = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k = \phi_k \tag{2.28c}$$

とおいて，係数 α_0，α_1，α_2 を定める。得られた係数を式 (2.27) に代入し，ϕ_i，ϕ_j，ϕ_k について整理すると，

$$\phi(x,y) = N_i(x,y)\phi_i + N_j(x,y)\phi_j + N_k(x,y)\phi_k \tag{2.29}$$

と表される。ここで内挿関数 $N_i(x,y)$，$N_j(x,y)$，$N_k(x,y)$ は，

$$N_m(x,y) = \frac{1}{\Delta}(a_m x + b_m y + c_m), \quad m = i,j,k \tag{2.30}$$

である。ここで，Δ は

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} \tag{2.31}$$

で与えられ，これは三角形要素の面積の 2 倍となっている。a_m，b_m，c_m は，

$$a_i = y_j - y_k \tag{2.32a}$$
$$b_i = x_k - x_j \tag{2.32b}$$
$$c_i = x_j y_k - x_k y_j \tag{2.32c}$$

$$a_j = y_k - y_i \tag{2.33a}$$
$$b_j = x_i - x_k \tag{2.33b}$$
$$c_j = x_k y_i - x_i y_k \tag{2.33c}$$

$$a_k = y_i - y_j \tag{2.34a}$$
$$b_k = x_j - x_i \tag{2.34b}$$
$$c_k = x_i y_j - x_j y_i \tag{2.34c}$$

である。

一次元の場合と同じように，三角形要素にも局所座標系を導入すると，要素ごとの演算を簡単に行える。三角形要素の場合には，(ξ,η), $\xi \in [0,1]$, $\eta \in [0,1]$ を用いて (x,y) を

$$x = x_k + (x_i - x_k)\xi + (x_j - x_k)\eta \tag{2.35}$$
$$y = y_k + (y_i - y_k)\xi + (y_j - y_k)\eta \tag{2.36}$$

と表すことができる。図 2.3 に示すように，この変換により物理座標における点 (x_i,y_i), (x_j,y_j), (x_k,y_k) は，局所座標系 (ξ,η) における点 (1, 0)，(0, 1)，(0, 0) へ写像される。このとき，

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x_i - x_k & y_i - y_k \\ x_j - x_k & y_j - y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.37}$$

という関係から，偏微分は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - x_k & y_i - y_k \\ x_j - x_k & y_j - y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$
$$= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i \\ x_k - x_j & x_i - x_k \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

ただし，

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i - x_k & y_i - y_k \\ x_j - x_k & y_j - y_k \end{vmatrix} \tag{2.39}$$

である。また，微小面要素は，

$$dxdy = Jd\xi d\eta \tag{2.40}$$

によって変換される。

2.2 境界要素法

境界要素法 (Boundary Element Method: BEM) は解析領域の境界を要素分割し，境界積分方程式を連立一次方程式に近似する数値解析手法である。境界のみを離散化するため問題の次元が一つ下がることになり，自由度も大きく削減することができる。ただし，すべての要素は Green 関数によって各々関係付けられるため，係数行列は密行列となる。また，境界のみを離散化すればよいため，開領域問題についても厳密に取り扱うことが可能である。この点は FEM など領域型の解法との大きな違いである。

BEM の定式化はまず，Green の定理を通して Helmholtz 方程式から境界積分方程式を導く。それから境界を要素分割し，境界積分方程式を離散化することで，BEM における連立一次方程式が導かれる。

2.2.1 境界積分方程式

音場に音源が分布する場合の Helmholtz 方程式は，音源の強さの分布関数 Q を用いて次のように表される。

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = -Q \tag{2.41}$$

上式の両辺に Green 関数 ψ をかけて，領域内で積分すると次式となる。

$$\int_\Omega \left(\nabla^2\phi + k^2\phi\right)\psi dV = -\int_\Omega Q\psi dV \tag{2.42}$$

上式の左辺積分内第一項に Green の定理を適用すると，

$$\int_\Omega \nabla^2\phi\psi dV = \int_\Omega \phi\nabla^2\psi dV - \int_\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}\psi dS + \int_\Gamma \phi\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{n}} dS \tag{2.43}$$

となる。これを式 (2.42) に代入すると次式が得られる。

$$\int_\Omega \phi\nabla^2\psi dV + \int_\Gamma \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}\psi\right) dS + \int_\Omega k^2\phi\psi dV = -\int_\Omega Q\psi dV \tag{2.44}$$

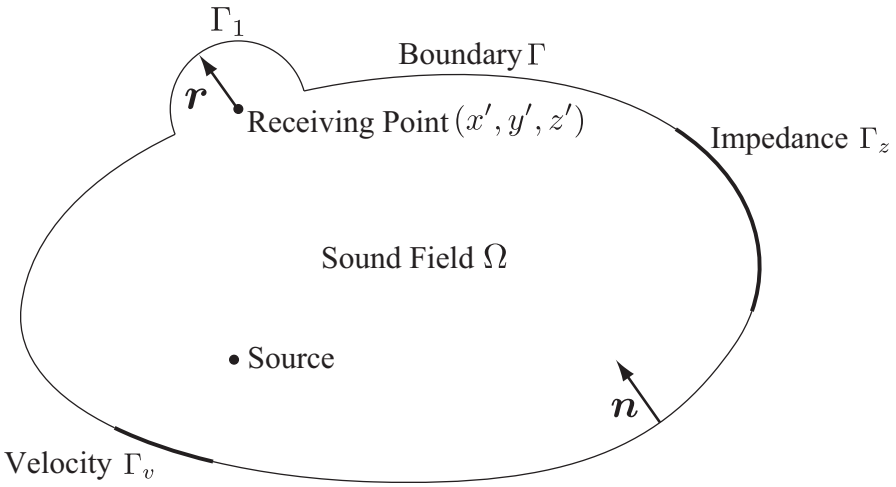


図 2.4: 音場と境界

$$-\int_\Omega \phi\left(\nabla^2\psi + k^2\psi\right) dV = \int_\Gamma \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}\psi\right) dS + \int_\Omega Q\psi dV \tag{2.45}$$

Green 関数 ψ として，音源の強さの分布関数 Q を空間的なデルタ関数とした Helmholtz 方程式を満たすものを用いる。すなわち次式が成立するような ψ である。

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = -\delta(x - x', y - y', z - z') \tag{2.46}$$

上式を満たす ψ は例えば，次のようなものである。

$$\psi = \frac{1}{4\pi r}e^{-jkr} \tag{2.47}$$

ただし，

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \tag{2.48}$$

であり，式 (2.46) の関係を式 (2.45) に適用すれば，領域 Ω 内の任意の受音点 $p = (x', y', z')$ における速度ポテンシャルは，次式のような Kirchhoff の積分方程式の形で表される。

$$\phi(p) = \int_\Gamma \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}\psi\right) dS + \int_\Omega Q\psi dV \ (p \in \Omega) \tag{2.49}$$

特に音源の分布関数が

$$Q(x, y, z) = Q\delta(x - x_s, y - y_s, z - z_s) \tag{2.50}$$

のように表される点音源であるとすると，式 (2.49) は，

$$\phi(p) = \int_\Gamma \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}\psi\right) dS + Q\psi \ (p \in \Omega) \tag{2.51}$$

と書ける。

受音点 p が境界面 Γ 上にある場合には，図 2.4 のように受音点 p の周りに小さい半球状の境界面 Γ_1 を設けると，上式右辺の境界面 Γ_1 における積分は次式となる。

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}-\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\psi\right)dS &= \int_{\Gamma_1}\left(-\phi\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial\phi}{\partial r}\psi\right)dS \\ &= \int_{\Gamma_1}\left(\phi\frac{1+jkr}{4\pi r^2}e^{-jkr}+\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{1}{4\pi r}e^{-jkr}\right)dS \\ &= 2\pi r^2\left(\phi\frac{1+jkr}{4\pi r^2}e^{-jkr}+\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{1}{4\pi r}e^{-jkr}\right) \\ &= \phi\frac{1+jkr}{2}e^{-jkr}+\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{r}{2}e^{-jkr} \end{aligned} \tag{2.52}$$

ただし，$\partial/\partial\boldsymbol{n}=-\partial/\partial r$ の関係を用いた。上式で $r\to 0$ とすれば，次式が得られる。

$$\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_1}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}-\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\psi\right)dS=\frac{1}{2}\phi \tag{2.53}$$

これより，受音点 p が境界面 Γ にある場合の積分方程式は，

$$\frac{1}{2}\phi(p)=\int_{\Gamma}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}-\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\psi\right)dS+Q\psi\ (p\in\Gamma) \tag{2.54}$$

となる。

2.2.2 境界の離散化

次に境界の形状や境界条件が複雑である場合，式 (2.54) を数値的に解くために境界を離散化する。図 2.4 のように領域 Ω は境界 Γ に囲まれ，その一部が比音響インピーダンス z_n をもつインピーダンス境界 Γ_z と振動速度 v_n をもつ振動速度境界 Γ_v であり，それ以外は音響的に剛であるとする。式 (2.54) 右辺の $-\partial\phi/\partial\boldsymbol{n}$ は粒子速度であり，インピーダンス境界では，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}=\frac{j\omega\rho\phi}{z_n} \tag{2.55}$$

となり，振動速度境界では，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}=v_n \tag{2.56}$$

それ以外の境界上では，

$$-\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}=0 \tag{2.57}$$

であることを用いると，式 (2.54) は，

$$\frac{1}{2}\phi(p)=\int_{\Gamma}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}dS+\int_{\Gamma_z}\frac{j\omega\rho\phi}{z_n}\psi dS+\int_{\Gamma_v}v_n\psi dS+Q\psi\ (p\in\Gamma) \tag{2.58}$$

と書ける。境界を速度ポテンシャルが要素内で一定と近似する N 個の一定要素に分割すると，i 番目の要素についての方程式は，

$$\frac{1}{2}\phi_i=\sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j}\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}dS\phi_j+\sum_{\substack{j\\ \Gamma\in\Gamma_z}}\frac{j\omega\rho}{z_n}\int_{\Gamma_j}\psi dS\phi_j+\sum_{\substack{j\\ \Gamma\in\Gamma_v}}\int_{\Gamma_j}\psi dSv_n+Q\psi \tag{2.59}$$

となり，未知数である ϕ_j についての項を左辺に移項すると，

$$\frac{1}{2}\phi_i - \sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j}\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{n}}dS\phi_j - \sum_{\substack{j\\ \Gamma\in\Gamma_z}}\frac{j\omega\rho}{z_n}\int_{\Gamma_j}\psi dS\phi_j = \sum_{\substack{j\\ \Gamma\in\Gamma_v}}\int_{\Gamma_j}\psi dSv_n + Q\psi \tag{2.60}$$

となる。$i = 1, 2, \ldots, N$ について書き並べると，次のような形式のマトリクス方程式が得られる。

$$\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H} + \boldsymbol{Y}\right]\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q} \tag{2.61}$$

上式を $\boldsymbol{\phi}$ について解き，得られた速度ポテンシャルを式 (2.51) に代入することで，領域 Ω 内の任意の受音点における速度ポテンシャルを求めることができる。

2.3 スペクトル法

ここではスペクトル法の定式化について述べる。FDM や FEM が局所的な内挿関数の線形結合で微分方程式の解を近似するのに対して，スペクトル法は領域全体にわたる大域的な内挿関数の線形結合で解を近似する。そのため同じ節点数で比較した場合，スペクトル法がより高次の関数で解を近似することになり，高精度の数値解を得られる [5]。スペクトル法にはいくつかの種類があることは第 1 章で述べた。実際の工学の問題を解析することを考えると，適用可能範囲が広いのは本節で説明する Spectral Collocation Method (以下，SCM) と Spectral Nodal Galerkin Method (以下，NGM) である [7]。実用的な解析対象への適用については第 4 章以降で述べることとし，本節では Helmholtz 方程式を例としてとりあげ，二つの手法の定式化について説明する。

一次元の Helmholtz 方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + k^2\phi(x) = -q(x) \tag{2.62}$$

ここで，k は波数，$\phi(x)$ は速度ポテンシャル，$q(x)$ は音場内に設置した音源の強さである。SCM と NGM は次のように重み付き残差法として一般化することができる。上の Helmholtz 方程式に重み関数 $\psi_i(x)$ をかけ，領域内 $[-1, 1]$ で積分すると，

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\psi_i(x)dx + k^2\int_{-1}^{1}\phi(x)\psi_i(x)dx = -\int_{-1}^{1}q(x)\psi_i(x)dx \tag{2.63}$$

となる。SCM と NGM のどちらも出発点はこの方程式である。重み関数として $\psi_i(x)$ にどのような関数を選ぶかによって，これ以降の定式化が異なる。以下，それぞれの手法について詳細に述べていく。

2.3.1 Spectral Collocation Method

スペクトル法の中で最も多く用いられている手法が，Spectral Collocation Method (SCM) である。文献によっては擬スペクトル法 (Pseudospectral Method) と呼んでいることもある。

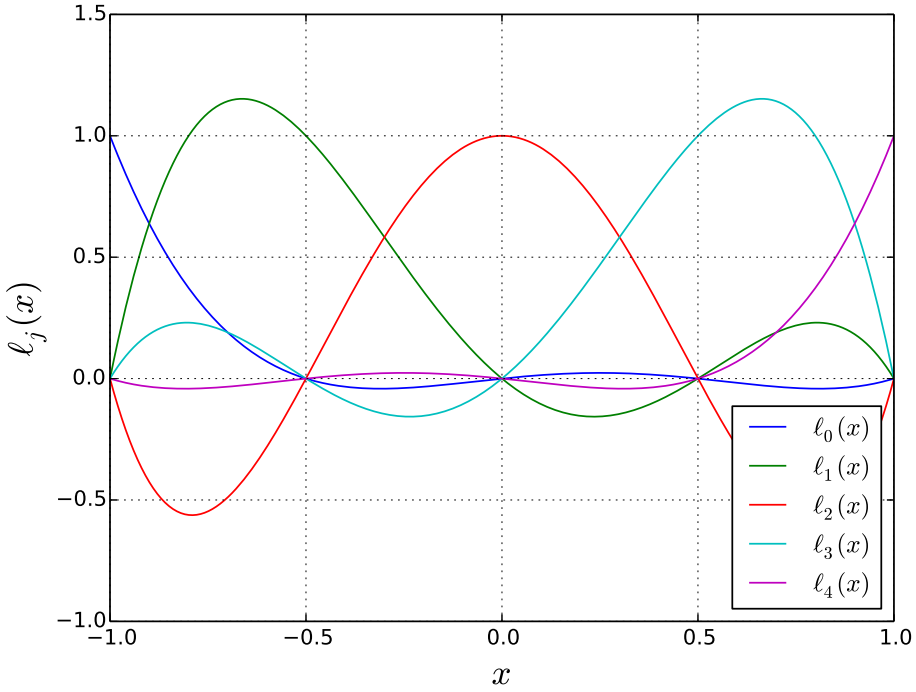


図 2.5: Lagrange 基底関数

領域内に $N+1$ 点の節点 $x_0, x_1, \ldots, x_N$ を置いたとき，SCM では解を次のような N 次の Lagrange 補間多項式で近似する。

$$\phi(x) \approx \tilde{\phi}(x) = \sum_{j=0}^{N} \phi_j \ell_j(x) \tag{2.64}$$

ϕ_j は節点 x_j における速度ポテンシャル $\tilde{\phi}(x_j)$ を表しており，Lagrange 基底関数 $\ell_j(x)$ は次のように定義される。

$$\ell_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_N)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_N)} \tag{2.65}$$

$N=4$ とし，節点を $x_0=-1, x_1=-0.5, x_2=0, x_3=0.5, x_4=1$ としたときの Lagrange 基底関数 $\ell_j(x), j=0,1,\ldots,4$ のグラフを図 2.5 に示す。式 (2.65) と図 2.5 より，節点 x_i における Lagrange 基底関数 $\ell_j(x)$ は，Kronecker のデルタを使って

$$\ell_j(x_i) = \delta_{ij} \tag{2.66}$$

と表せることが分かる。また，SCM では重み関数 $\psi_i(x)$ として節点においてのみ値をもつ次のような Dirac のデルタ関数を用いる。

$$\psi_i(x) = \delta(x - x_i) \tag{2.67}$$

式 (2.64) と (2.67) を式 (2.63) に代入すると，

$$\sum_{j=0}^{N} \phi_j \ell_j''(x_i) + k^2 \sum_{j=0}^{N} \phi_j \ell_j(x_i) = -q(x_i) \tag{2.68}$$

となる。ここで $\ell_j''(x)$ は $\ell_j(x) = \partial^2 \ell(x)/\partial x^2$ である。さらに式 (2.66) の性質を使うと，左辺の 2 番目の総和のうち残る項は一つだけになり，

$$\sum_{j=0}^{N} \phi_j \ell_j''(x_i) + k^2 \phi_i = -q(x_i) \tag{2.69}$$

と書ける。この方程式は i 番目の節点 x_i についての方程式を表している。上式を $i = 0, 1, \ldots, N$ について書き並べると，マトリクス方程式の形で，

$$\boldsymbol{D}^2 \boldsymbol{\phi} + k^2 \boldsymbol{\phi} = \left[\boldsymbol{D}^2 + k^2 \boldsymbol{I} \right] \boldsymbol{\phi} = -\boldsymbol{q} \tag{2.70}$$

と書き表すことができる。ここで，

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \ell_0'(x_0) & \ell_1'(x_0) & \cdots & \ell_N'(x_0) \\ \ell_0'(x_1) & \ell_1'(x_1) & \cdots & \ell_N'(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_0'(x_N) & \ell_1'(x_N) & \cdots & \ell_N'(x_N) \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_N \end{Bmatrix}^T \tag{2.72}$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{Bmatrix} q(x_0) & q(x_1) & \cdots & q(x_N) \end{Bmatrix}^T \tag{2.73}$$

であり，$\boldsymbol{I}$ は単位マトリクスである。$\boldsymbol{D}$ は微分マトリクスと呼ばれるマトリクスである。2 階の微分マトリクス $\boldsymbol{D}^2$ は $\boldsymbol{D}$ の積により求められる。同様にしてさらに高階の微分マトリクス $\boldsymbol{D}^3$ や $\boldsymbol{D}^4$ を求めることも可能である。式 (2.71) の各成分は式 (2.65) の両辺の対数をとり，微分することで求められ，最終的に次のように表される。

$$D_{ij} = \frac{1}{a_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i,j}}^{N} (x_i - x_k) = \frac{a_i}{a_j (x_i - x_j)}, \ (i \neq j) \tag{2.74}$$

$$D_{jj} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x_j - x_k)^{-1} \tag{2.75}$$

ただし，

$$a_j = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x_j - x_k) \tag{2.76}$$

である。

式 (2.62) と式 (2.70) を見比べてみると，連立方程式 (2.70) はもとの微分方程式 (2.62) の微分演算子をそのまま微分マトリクスで置き換えた形になっていることが分かる。このように SCM は，考えている問

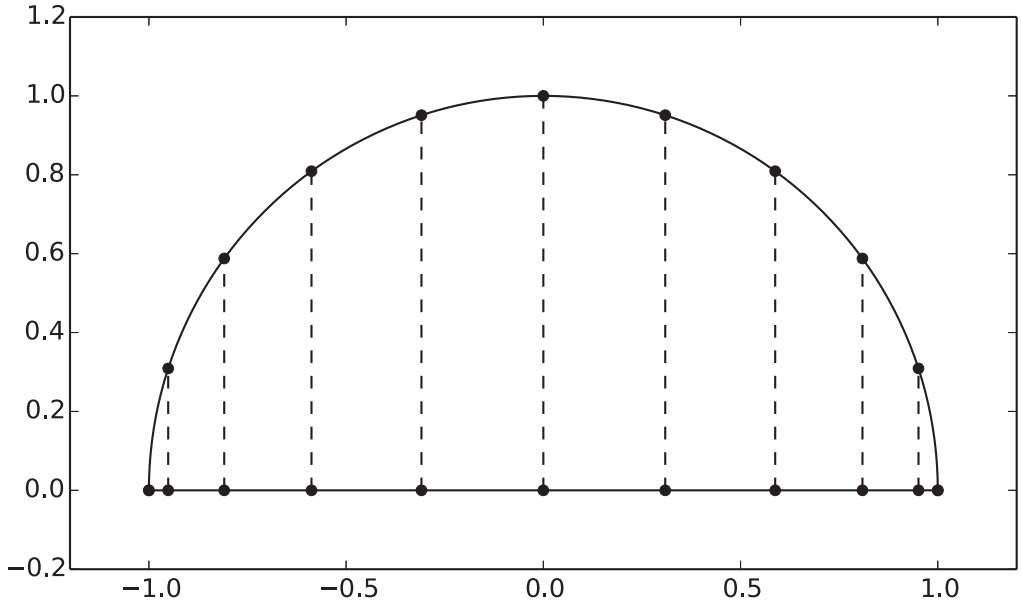


図 2.6: Chebyshev ノードの配置

題の微分方程式が得られていれば，その微分演算子を微分マトリクスで置き換えるだけで最終的に解くべき連立方程式が得られるため，定式化と実装が簡単な手法である。

ここで節点 $x_0, x_1, \ldots, x_N$ をどのように置くべきかという議論がある。SCM と後述する NGM では，微分方程式の解を式 (2.64) のように高次の多項式で近似する。一般的に，滑らかな関数を高次の多項式で補間するとき，等間隔な節点を用いると境界付近で誤差が大きくなる Runge の現象が生じることが知られている。この現象を解消する方法は，境界付近で密度が大きくなる節点を用いることである [5]。このような性質をもつ節点は様々なものが提案されているが，最も簡単なものは Chebyshev ノード (Chebyshev-Lobatto ノード，もしくは Chebyshev-Gauss-Lobatto ノードとも) と呼ばれ，次のように表されるものである。

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right),\ j = 0, 1, \ldots, N \tag{2.77}$$

これは図 2.6 に示すように，単位円上に等間隔に配置した節点を x 軸上に射影したものになっている。また，N 次の Chebyshev 多項式 $T_N(x)$ の極値をとる x 座標に相当している。この Chebyshev ノードを用いることで，高次の補間多項式による解，及びその導関数の補間誤差を抑えられる。Chebyshev ノードを用いたときの微分マトリクスのことを特に Chebyshev 微分マトリクスと呼ぶ。Chebyshev 微分マトリ

クスの各成分は，

$$D_{00} = \frac{2N^2+1}{6} \tag{2.78}$$

$$D_{NN} = -\frac{2N^2+1}{6} \tag{2.79}$$

$$D_{jj} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)},\ j = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{2.80}$$

$$D_{ij} = \frac{c_i}{c_j}\frac{(-1)^{i+j}}{(x_i - x_j)},\ i \neq j,\ i, j = 0, 1, \ldots, N \tag{2.81}$$

ただし，

$$c_i = \begin{cases} 2,\ i = 0 \text{ or } N \\ 1,\ \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.82}$$

で与えられ [5]，式 (2.74)，(2.75) よりも簡単に計算できる。

最後に，式 (2.70) を解くためには，境界条件の設定が必要になる。Dirichlet 境界条件の場合には，式 (2.70) のうち境界の節点についての方程式を，その節点値を決める自明な方程式で置き換えればよい。もしくは，節点値を 0 とする場合にはその節点に関する行と列を式 (2.70) から取り除いてもよい。Neumann 境界条件の場合には，式 (2.70) のうち境界の節点についての方程式を，法線方向微分値を決める方程式で置き換える。例えば，x 方向の粒子速度 u_x は $u_x = -\partial\phi/\partial x$ により求められることから，節点上の粒子速度を並べた粒子速度ベクトル $\boldsymbol{u}_x$ は微分マトリクスを使って，

$$\boldsymbol{u}_x = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{\phi} \tag{2.83}$$

で表される。0 番目の節点に Neumann 境界条件を課すことを考えると，式 (2.70) の 0 番目の方程式の係数を上式の同じく 0 番目の方程式の係数で置き換える。そして，式 (2.70) の右辺を定めたい粒子速度の値で置き換えればよい。また，境界における比音響インピーダンスが $z_x = j\omega\rho\phi/u_x$ で与えられる Robin 境界条件の場合には，式 (2.70) の境界の方程式を，

$$\left[z_x\boldsymbol{D} - j\omega\rho\boldsymbol{I}\right]\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0} \tag{2.84}$$

の対応する方程式で置き換えればよい。

式 (2.70) に境界条件を課して得られた方程式を解くことにより，節点上の速度ポテンシャル ϕ_j が求められる。この ϕ_j を式 (2.64) に代入することで，最終的に微分方程式の近似解 $\tilde{\phi}(x)$ が得られる。

なお，計算精度をある程度保証するために必要な節点数についてであるが，Helmholtz 方程式の場合，Chebyshev ノードの間隔が広くなる領域の中心付近において 1 波長あたりの節点数 (Points Per Wavelength: PPW) が少なくとも 2 あれば，固有周波数の誤差で 1% 以下の，工学的には十分な精度が得られる [5]。

2.3.2 Spectral Nodal Galerkin Method

次に Spectral Nodal Galerkin Method (NGM) について述べる。ここでも例として一次元の Helmholtz 方程式を考え，式 (2.63) を出発点とする。解を式 (2.64) のように Lagrange 補間多項式で近

似するという点は SCM と同じであるが，NGM では重み関数 $\psi_i(x)$ に Lagrange 基底関数を用いる。つまり，

$$\psi_i(x) = \ell_i(x) \tag{2.85}$$

と置く。まず，境界条件を取り扱いやすいように式 (2.63) の第 1 項を部分積分する。

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{1} \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}dx + \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=1}\psi_i(1) - \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=-1}\psi_i(-1) + k^2\int_{-1}^{1}\phi(x)\psi_i(x)dx \\ = -\int_{-1}^{1} q(x)\psi_i(x)dx \end{aligned} \tag{2.86}$$

$-\partial\phi/\partial x = u_x$ より，

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{1} \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}dx - u_x(1)\psi_i(1) + u_x(-1)\psi_i(-1) + k^2\int_{-1}^{1}\phi(x)\psi_i(x)dx \\ = -\int_{-1}^{1} q(x)\psi_i(x)dx \end{aligned} \tag{2.87}$$

と書ける。式 (2.64) と (2.70) を上式に代入すると，

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{1}\sum_{j=0}^{N}\phi_j\ell_j'(x)\ell_i'(x)dx - u_x(1)\ell_i(1) + u_x(-1)\ell_i(-1) + k^2\int_{-1}^{1}\sum_{j=0}^{N}\phi_j\ell_j(x)\ell_i(x)dx \\ = -\int_{-1}^{1} q(x)\ell_i(x)dx \end{aligned} \tag{2.88}$$

となる。ここで，両辺の積分は Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) 数値積分を用いて計算する [7]。これは選点 x_k として N 次の Legendre 多項式の導関数 $L_N'(x)$ の零点と両端の点 $x = -1, 1$，及びそれらの選点における重み α_k として，

$$\alpha_k = \frac{2}{N(N+1)}\frac{1}{[L_N(x_k)]^2} \tag{2.89}$$

を用いる数値積分であり，$2N-1$ 次以下の多項式であれば厳密に積分を計算できる。式 (2.88) の左辺第 1 項の被積分関数は $2N-2$ 次多項式であるから，LGL 数値積分を用いて厳密に計算でき，

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{1}\sum_{j=0}^{N}\phi_j\ell_j'(x)\ell_i'(x)dx &= -\sum_{j=0}^{N}\phi_j\sum_{k=0}^{N}\ell_j'(x_k)\ell_i'(x_k)\alpha_k \\ &= -\sum_{j=0}^{N}\phi_j\sum_{k=0}^{N}D_{kj}D_{ki}\alpha_k \end{aligned} \tag{2.90}$$

となる。ここで，式 (2.71) より $\ell_j'(x_i) = D_{ij}$ であることを用いた。同じようにして式 (2.88) の左辺第 4 項の積分も計算する。ただし，この項の被積分関数は $2N$ 次多項式となっているため，厳密な積分とはならないが，近似的に次のように計算できる。

$$\begin{aligned} k^2\int_{-1}^{1}\sum_{j=0}^{N}\phi_j\ell_j(x)\ell_i(x) &\approx k^2\sum_{j=0}^{N}\phi_j\sum_{k=0}^{N}\ell_j(x_k)\ell_i(x_k)\alpha_k \\ &= k^2\phi_i\alpha_i \end{aligned} \tag{2.91}$$

2 行目への変形には式 (2.66) を用いた。式 (2.88) の右辺も同じようにして，

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{1} q(x)\ell_i(x)dx &\approx -\sum_{k=0}^{N} q(x_k)\ell_i(x_k)\alpha_k \\ &= -q(x_i)\alpha_i \end{aligned} \tag{2.92}$$

と計算できる。これらの結果を用いると式 (2.88) は

$$-\sum_{j=0}^{N}\phi_j\sum_{k=0}^{N}D_{kj}D_{ki}\alpha_k - u_x(1)\ell_i(1) + u_x(-1)\ell_i(-1) + k^2\phi_i\alpha_i = -q(x_i)\alpha_i \tag{2.93}$$

と書ける。境界において比音響インピーダンスが z_x で与えられているとすると，x 方向粒子速度 u_x は $u_x = j\omega\rho\phi/z_x$ と表せる。このことを用いると，

$$-\sum_{j=0}^{N}\phi_j\sum_{k=0}^{N}D_{kj}D_{ki}\alpha_k - \frac{j\omega\rho\ell_i(1)}{z_x}\phi_N + \frac{j\omega\rho\ell_i(-1)}{z_x}\phi_0 + k^2\phi_i\alpha_i = -q(x_i)\alpha_i \tag{2.94}$$

上式を $i = 0, 1, \ldots, N$ についてマトリクス方程式の形で表すと，最終的に

$$\boldsymbol{G\phi} + j\omega\boldsymbol{C\phi} - \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{W\phi} = \boldsymbol{Wq} \tag{2.95}$$

と書ける。ここで，

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{WD} \tag{2.96}$$

$$\boldsymbol{W} = \mathrm{diag}(\alpha_k), \quad k = 0, 1, \ldots N \tag{2.97}$$

であり，マトリクス $\boldsymbol{C}$ は $C_{00} = -\rho/z_x, C_{NN} = \rho/z_x$，それ以外の成分は 0 となるマトリクスである。マトリクス $\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{C}$，$1/c^2\boldsymbol{W}$ はそれぞれ NGM における剛性マトリクス，減衰マトリクス，質量マトリクスを表している。式 (2.95) を解くことで，節点上の速度ポテンシャル ϕ_j が求められる。得られた ϕ_j を SCM と同じように式 (2.64) に代入することで，近似解 $\tilde{\phi}(x)$ が求められる。

NGM は微分マトリクスによる数値微分に加えて数値積分を行うため，SCM よりも定式化と実装が少し複雑になる。しかし，SCM では境界条件を与えるためには連立方程式を書き換える必要があったのに対して，NGM では新たなマトリクスを加えるだけで，より自然に境界条件を取り入れることができる。また，NGM の係数マトリクスは対称となるため，Cholesky 分解など対称マトリクスの解法を用いることが可能である。

2.3.3　二次元空間への拡張

デカルト座標系の離散化

前項では一次元の Helmholtz 方程式を考えたが，次に二次元空間へ拡張することを考える。xy 平面を解析する場合，x 方向と y 方向をそれぞれ Chebyshev ノードや LGL ノードに離散化する。図 2.7 のように節点番号 n をつけ，各節点における節点値を ϕ_n とし，x 方向の微分を作用する $N_x + 1$

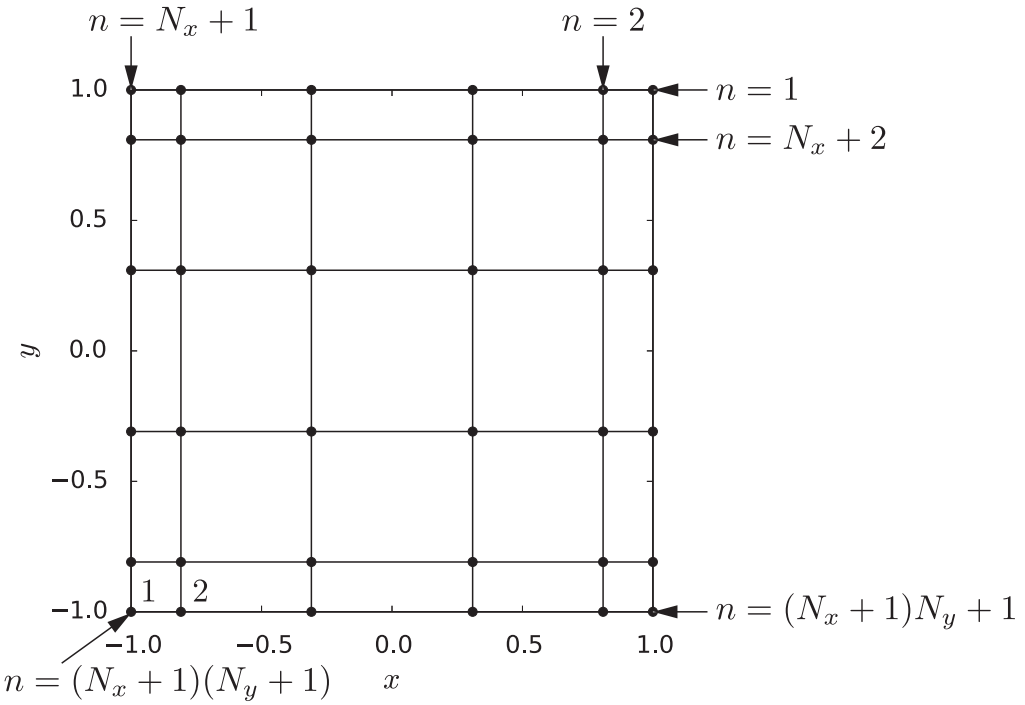


図 2.7: 二次元空間の離散化の例

行 $N_x + 1$ 列の微分マトリクスを $\boldsymbol{D}_x$ とすると，1 から $N_x + 1$ 番目の節点における x 方向の微係数 $\{\phi_{1,x}\ \phi_{2,x}\ \cdots\ \phi_{N_x+1,x}\}^{\mathrm{T}}$ は

$$\begin{Bmatrix} \phi_{1,x} \\ \phi_{2,x} \\ \vdots \\ \phi_{N_x+1,x} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{D}_x \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{N_x+1} \end{Bmatrix} \tag{2.98}$$

により求められる。同様にして $N_x + 2$ から $2(N_x + 1)$ 番目の節点における x 方向微分 $\{\phi_{N_x+2,x}\ \phi_{N_x+3,x}\ \cdots\ \phi_{2(N_x+1),x}\}^{\mathrm{T}}$ は

$$\begin{Bmatrix} \phi_{N_x+2,x} \\ \phi_{N_x+3,x} \\ \vdots \\ \phi_{2(N_x+1),x} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{D}_x \begin{Bmatrix} \phi_{N_x+2} \\ \phi_{N_x+3} \\ \vdots \\ \phi_{2(N_x+1)} \end{Bmatrix} \tag{2.99}$$

により求められる。これらはクロネッカー積 $\otimes$ を用いると，すべての節点値と微係数を並べたベクトル $\boldsymbol{\phi}$ と $\boldsymbol{\phi}_x$ について

$$\boldsymbol{\phi}_x = \boldsymbol{I}_y \otimes \boldsymbol{D}_x \boldsymbol{\phi} \tag{2.100}$$

と書くことができる。ここで $\boldsymbol{I}_y$ は $N_y + 1$ 行 $N_y + 1$ 列の単位行列である。同じようにして y 方向の微係数 $\boldsymbol{\phi}_y$ は，y 方向の微分を作用する $N_y + 1$ 行 $N_y + 1$ 列の微分マトリクス $\boldsymbol{D}_y$ と $N_x + 1$ 行 $N_x + 1$ 列の単位行列 $\boldsymbol{I}_x$ を用いて

$$\boldsymbol{\phi}_y = \boldsymbol{D}_y \otimes \boldsymbol{I}_x \boldsymbol{\phi} \tag{2.101}$$

により求められる。このことを利用して二次元の Helmholtz 方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+k^2\phi=-q \tag{2.102}$$

を微分マトリクスにより離散化すると

$$\left[\boldsymbol{I}_y\otimes\boldsymbol{D}_x^2+\boldsymbol{D}_y^2\otimes\boldsymbol{I}_x+k^2\boldsymbol{I}_y\otimes\boldsymbol{I}_x\right]\boldsymbol{\phi}=-\boldsymbol{q} \tag{2.103}$$

という SCM のマトリクス方程式が得られる。

NGM の場合には微分マトリクスに加えて，積分の重みを対角成分に並べたマトリクス $\boldsymbol{W}$ が必要になる。これについても x 方向と y 方向それぞれの重みを対角成分に並べたマトリクス $\boldsymbol{W}_x$ と $\boldsymbol{W}_y$ のクロネッカー積で

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}_y\otimes\boldsymbol{W}_x \tag{2.104}$$

と表すことができる。二次元の Helmholtz 方程式を NGM で離散化すると，

$$\left[\left[\boldsymbol{I}_y\otimes\boldsymbol{D}_x\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\left[\boldsymbol{I}_y\otimes\boldsymbol{D}_x\right]+\left[\boldsymbol{D}_y\otimes\boldsymbol{I}_x\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\left[\boldsymbol{D}_y\otimes\boldsymbol{I}_x\right]-\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{W}\right]\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{q} \tag{2.105}$$

というマトリクス方程式になる。なお，三次元の場合にもクロネッカー積を繰り返し用いることで同じように定式化が可能である。

円座標系の離散化

本論文で解析対象としている膜鳴楽器の多くは軸対称な形状を有しており，そのような解析対象には円座標系や円筒座標系などの極座標系を用いたほうが便利である。極座標系の微分方程式にスペクトル法を適用する場合，技巧的な定式化が必要になるため，ここで説明しておく。

まず，円座標系 (r,θ) の Helmholtz 方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+k^2\phi=-q \tag{2.106}$$

r 方向の微分を作用する微分マトリクス $\boldsymbol{D}_r$ と θ 方向の微分を作用する微分マトリクス $\boldsymbol{D}_\theta$ を用いれば，上式を離散化することができる。円座標系の θ 方向のように周期境界条件を有する方向の微分マトリクスの成分は

$$(D_\theta)_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(-1)^{i+j}\cot\dfrac{(j-i)\pi}{N}, & j\neq i\\ 0, & j=i\end{cases} \tag{2.107}$$

で表される [7]。r 方向の微分マトリクス $\boldsymbol{D}_r$ には 2.3.1 項で導出した微分マトリクスを用いればよい。ここで，解析領域が

$$r\in[0,1]$$
$$\theta\in[0,2\pi]$$

であるとすると，$r\in[0,1]$ の区間をそのまま Chebyshev ノードや LGL ノードで離散化することもできるが，解析領域の実際の境界ではない原点の付近に節点が密に集まってしまい，非効率である。そこで，

$r \in [-1,1]$ の区間を離散化することを考える。なお，原点は特異点であるが，r 方向の節点数 N_r+1 を偶数とし，原点に節点を設置しないことで特別な処理が不要になる。$\boldsymbol{D}_r$ を $r \in [-1,1]$ に作用する微分マトリクスとして，式 (2.106) を離散化すると，

$$\left[\boldsymbol{D}_r^2 \otimes \boldsymbol{I}_\theta + \boldsymbol{R}\boldsymbol{D}_r \otimes \boldsymbol{I}_\theta + \boldsymbol{R}^2 \otimes \boldsymbol{D}_\theta^2 + k^2 \boldsymbol{I}_r \otimes \boldsymbol{I}_\theta\right] \boldsymbol{\phi} = -\boldsymbol{q} \tag{2.108}$$

というマトリクス方程式が得られる。r 方向と θ 方向の節点数をそれぞれ N_r+1，N_θ とすると，$\boldsymbol{I}_r$ は N_r+1 行 N_r+1 列の単位行列，$\boldsymbol{I}_\theta$ は N_θ 行 N_θ 列の単位行列，また，マトリクス $\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{diag}(r_j), \quad j = 1, 2, \ldots N_r+1 \tag{2.109}$$

であり，式 (2.108) は $(N_r+1)N_\theta$ 個の連立方程式を表している。ただし，r 方向については $r \in [-1,1]$ を離散化しているので，未知数 $\boldsymbol{\phi}$ のうち，下半分の $(N_r+1)/2 \times N_\theta$ 個は，並んでいる順番は違うが，上半分の $(N_r+1)/2 \times N_\theta$ 個と同じ節点値を意味している。つまり，求める必要のない未知数ということになる。さらに，式 (2.108) のうち，下半分の $(N_r+1)/2 \times N_\theta$ 個の方程式は，上半分の $(N_r+1)/2 \times N_\theta$ 個の方程式と同じ方程式を表している。

ここで，四つの $N \times N$ のマトリクス $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{A}_3$，$\boldsymbol{A}_4$ から構成される $2N \times 2N$ のマトリクス $\boldsymbol{A}$ と二つの N 行のベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ から構成される $2N$ 行のベクトル $\boldsymbol{x}$ の積について考える。それらの積を書き下すと，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{Bmatrix} \tag{2.110}$$

となる。今，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ という条件が成り立っているとすると，積 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ のうち，1 行目から N 行目は，

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_{1:N} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_1 = [\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2]\,\boldsymbol{x}_1 \tag{2.111}$$

により計算できる。このことを式 (2.108) に利用する。

マトリクス方程式 (2.108) の節点番号と (r,θ) 座標は図 2.8 のように対応している。図 2.8 のうち r 座標が負の領域，つまり領域 III と IV が表している座標はそれぞれ領域 II，I と同じである。そこで，領域 I と II に含まれる節点のみを用いることとする。式 (2.110) と (2.111) に倣って，r に関する 2 階微分マトリクス $\boldsymbol{D}_r^2$ と 1 階微分マトリクス $\boldsymbol{D}_r$ を次のように四つの $(N_r+1)/2 \times (N_r+1)/2$ のブロックに分割する。

$$\boldsymbol{D}_r^2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{D}_2 \\ \boldsymbol{D}_3 & \boldsymbol{D}_4 \end{bmatrix} \tag{2.112}$$

$$\boldsymbol{D}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{E}_4 \end{bmatrix} \tag{2.113}$$

分割したブロックのうち，$\boldsymbol{D}_1$ と $\boldsymbol{D}_2$ および $\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{E}_2$ を用いる。ただし，$\boldsymbol{D}_2$ と $\boldsymbol{E}_2$ はもともと r 座標が負の節点，つまり図 2.8 の領域 III もしくは IV に含まれる節点に作用するべきマトリクスであったが，領域 III と IV の節点は用いないこととしたので，代わりに領域 I もしくは II の節点に作用するように修正する必要がある。領域 I，II と III，IV を見比べてみると，領域 III と IV の上下を反転し，III と IV を入れ替えたものが領域 I と II に対応している。上下の反転を実現する操作は $\boldsymbol{D}_2$ と $\boldsymbol{E}_2$ の列を反転することである。さらに，上下を反転した領域 III と IV を入れ替えるという操作は，マトリクス

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \tilde{\boldsymbol{I}}_\theta \\ \tilde{\boldsymbol{I}}_\theta & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \tag{2.114}$$

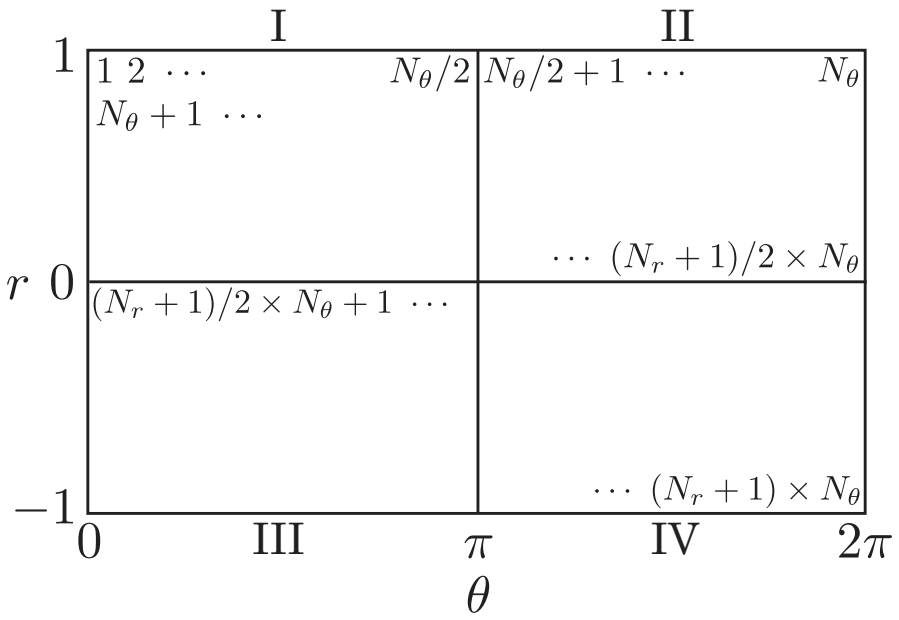


図 2.8: (r,θ) 座標と節点番号の対応

とのクロネッカー積をとればよい。ただし，$\tilde{\boldsymbol{I}}_\theta$ は $N_\theta/2\times N_\theta/2$ の単位行列である。

これらの操作によってマトリクス方程式 (2.108) のうち，r 座標が負の節点に関する方程式を消去すると，最終的に

$$\left[\boldsymbol{L}+k^2\tilde{\boldsymbol{I}}_r\otimes\boldsymbol{I}_\theta\right]\tilde{\boldsymbol{\phi}}=-\tilde{\boldsymbol{q}} \tag{2.115}$$

というマトリクス方程式が得られる。ただし，

$$\boldsymbol{L}=\left[\boldsymbol{D}_1+\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{E}_1\right]\otimes\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{I}}_\theta & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \tilde{\boldsymbol{I}}_\theta\end{bmatrix}+\left[\bar{\boldsymbol{D}}_2+\tilde{\boldsymbol{R}}\bar{\boldsymbol{E}}_2\right]\otimes\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \tilde{\boldsymbol{I}}_\theta\\ \tilde{\boldsymbol{I}}_\theta & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}+\tilde{\boldsymbol{R}}^2\otimes\boldsymbol{D}_\theta^2 \tag{2.116}$$

$$\tilde{\boldsymbol{R}}=\mathrm{diag}(r_j),\quad j=1,2,\ldots(N_r+1)/2 \tag{2.117}$$

であり，マトリクス $\bar{\boldsymbol{D}}_2$ と $\bar{\boldsymbol{E}}_2$ はそれぞれ，$\boldsymbol{D}_2$ と $\boldsymbol{E}_2$ の列を反転したマトリクス，$\tilde{\boldsymbol{I}}_r$ は $(N_r+1)/2\times(N_r+1)/2$ の単位行列である。

第 3 章

理論解析解と法線方向微分型境界要素法による膜鳴楽器の音響振動連成解析および設計

本章では膜鳴楽器の単純なモデルとして，剛性のないしなやかな円形膜と薄い構造体周りの音場からなるモデルを考え，それらの連成解析手法を構築し，それを用いた膜鳴楽器の設計例について示す。

まず，音場の解析には境界要素法 (BEM) を用いる。BEM は有限要素法 (FEM) や時間領域差分法 (FDTD 法) のように領域全体を離散化する必要がなく，境界のみの離散化だけでよい。外部音場については FEM や FDTD 法を用いた先行研究 [4, 13, 15] のように仮想的な吸音境界を設定することなく，自由音場の放射条件を厳密に満たす。また，膜鳴楽器を構成するヘッドとシェルは，音波の波長に対して十分に薄い構造体であると見なすことができるため，定式化に法線方向微分型の境界積分方程式を用いることにより，構造体の表裏を区別することなく一つの要素として離散化できる。

ヘッドの振動については，円形膜振動場の理論解析解を用い，Yasuda らの手法 [21] によって BEM と連成する。この手法は BEM のマトリクスに膜振動場の特性マトリクスを加えることで，マトリクス方程式の自由度を増やすことなく膜振動場との連成解析が可能である。

実際のティンパニの周波数応答関数の実測結果と比較し，解析手法としての妥当性を検証した後，提案解析手法に基づく膜鳴楽器の設計例を示す。膜鳴楽器の中でも固有周波数が整数比に近く，ピッチ感をもつことが知られているティンパニを対象としてとりあげる。

先行研究 [10] において，Christian らはヘッドの張力とケトルの容積をそれぞれ独立に変化させながら，それらが固有周波数比に与える影響を別個に調査し，ヘッドの張力を変化させても固有周波数比はわずかにしか変化しないことや，ケトルの容積を小さくすると固有周波数比が整数比からずれていくことなどを述べている。本論文ではヘッドの面密度とケトル形状をパラメータとして新たに加え，さらに各パラメータの相互依存性についても考慮し，より広範囲の計算を行う。固有周波数と整数比の誤差を測る評価関数を定義し，その評価関数を小さくするヘッドの面密度，張力，ケトルの形状，容積，およびそれらの相互依存性について総合的に考察する。

3.1 提案解析手法

3.1.1 理論解析解による円形膜振動場の解析

まず，固有モード展開による円形膜振動場の理論解析解を導出する。面密度を ρ_{M}，張力を T，変位を $\zeta(r,\theta,t)$，加振圧力を $P(r,\theta,t)$ としたときの円形膜の強制振動の振動方程式は次式のように与えられる [22]。

$$\rho_{\mathrm{M}}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=T\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}\right)\right\}+P(r,\theta,t) \tag{3.1}$$

上式は，時間依存項を $e^{j\omega t}$ とすると，

$$T\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}\right)\right\}+\rho_{\mathrm{M}}\omega^2\zeta=-P(r,\varphi) \tag{3.2}$$

と書くことができる。上式の加振圧力を 0 としたときの半径 a の円形膜の自由振動の固有モード関数 N_{nm} と固有角周波数 ω_{nm} はそれぞれ，

$$N_{nm}(r,\varphi)=J_n\left(\frac{\alpha_{nm}}{a}r\right)\cos n\theta \tag{3.3}$$

$$\omega_{nm}=c_{\mathrm{M}}\frac{\alpha_{nm}}{a} \tag{3.4}$$

である。ここで，α_{nm} は第一種 n 次ベッセル関数 $J_n(x)$ の m 番目の零点を表す。また，c_{M} は膜を伝わる横波の伝搬速度であり，

$$c_{\mathrm{M}}=\sqrt{\frac{T}{\rho_{\mathrm{M}}}} \tag{3.5}$$

である。変位 ζ を固有関数で級数展開して，

$$\zeta(r,\theta)=\sum_{n,m}\eta_{nm}N_{nm}(r,\theta) \tag{3.6}$$

と表し，式 (3.2) に代入すると，

$$-\sum_{n,m}\rho_{\mathrm{M}}\omega_{nm}^2\eta_{nm}N_{nm}+\rho_{\mathrm{M}}\omega^2\sum_{n,m}\eta_{nm}N_{nm}=-P \tag{3.7}$$

と書くことができる。ここで固有関数 N_{nm} は，

$$\int_0^a\int_0^{2\pi}N_{nm}N_{n'm'}rd\theta dr=\begin{cases}0, & (n'\neq n \text{ or } m'\neq m)\\ \Lambda_{nm}, & (n'=n \text{ and } m'=m)\end{cases} \tag{3.8}$$

ただし，

$$\begin{cases}\Lambda_{0m}=\pi a^2J_1^2(\alpha_{0m}), & (n=0)\\ \Lambda_{nm}=\dfrac{\pi a^2}{2}J_{n-1}^2(\alpha_{nm}), & (n>0)\end{cases} \tag{3.9}$$

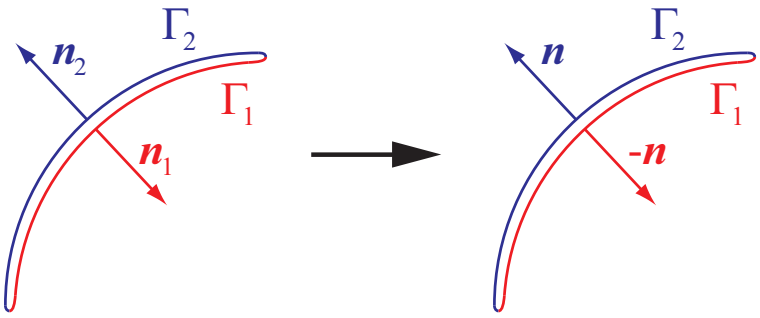


図 3.1: 薄い障害物の概念図

となるような直交性をもっており，その規準化因数は Λ_{nm} である。式 (3.7) の両辺に N_{nm} をかけて，積分を行い，上記のような直交性を利用すると，

$$\rho_{\mathrm{M}}\omega_{nm}^2\eta_{nm} - \rho_{\mathrm{M}}\omega^2\eta_{nm} = \Lambda_{nm}^{-1}\int_0^a\int_0^{2\pi} PN_{nm}rd\theta dr \tag{3.10}$$

となる。これより η_{nm} は，

$$\eta_{nm} = \frac{\displaystyle\int_0^a\int_0^{2\pi} PN_{nm}rd\theta dr}{\rho_{\mathrm{M}}\Lambda_{nm}(\omega_{nm}^2-\omega^2)} \tag{3.11}$$

となり，変位は，

$$\zeta(r,\theta) = \sum_{n,m}\frac{\displaystyle\int_0^a\int_0^{2\pi} PN_{nm}rd\theta dr}{\rho_{\mathrm{M}}\Lambda_{nm}(\omega_{nm}^2-\omega^2)}N_{nm}(r,\theta) \tag{3.12}$$

となる。特に，加振圧力 P が $P = f\delta(r-r_{\mathrm{s}},\theta-\theta_{\mathrm{s}})$ のような点加振圧力として与えられる場合は，

$$\zeta(r,\theta) = \sum_{n,m}\frac{fN_{nm}(r_{\mathrm{s}},\theta_{\mathrm{s}})}{\rho_{\mathrm{M}}\Lambda_{nm}(\omega_{nm}^2-\omega^2)}N_{nm}(r,\theta) \tag{3.13}$$

となる。

3.1.2 法線方向微分型境界要素法による音場の解析

ここでは障害物が非常に薄い場合を考え，Terai の方法 [23] による音場解析について述べる。図 3.1 に示すような境界面 Γ で囲まれた非常に薄い障害物が音場内にある場合を考えると，境界面 Γ は表側 Γ_1 と裏側 Γ_2 の和として表すことができる。それぞれの面の法線方向ベクトルを $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ と決めると，障害物が非常に薄くその厚さを無視できるため，$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ はお互い逆の方向を向くことになり，$\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$ が成

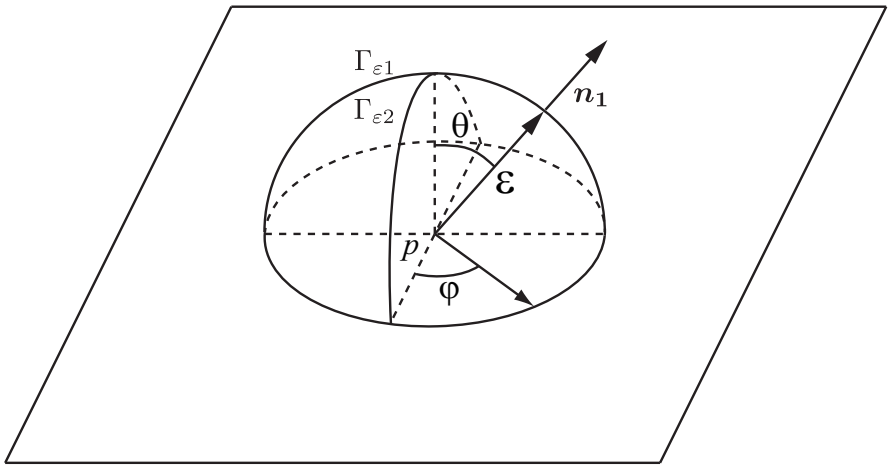


図 3.2: 境界に付加した半径 ε の半球

立する。これを利用し，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_2$ と決めて式 (2.51) を書きなおすと，

$$\begin{aligned}
\phi(p) &= \int_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} \psi \right) dS + Q\psi \\
&= \int_{\Gamma_1} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}_1} - \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}_1} \psi \right) dS + \int_{\Gamma_2} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}_2} - \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}_2} \psi \right) dS + Q\psi \\
&= \left(\int_{\Gamma_2} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}} dS - \int_{\Gamma_1} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}} dS \right) - \left(\int_{\Gamma_2} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} \psi dS - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} \psi dS \right) + Q\psi
\end{aligned} \tag{3.14}$$

となる。ここで $\tilde{\phi} = \phi(\Gamma_2) - \phi(\Gamma_1)$ となる速度ポテンシャル表裏差 $\tilde{\phi}$ を導入する。これを用いると上式は，

$$\phi(p) = \int_{\Gamma} \left(\tilde{\phi} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \boldsymbol{n}} \psi \right) dS + Q\psi \tag{3.15}$$

となる。この式は音場 Ω 内の任意の受音点 p での速度ポテンシャルが，境界面上の速度ポテンシャル表裏差の積分値によって表すことができることを意味している。

次に，この $\tilde{\phi}$ を求めるために境界面 Γ 上に受音点がある場合について考える。境界面 Γ_2 上の任意の受音点 p に対して，境界を挟んだ裏側 Γ_1 の点を $\hat{p}$ とおく。図 3.2 のように，境界面 Γ_2 上の点 p を中心とする半径 ε の微小半球を付加し，その両側の境界面をそれぞれ $\Gamma_{\varepsilon 1}$，$\Gamma_{\varepsilon 2}$ とすることによって，点 p は Ω

に含まれ，式 (2.49) を用いることができる。式 (2.51) を変形すると，

$$\begin{aligned}
\phi(p) &= \int_{\Gamma}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}-\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\psi\right)dS+Q\psi \\
&= \int_{\Gamma_1}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_1}-\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_1}\psi\right)dS+\int_{\Gamma_2}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_2}-\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_2}\psi\right)dS \\
&\quad+\int_{\Gamma_{\varepsilon1}}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_1}-\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_1}\psi\right)dS+\int_{\Gamma_{\varepsilon2}}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_2}-\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_2}\psi\right)dS+Q\psi \\
&= \left(\int_{\Gamma_2}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_2}dS+\int_{\Gamma_1}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_1}dS\right)-\left(\int_{\Gamma_2}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_2}\psi dS+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_1}\psi dS\right) \\
&\quad+\left(\int_{\Gamma_{\varepsilon2}}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_2}dS+\int_{\Gamma_{\varepsilon1}}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_1}dS\right)-\left(\int_{\Gamma_{\varepsilon2}}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_2}\psi dS+\int_{\Gamma_{\varepsilon1}}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_1}\psi dS\right)+Q\psi
\end{aligned}\tag{3.16}$$

となる。上式の第 3，4 項目の ε に関する項を取り出し，

$$I=\left(\int_{\Gamma_{\varepsilon2}}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_2}dS+\int_{\Gamma_{\varepsilon1}}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_1}dS\right)-\left(\int_{\Gamma_{\varepsilon2}}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_2}\psi dS+\int_{\Gamma_{\varepsilon1}}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_1}\psi dS\right)\tag{3.17}$$

とおく。ここで微小半球 Γ_ε に関して，以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases}
dS=\varepsilon^2\sin\theta d\theta d\varphi \\
\psi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}e^{-jk\varepsilon} \\
\dfrac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_1}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_2}=-\dfrac{1+jk\varepsilon}{4\pi\varepsilon^2}e^{-jk\varepsilon}
\end{cases}\tag{3.18}$$

これらを式 (3.17) に代入すると I は，

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\phi(\Gamma_{\varepsilon1})\left(-\frac{1+jk\varepsilon}{4\pi\varepsilon^2}\right)e^{-jk\varepsilon}\varepsilon^2\sin\theta d\theta d\varphi+\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\phi(\Gamma_{\varepsilon2})\left(\frac{1+jk\varepsilon}{4\pi\varepsilon^2}\right)e^{-jk\varepsilon}\varepsilon^2\sin\theta d\theta d\varphi \\
&\quad-\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\phi(\Gamma_{\varepsilon1})}{\partial\boldsymbol{n}_1}\frac{1}{4\pi\varepsilon}e^{-jk\varepsilon}\varepsilon^2\sin\theta d\theta d\varphi-\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\phi(\Gamma_{\varepsilon2})}{\partial\boldsymbol{n}_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon}e^{-jk\varepsilon}\varepsilon^2\sin\theta d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\phi(\Gamma_{\varepsilon1})\left(-\frac{1+jk\varepsilon}{4\pi}\right)e^{-jk\varepsilon}\sin\theta d\theta d\varphi+\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\phi(\Gamma_{\varepsilon2})\left(\frac{1+jk\varepsilon}{4\pi}\right)e^{-jk\varepsilon}\sin\theta d\theta d\varphi \\
&\quad-\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\phi(\Gamma_{\varepsilon1})}{\partial\boldsymbol{n}_1}\frac{1}{4\pi}e^{-jk\varepsilon}\varepsilon\sin\theta d\theta d\varphi-\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\phi(\Gamma_{\varepsilon2})}{\partial\boldsymbol{n}_2}\frac{1}{4\pi}e^{-jk\varepsilon}\varepsilon\sin\theta d\theta d\varphi
\end{aligned}\tag{3.19}$$

となる。ここで $\varepsilon\to0$ とすると，$\phi(\Gamma_{\varepsilon1})$，$\phi(\Gamma_{\varepsilon2})$ はそれぞれ $\phi(\hat{p})$，$\phi(p)$ に近付くため，

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to0}I &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4\pi}\phi(\Gamma_{\varepsilon1})\sin\theta d\theta d\varphi+\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4\pi}\phi(\Gamma_{\varepsilon2})\sin\theta d\theta d\varphi \\
&= -\frac{1}{2}\phi(\hat{p})+\frac{1}{2}\phi(p)
\end{aligned}\tag{3.20}$$

となる。これを用いて式 (3.16) を書きなおすと，

$$\begin{aligned}\phi(p) &= \left(\int_{\Gamma_2}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_2}dS+\int_{\Gamma_1}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_1}dS\right)-\left(\int_{\Gamma_2}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_2}\psi dS+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_1}\psi dS\right)\\ &\quad+\left(\int_{\Gamma_{\varepsilon 2}}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_2}dS+\int_{\Gamma_{\varepsilon 1}}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_1}dS\right)-\left(\int_{\Gamma_{\varepsilon 2}}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_2}\psi dS+\int_{\Gamma_{\varepsilon 1}}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_1}\psi dS\right)+Q\psi\\ &=\left(\int_{\Gamma_2}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}dS-\int_{\Gamma_1}\phi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}dS\right)-\left(\int_{\Gamma_2}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\psi dS-\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\psi dS\right)\\ &\quad-\frac{1}{2}\phi(\hat{p})+\frac{1}{2}\phi(p)+Q\psi\end{aligned}\tag{3.21}$$

となる。上式に速度ポテンシャル表裏差 $\tilde{\phi}$ を導入することによって，速度ポテンシャルと速度ポテンシャル表裏差の次のような関係式が得られる。

$$\frac{1}{2}\phi(\hat{p})+\frac{1}{2}\phi(p)=\int_\Gamma\left(\tilde{\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}-\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\boldsymbol{n}}\psi\right)dS+Q\psi\ (p\in\Gamma)\tag{3.22}$$

さらに，上式を受音点 p がある境界での法線 $\boldsymbol{n}_p$ 方向で微分すると，

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\phi(\hat{p})}{\partial\boldsymbol{n}_p}+\frac{1}{2}\frac{\partial\phi(p)}{\partial\boldsymbol{n}_p}=\int_\Gamma\left(\tilde{\phi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{n}_p\partial\boldsymbol{n}}-\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\boldsymbol{n}}\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_p}\right)dS+Q\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_p}\tag{3.23}$$

となる。ここで，$-\partial\phi(p)/\partial\boldsymbol{n}_p$ は，Γ 上の点 p における粒子速度に等しいため，これを $q(p)$ とおくと，

$$-\int_\Gamma\left(\tilde{\phi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{n}_p\partial\boldsymbol{n}}-\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\boldsymbol{n}}\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_p}\right)dS=\frac{1}{2}q(p)+\frac{1}{2}q(\hat{p})+Q\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_p}\tag{3.24}$$

となり，速度ポテンシャルと速度ポテンシャル表裏差の関係式であったものが，粒子速度と速度ポテンシャル表裏差の関係式として表された。ここで今，障害物が非常に薄いと仮定しているので，障害物の表側と裏側で粒子速度は等しいと考えられ，以下の関係が成り立つ。

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\boldsymbol{n}}=0\\ q(p)=q(\hat{p})\end{cases}\tag{3.25}$$

これより式 (3.24) は，

$$-\int_\Gamma\tilde{\phi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{n}_p\partial\boldsymbol{n}}dS=q(p)+Q\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_p}\tag{3.26}$$

となる。この積分方程式を解くために，境界を離散化し，i 番目の要素の法線方向ベクトルを $\boldsymbol{n}_i$ とすると，

$$-\sum_j\int_{\Gamma_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{n}_i\partial\boldsymbol{n}}dS\tilde{\phi}_j=q_i+Q\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}_i}\tag{3.27}$$

と表すことができる。これをすべての要素についてマトリクス方程式として，

$$\boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}}\tag{3.28}$$

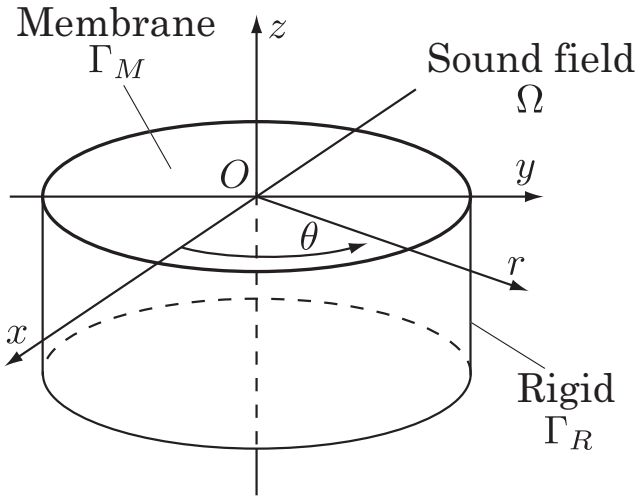


図 3.3: 解析モデル

と書くことができる。ここで，

$$H_{ij} = -\int_{\Gamma_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{n}_i \partial \boldsymbol{n}} dS \tag{3.29}$$

$$q_i^{\mathrm{I}} = Q \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}_i} \tag{3.30}$$

である。肩付きの添字 I は直接音の項であることを表している。これより各境界要素の粒子速度が既知であれば，速度ポテンシャル表裏差を求めることができる。さらにここで求めた速度ポテンシャル表裏差を式 (3.15) に代入することによって，音場 Ω 内の任意の受音点における速度ポテンシャルを求めることができる。

3.1.3 音響振動場の連成解析

ここでは図 3.3 のような円形膜振動場と音場からなるモデルを考え，それらの連成解析手法について述べる。Yasuda らによって定式化された，弾性板振動場の理論解析解と音場の法線方向微分型 BEM を用いた連成解析手法 [21] を円形膜振動場と音場に適用する。なお，以降は音場内に膜振動場以外の音源はないものとして定式化を進める。

まず，膜に加わる圧力 P は，膜の表裏の音圧差と，その他の機械的な加振圧力で与えられる。機械的な加振圧力を $f\delta(r_{\mathrm{s}}, \theta_{\mathrm{s}})$，空気の密度を ρ とし，図 3.3 の膜の表側を音場の境界面 Γ_2 とすると，

$$P = f\delta(r_{\mathrm{s}}, \theta_{\mathrm{s}}) - \rho \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = f\delta(r_{\mathrm{s}}, \theta_{\mathrm{s}}) - j\omega\rho\tilde{\phi} \tag{3.31}$$

となり，これを式 (3.12) に代入すると，

$$\zeta(r,\theta) = \sum_{n,m} \frac{f N_{nm}(r_s, \theta_s)}{\rho_M \Lambda_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} N_{nm}(r,\theta) - \sum_{n,m} \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_M} j\omega\rho\tilde{\phi} N_{nm} dS}{\rho_M \Lambda_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} N_{nm}(r,\theta) \tag{3.32}$$

となる。次に，膜上の粒子速度は膜の振動速度と等しくなるため，粒子速度 q と膜の振動変位 ζ の間には，

$$q = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = j\omega\zeta \tag{3.33}$$

という関係が成り立つ。上式に式 (3.32) を代入し，音場と連成するために $\tilde{\phi}$ に関する項を離散化すると，i 番目の要素の粒子速度 q_i は，

$$q_i = \frac{j\omega}{\rho_{\mathrm{M}}} \sum_{n,m} \frac{f N_{nm}(r_{\mathrm{s}}, \theta_{\mathrm{s}})}{\Lambda_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} N_{nm}(r_i, \theta_i) + \frac{\omega^2 \rho}{\rho_{\mathrm{M}}} \sum_{\substack{j \\ \Gamma_j \in \Gamma_{\mathrm{M}}}} \sum_{n,m} \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_j} N_{nm} dS}{\Lambda_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} N_{nm}(r_i, \theta_i) \tilde{\phi}_j \tag{3.34}$$

となる。さらにこれを式 (3.27) に代入すると，ζ が消去された形で，膜振動場と音場が連成した方程式が得られる。

$$\begin{aligned} -\sum_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{n}_i \partial \boldsymbol{n}} dS \tilde{\phi}_j = {} & \frac{j\omega}{\rho_{\mathrm{M}}} \sum_{n,m} \frac{f N_{nm}(r_{\mathrm{s}}, \theta_{\mathrm{s}})}{\Lambda_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} N_{nm}(r_i, \theta_i) \\ & + \frac{\omega^2 \rho}{\rho_{\mathrm{M}}} \sum_{\substack{j \\ \Gamma_j \in \Gamma_{\mathrm{M}}}} \sum_{n,m} \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_j} N_{nm} dS}{\Lambda_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} N_{nm}(r_i, \theta_i) \tilde{\phi}_j \end{aligned} \tag{3.35}$$

ここで $\displaystyle\sum_{\substack{j \\ \Gamma_j \in \Gamma_{\mathrm{M}}}}$ は，膜面 Γ_{M} 内の j 番目の境界要素についての和を表す。未知数である速度ポテンシャル表裏差に関する項を左辺に移項すると，

$$\sum_j a_{i,j} \tilde{\phi}_j + \sum_{\substack{j \\ \Gamma_j \in \Gamma_{\mathrm{M}}}} b_{i,j} \tilde{\phi}_j = c_i \tag{3.36}$$

となる。ただし，

$$a_{i,j} = -\int_{\Gamma_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{n}_i \partial \boldsymbol{n}} dS \tag{3.37}$$

$$b_{i,j} = -\frac{\omega^2 \rho}{\rho_{\mathrm{M}}} \sum_{n,m} \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_j} N_{nm} dS}{\Lambda_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} N_{nm}(r_i, \theta_i) \tag{3.38}$$

$$c_i = \frac{j\omega}{\rho_{\mathrm{M}}} \sum_{n,m} \frac{f N_{nm}(r_s, \theta_s)}{\Lambda_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} N_{nm}(r_i, \theta_i) \tag{3.39}$$

である。すべての i 番目の要素についての方程式を並べると，

$$[\boldsymbol{H} + \boldsymbol{G}] \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{q}' \tag{3.40}$$

というマトリクス方程式として表される。新しく導入した $\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{q}'$ はそれぞれ，膜の振動変位と音場の速度ポテンシャル間の相互作用を表すマトリクス，膜への機械的な加振圧力が音場に対して振動境界として働くことを表すベクトルとなっている。この方程式を解くことにより，境界上の速度ポテンシャル表裏差が得られる。さらに得られた速度ポテンシャル表裏差を式 (3.15) に代入することによって，音場内の任意の受音点での速度ポテンシャルを計算することができる。

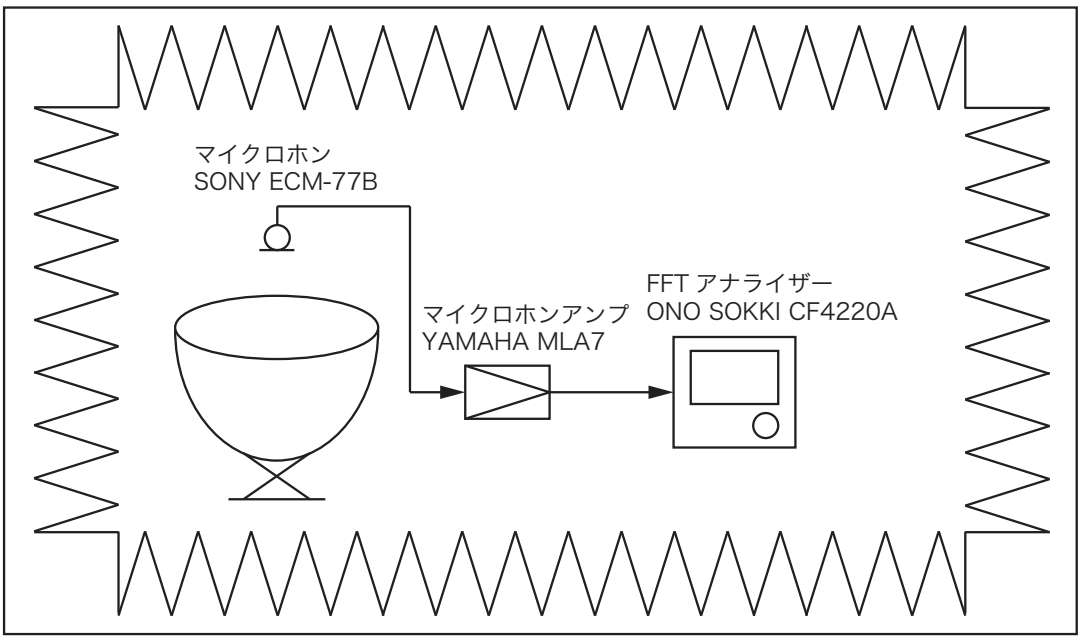


図 3.4: 測定系のブロックダイアグラム

3.2 実測結果との比較

3.2.1 計算条件と測定方法

解析手法の妥当性を検証するため，計算結果と実測結果を比較する。解析対象は膜鳴楽器の一つであるティンパニとし，ティンパニのヘッドに衝撃性外力を与えたときの放射音の周波数応答関数を計算と実測によって求めた。実測における具体的な測定方法は無響室内に設置したティンパニのヘッドをドラムスティックを使って単位インパルス関数的に加振し，放射音をマイクロホンにより収音，FFT アナライザーで周波数応答関数を測定した。測定に使用した機材は以下の通りである。

- マイクロホン: SONY ECM-77B
- マイクロホンアンプ: YAMAHA MLA7
- FFT アナライザー: ONO SOKKI CF4220A

測定系のブロックダイアグラムを図 3.4 に，実際に測定に使用したティンパニと機材の写真を図 3.5 に示す。FFT アナライザーのサンプリング周波数は 1280 Hz とし，1024 ポイントの信号を周波数分析した。加振点 1 点と受音点 1 点の組み合わせにつき 10 回測定を行い，加算平均した。なお，実際のティンパニヘッドは曲げ剛性を有しているが，提案手法では曲げ剛性を考慮していない。数値計算と条件をそろえるため，測定においては曲げ剛性の影響が張力よりも相対的に小さくなるよう，ペダルを最大まで踏んでできるだけ張力が大きい状態にして測定を行った。

図 3.5: 測定に使用したティンパニと機材

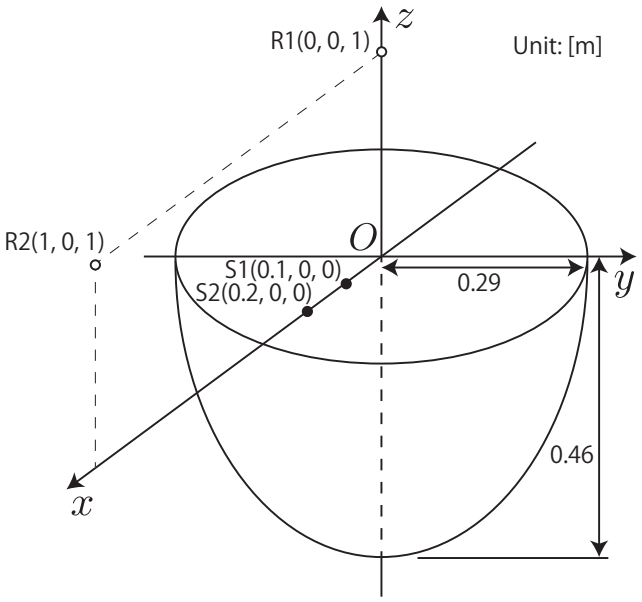


図 3.6: 計算と実測に用いたティンパニの形状と加振点および受音点

計算ではケトルの振動については考慮せず，音響的に剛であるものとして扱う。計算および実測に用いたティンパニの形状，加振点，受音点は図 3.6 のとおりである。膜の半径は 0.29m，ケトルの高さは 0.46m，膜の面密度は 0.26kg/m^2，張力は 6200N/m とした。面密度は 0.1[m] × 0.1[m] だけ切り取ったティンパニヘッドの質量を測定し，算出した。張力については測定が困難なため，文献 [10] にならい，(1, 1) 次の固有周波数が実測値に合うような張力を計算に用いた。加振点については異なる点をたたいたときの変化についても検証するため，通常の演奏位置に限定せず，半径をおおよそ 3 分割する 2 点に設定した。計算におけるケトルの形状は，図 3.6 の z 軸を含む平面で見たときに膜の直径を短軸，ケトルの高さの 2 倍を長軸とする楕円を半分にしたものとした。境界要素には四角形一定要素を用い，840 個の要素に分割した。このとき，500Hz の膜振動場の波長 0.31m に対する最大要素寸法比は約 0.16 であった。なお，このとき空気中の音波の波長は 0.69m であり，その波長に対する最大要素寸法は 1/10 以下である。楕円体であるケトルを形状関数が 1 次関数となる四角形要素で分割しているが，波長に対して十分小さい要素を用いているため，楕円体を多面体で近似していることの音響的な影響は小さいものと判断した。膜振動場の固有モードについては，半径方向，円周方向ともに 10 次までのモードを計算に使用した。

3.2.2 計算結果と考察

図 3.7 から 3.10 に提案手法による周波数応答関数の計算結果と実測結果を示す。1 次の共振周波数における音圧レベルを 0dB として正規化して表示している。まず，共振周波数を示すピークの位置が計算結果と実測結果においておおむね一致していることが分かる。ピーク間の細かいレベル差については，今回の提案手法においては膜振動内部の減衰を考慮していないことや実測における加振圧力が実際には理想的な単位インパルス関数になっていないことによるものだと考えられる。

受音点ごとの違いを見ると，中心軸上に受音点 R1 がある場合，図 3.7，3.9 において，(0, 1) モード (177Hz) や (0, 2) モード (360Hz) のような軸対称モードによるピークは，大きく観測されているのに対して，(1, 1) モード (218Hz)，(2, 1) モード (327Hz)，(3, 1) モード (431Hz) といった非軸対称モードに対応するピークは小さい。これは受音点 R1 が膜の中心のちょうど真上にあたり，双極子や四重極子からの放射効率が悪いためである。また，側方に受音点 R2 がある場合，図 3.8，3.10 を見ると，これらの非軸対称モードの影響が大きく見られる。受音点 R2 は，加振点と膜の中心を結ぶ直線上にある。つまり，膜のいずれのモードの節線上にも乗ることはないため，非軸対称モードからの寄与も大きく観測される。計算結果，実測結果ともにこの傾向が確認できる。

次に加振点ごとの違いを見てみると，計算結果，実測結果のいずれからも，加振点が S2 のときの (1, 1) モード (218Hz)，(2, 1) モード (327Hz)，(3, 1) モード (431Hz)，および (0, 2) モード (360Hz) に対応するピークが加振点が S1 のときに比べて相対的に大きくなっていることが分かる (図 3.8，3.10)。言い換えると，(0, 1) モードは他のモードと比べて小さくなっている。これは (0, 1) モードは膜の中心が腹となるのに対して，(1, 1)，(2, 1)，(3, 1) モードについては膜の中心に節線が集まるため，中心に近い S1 よりも S2 を加振したときのほうが，これらのモードがより励起されるためである。また，(0, 2) モードについては，膜を支持している周辺に加えて，中心からの距離が 0.127m の円が節となる。加振点 S1 はこの節線に近いが，加振点 S2 は二つの節線からも遠いため，S2 のほうがこのモードをより励起しやすいということが言える。これらの傾向が実測結果とよく合致するため，構築した解析手法が膜鳴楽器の解析手

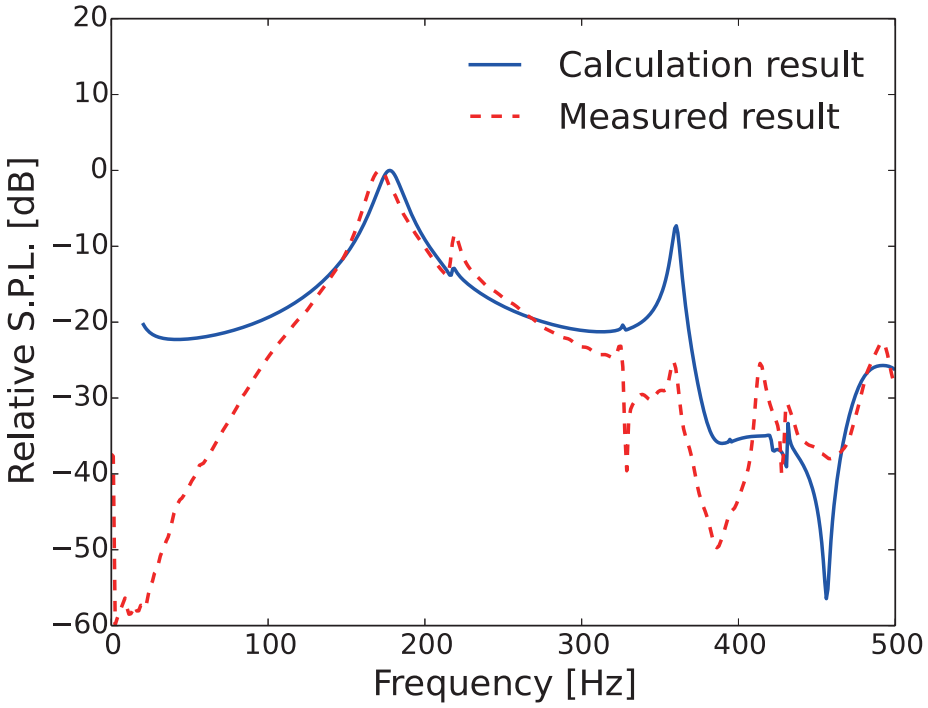


図 3.7: ティンパニの周波数応答関数 (加振点 S1(0.1, 0, 0), 受音点 R1(0, 0, 1))

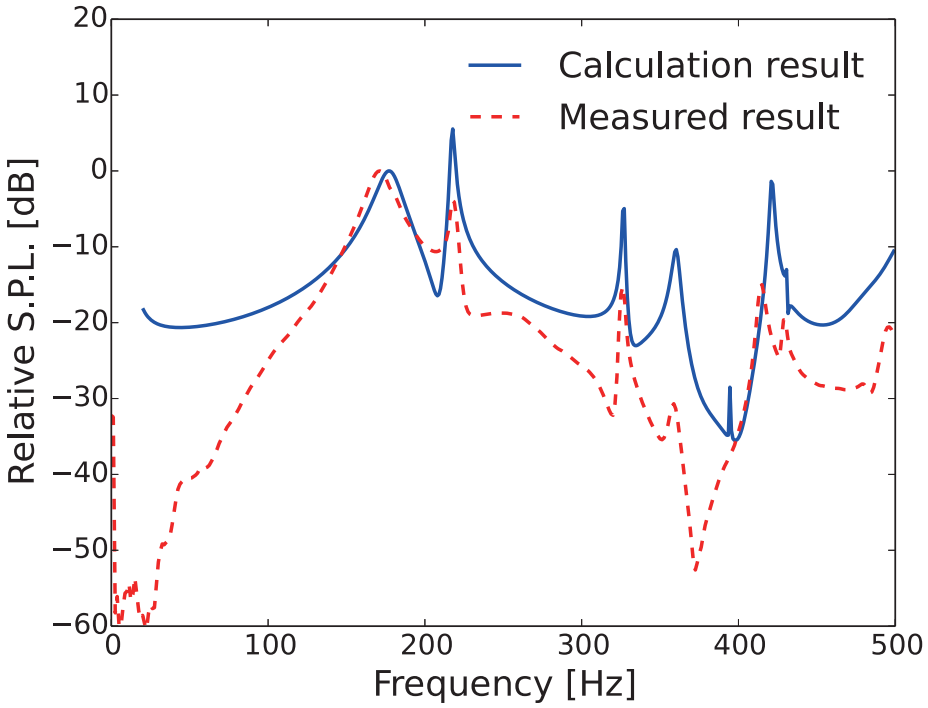


図 3.8: ティンパニの周波数応答関数 (加振点 S1(0.1, 0, 0), 受音点 R2(1, 0, 1))

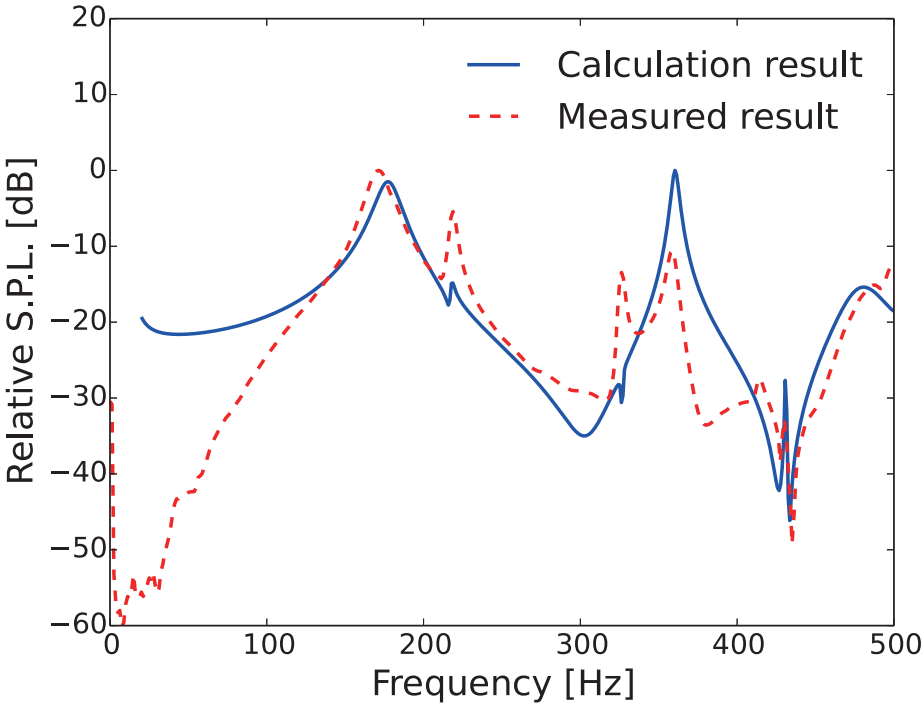


図 3.9: ティンパニの周波数応答関数 (加振点 S2(0.2, 0, 0), 受音点 R1(0, 0, 1))

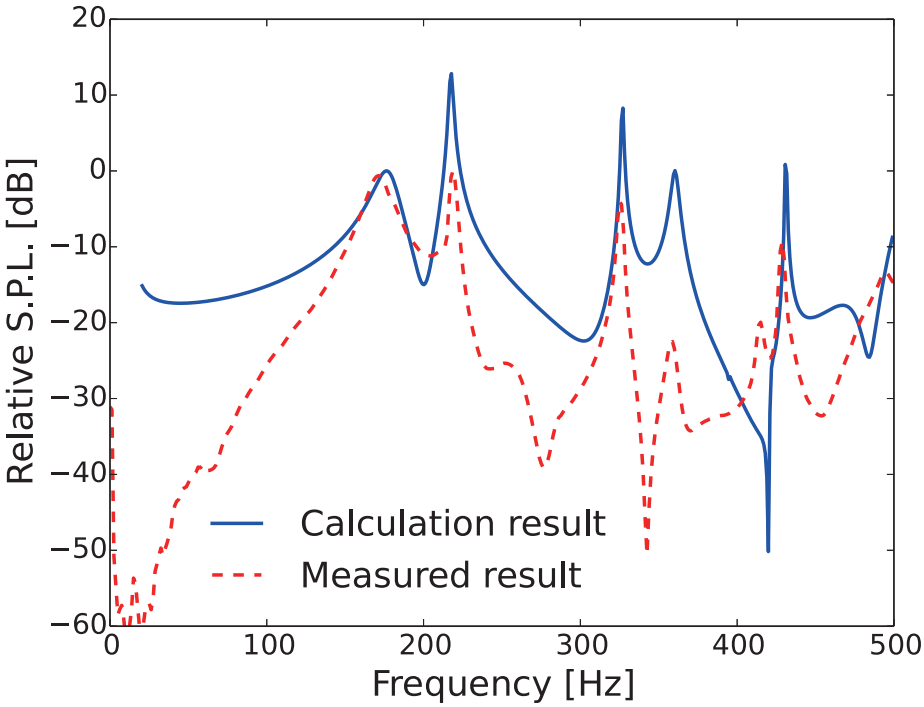


図 3.10: ティンパニの周波数応答関数 (加振点 S2(0.2, 0, 0), 受音点 R2(1, 0, 1))

表 3.1: ケトルの寸法と要素数

	A	B	C	D	E
半径 [m]	0.29				
高さ [m]	0.46	0.23	0.30	0.15	0.30
容積 [m^3]	0.08	0.04	0.08	0.04	(0.08)
要素数	840	756	990	858	738

法として妥当であると判断した。

3.3　提案手法を用いた膜鳴楽器の設計

3.3.1　評価関数の定義

ここでは，音響振動連成解析に基づくティンパニの設計例を示す。様々な設計方針を考えることができるが，ティンパニの固有周波数の特徴に着目した評価関数を用いることとする。実測結果との比較から，構築した解析手法は周波数応答関数のピークを適切にとらえているため，固有周波数についての評価は正しくできるものと判断した。理想的な膜振動の固有周波数は整数比にならないにも関わらず，膜鳴楽器の一つであるティンパニは，(1, 1)，(2, 1)，(3, 1)，(4, 1) 次の固有周波数が空気質量負荷の影響により，2:3:4:5 という整数比に近くなり，ピッチ感を有することはよく知られている [9, 10]。本論文では構築した解析手法を用いて，次のように定義される評価関数をできるだけ小さくするパラメータについて検討する。

$$Q = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4}\left(\frac{f_{n,1}}{f_{1,1}} - h_n\right)^2} \tag{3.41}$$

h_1，h_2，h_3，h_4 はそれぞれ，1，1.5，2，2.5 である。Q は固有周波数の比と整数値の二乗平均平方根誤差を示しており，この値が小さいほど固有周波数が整数比に近いことになる。なお，上記の定義は文献 [14] において用いられている Q を平均して平方根をとったものである。以下ではこの評価関数 Q を用いて，固有周波数が整数比に近くなる物性値や形状について検討する。

3.3.2　計算条件

ヘッドの張力と面密度，およびケトル形状を変化させて計算を行った。張力 T[N/m] は，1000，2000，3000，4000，5000，6000，7000，8000 の 8 通り，面密度 ρ_M[kg/m^2] は，0.1，0.2，0.3，0.4，0.5 の 5 通り，ケトルの形状は 5 つとし，計 200 通りのティンパニについて，それぞれの Q を算出した。張力は Christian らの論文 [10] で用いられている値を参考にして，妥当と考えられるオーダーで範囲を設定した。面密度の参考値として挙げるならば，一般的なティンパニヘッドの面密度が約 0.26kg/m^2，スネアドラムのバターヘッドの面密度が重いもので約 0.5kg/m^2，本来たたく用途ではないが，スネアヘッドの面

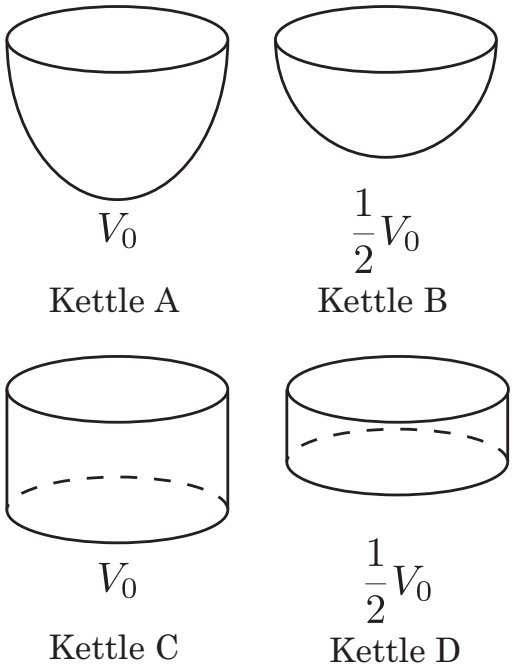


図 3.11: 計算したケトルの形状

密度が約 0.1kg/m^2 である。計算で検討したケトルの形状を図 3.11 に示す。A を典型的なケトルの形状として，その容積を V_0 としたとき，容積を $V_0/2$ にしたものを B，容積は V_0 だが底を平らな円筒形にしたものを C，容積が $V_0/2$ の円筒形を D とした。また，図には示していないが C と同じ形で底が開いているものを E とした。各ケトルの寸法と要素数は表 3.1 に示すとおりである。要素の大きさは，いずれの計算条件においても膜の (4, 1) 次固有周波数における波長の 1/5 より小さくなるように設定した。なお，今回検討した範囲においては空気中の音波の波長よりも膜振動場の波長のほうが小さくなり，したがって空気中の音波についてもこの条件を満たしている。

なお，式 (3.41) の $f_{n,1}$ の求め方であるが，BEM は固有周波数を直接計算することができない。そのため，周波数をずらしながら膜面上の 80 点の変位分布を計算し，式 (3.3) から求まる固有関数との内積が最大となる周波数を固有周波数と判断した。この周波数は周波数応答関数上のピークの周波数とも一致することを確認した。

3.3.3 計算結果と考察

まず，評価関数 Q と固有周波数比の対応を見るために，各ケトル形状における評価関数の最小値 $Q_{\min}$ と，そのときの固有周波数比を表 3.2 に示す。表中の Membrane in vacuo は真空中で振動する理想的な膜を表している。理想的な膜の場合には固有周波数が整数比から大きくずれているのに対して，各ケトルに適切に設計されたヘッドは固有周波数がかなり整数比に近くなっている。Q の最小値だけで比較すると，容積が小さいケトル B，D よりもケトル A，C のほうが整数比に近い傾向にあることが分かる。また，Q を最小とする張力と面密度が形状ごとに異なる，言い換えると，張力と面密度の最適値はどのよう

表 3.2: 各ケトル形状における評価関数の最小値 $Q_{\min}$ と固有周波数比

	Kettle A		Kettle B	
	$T = 4000, \rho_M = 0.2$		$T = 7000, \rho_M = 0.3$	
mode	f_{nm}[Hz]	f_{nm}/f_{11}	f_{nm}[Hz]	f_{nm}/f_{11}
1,1	188	1.00	218	1.00
2,1	286	1.52	331	1.52
3,1	377	2.00	438	2.01
4,1	468	2.48	536	2.46
	$Q_{\min} = 0.0128$		$Q_{\min} = 0.0226$	
	Kettle C		Kettle D	
	$T = 2000, \rho_M = 0.2$		$T = 5000, \rho_M = 0.3$	
mode	f_{nm}[Hz]	f_{nm}/f_{11}	f_{nm}[Hz]	f_{nm}/f_{11}
1,1	135	1.00	184	1.00
2,1	205	1.52	282	1.54
3,1	271	2.01	370	2.02
4,1	334	2.48	456	2.48
	$Q_{\min} = 0.0158$		$Q_{\min} = 0.0218$	
	Kettle E		Membrane in vacuo	
	$T = 8000, \rho_M = 0.2$			
mode	f_{nm}[Hz]	f_{nm}/f_{11}		f_{nm}/f_{11}
1,1	261	1.00		1.00
2,1	396	1.52		1.34
3,1	522	2.00		1.66
4,1	647	2.48		1.98
	$Q_{\min} = 0.0121$		$Q = 0.321$	

な形状に対しても不変というわけではないことを示している。

より詳細に各設計変数と評価関数 Q の関係を考察するため，図 3.12 にそれぞれ，ケトル形状を A から E にしたときの Q の分布を示す。横軸は張力，縦軸は面密度，色が暗いところほど Q の値が小さい，つまり固有周波数が整数比に近いことを表す。実際に計算したのは横軸 8 点，縦軸 5 点の計 40 点であるが，それらを線形補間してコンター図を描いている。

まず全体的な傾向として言えることは，図 3.12 において今回計算した範囲内では横方向の変化よりも縦方向の変化が顕著である，つまり張力の変化よりも面密度の変化のほうが固有周波数比に与える影響が大きいということである。Christian らの論文において，張力を変化させても固有周波数比に大きく影響しないということは述べられているが [10]，面密度についても同様のことが言えるというわけではない。

これは空気による付加質量が膜の質量と近く，かつ周波数依存性があるためだと考えられる。膜を無限

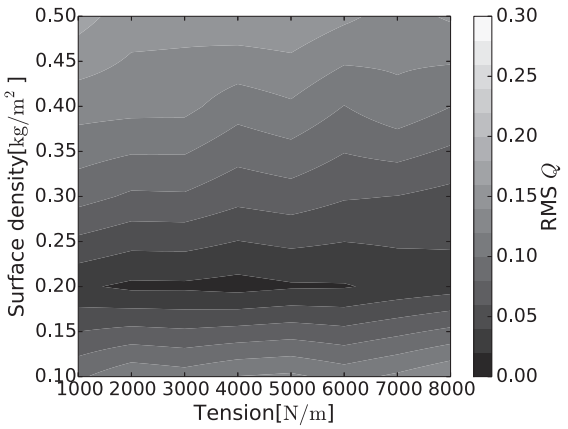
バフル中のピストンで近似すると，空気による付加質量は低周波の場合，空気の密度 ρ_0 と膜の半径 a より $(8/3)\rho_0 a^3$ で近似できる [9]。$a = 0.29$ のとき，付加質量を面積で除した面密度は約 0.31kg/m^2 となり，今考えている膜の面密度と近い値をとる。そのため，空気の付加質量は膜の質量と同程度作用しており，かつ厳密には周波数の関数であるため，固有周波数比に与える影響が大きいと考えられる。一方，ケトル内部の空気の音響スチフネスを考えると，対象としている (1, 1)，(2, 1)，(3, 1)，(4, 1) モードはいずれもケトル内部の空気の体積を変化させない。つまり，これらのモードに対してケトル内部の空気の音響スチフネスについては作用しておらず，膜の張力によるスチフネスのほうが支配的であると言える。これらのことから，面密度の変化が膜と空気の連成に与える影響のほうが張力による影響よりも大きく，したがって面密度の変化が固有周波数比に与える影響も大きいと考えられる。

次に典型的なケトル A と同じ容積の円筒形のケトル C を比べると，大きな差は見られない。どちらも面密度が約 0.2kg/m^2 で Q が最小となる。このことから典型的な容積をもつティンパニの場合は，ケトルの形状は必ずしも A のような楕円形である必要はないということが言える。円筒形のケトルでモデル化しても実測値と良く一致するという Christian らの結果 [10] を本計算からも確認することができた。

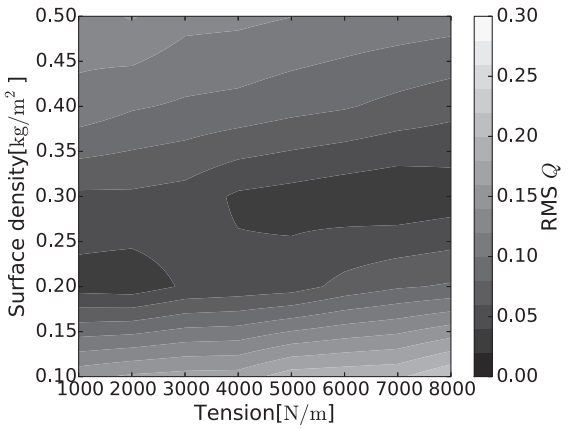
またケトルの容積が異なる，A と B，および C と D を比べると，容積が小さい B や D は特に面密度が 0.2kg/m^2 より小さいと Q の値が A や C よりも大きくなっている。加えて，B と D では張力に対する Q の感度が大きくなる傾向にある。特に D はそれ以外の結果と比べて，張力の変化による Q への影響が大きく，Q が極小となる場所 (T, ρ_M) が面密度が 0.2〜0.3kg/m^2 の斜めの領域に広がっていることが分かる。つまり，張力によって最適な面密度が異なるということである。ティンパニは演奏中でもペダルによって張力を可変としているが，演奏中に面密度を変えることは現実的ではない。そのため，このような性質は好ましくない。典型的なティンパニの容積よりも小さい容積のケトルを採用する場合は，これらのことより，ヘッドをやや重くし，ケトルの形状は少なくとも楕円形としたほうがよいと予想される。また，このことから Christian らの手法 [10] のようにケトル形状を円筒形のみでモデル化することは十分ではないと言える。

ケトル E は底面が閉じていない円筒形であるが，A や C の結果と大きくは変わらない。つまり，このような形状でも整数比に近い固有周波数を作り出すことが可能であると言える。面密度が 0.2kg/m^2 より小さいときの Q を見てみると，E 以外は Q が急激に大きくなるのに対して，E の場合にはその変化が他のケトルに比べてなだらかであり，0.1kg/m^2 のときの Q は他のケトル形状より小さい。したがって，ヘッドを軽くしたい場合には，このような底が空いた円筒形のケトルにすることで固有周波数を整数比に近づけることができると予想される。

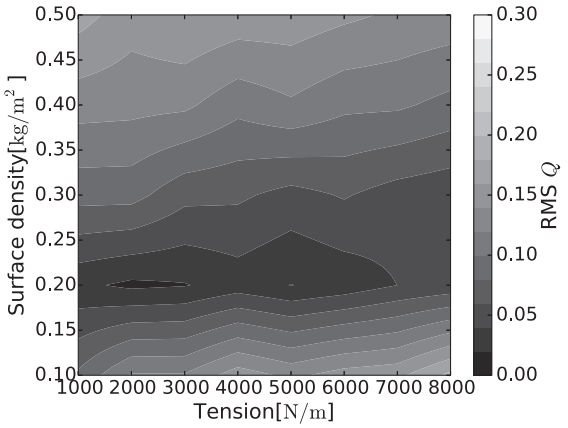
以上を総合すると，固有周波数を整数比に近づけるためのヘッドの張力，面密度，ケトルの形状，および容積の最適値には相互依存関係があり，それぞれ独立に最適値があるわけではないと考えられる。すなわち，それらの設計変数を $x_1, x_2, \ldots$ とし，評価関数 $Q(x_1, x_2, \ldots)$ がそれらの多項式で近似できると仮定したとき，$x_1, x_2, \ldots$ が直交し，かつ $x_1, x_2, \ldots$ や $x_1^2, x_2^2, \ldots$ といったそれぞれの設計変数のみに関する項から構成されるとすれば，評価関数の谷が図 3.12(b) や 3.12(d) のように傾くことはない。つまり，式 (3.41) の Q で与えられる評価関数が $x_1 x_2$ のような設計変数のクロスタームを含むということを示唆している。このことは同時に，評価関数が非線形であり，この評価関数を最小化する最適化問題は非線形計画問題であると言える。本論文では取り扱わないが，最適化アルゴリズムを用いる場合にはこのことを考慮してアルゴリズムを選択する必要がある。



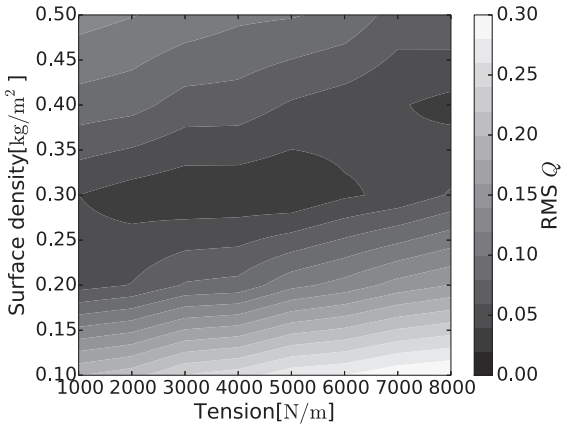
(a) ケトル形状 A($Q_{\min}(T = 4000, \rho_M = 0.2) = 0.0128$)



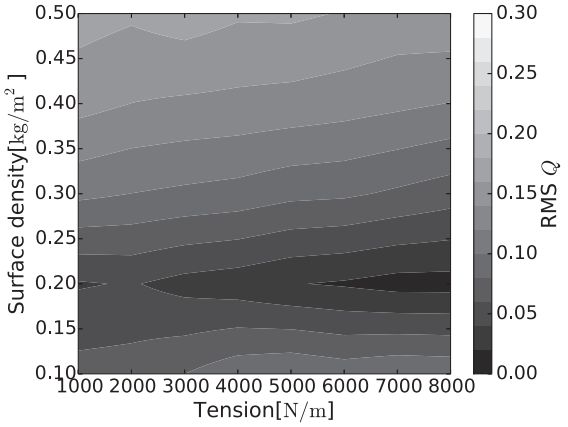
(b) ケトル形状 B($Q_{\min}(T = 7000, \rho_M = 0.3) = 0.0226$)



(c) ケトル形状 C($Q_{\min}(T = 2000, \rho_M = 0.2) = 0.0158$)



(d) ケトル形状 D($Q_{\min}(T = 5000, \rho_M = 0.3) = 0.0218$)



(e) ケトル形状 E($Q_{\min}(T = 8000, \rho_M = 0.2) = 0.0121$)

図 3.12: 各ケトルにおける評価関数 Q の分布

これまでは基礎的な検討としてヘッドの張力と面密度を設計変数とし，評価関数全体を描いた。しかし，実際のティンパニはペダルを踏むことによって張力を調整し，演奏中でもピッチを変えることを可能にしている。つまり，張力を変化させても固有周波数比が整数比に近いままであることが要求される。そこで次に評価関数 Q を張力に関して平均をとった $\bar{Q}$ について考える。

面密度を横軸にとり，張力についての Q の平均 $\bar{Q}$ をプロットしたものが図 3.13 である。エラーバーは標準偏差を表しており，$\bar{Q}$ が小さく，かつ標準偏差も小さいことが望ましい。最適なヘッドの面密度はケトルの容積が大きいほど小さく，ケトルの容積が小さいほど大きい傾向にあり，やはり最適な面密度はケトルの容積によって異なるということが分かる。標準偏差についても考慮した上で $\bar{Q}$ が最小となるのは，典型的なケトル A に面密度が 0.2 kg/m^2 のヘッドを採用したときである。前節の測定に使用したティンパニヘッドの面密度は 0.26 kg/m^2 であり，かなり最適化されていると言える。それ以外のケトル形状であっても，ケトル B であれば 0.3 kg/m^2，ケトル C であれば 0.2 kg/m^2 と言ったように，適切な面密度のヘッドを採用することである程度評価関数の値を小さく，つまり固有周波数を整数比に近くすることが可能であると考えられる。特筆すべきは底面が空いているケトル E である。ヘッドの面密度を 0.2 kg/m^2 としたときの $\bar{Q}$ は，今回計算した範囲の中ではかなり小さい値をとっており，このようなケトル形状であっても適切な面密度のヘッドと組み合わせれば，整数比に近い固有周波数比を得られるということを示唆している。ただし，評価関数 Q および $\bar{Q}$ はあくまで固有周波数の比のみを考慮しているものであり，それ以外の音響特性については違う視点での評価，考察が必要である。

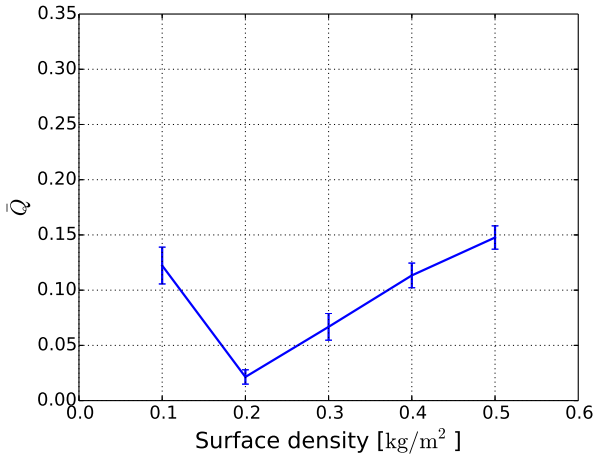
今回示した結果は一つの計算例であり，限られた範囲における検討であるが，今後，設計変数として容積，形状について探索範囲を広げていくことでより最適な条件に到達する可能性もある。音響振動連成解析に基づいて，これまで試作や実験だけでは検討が困難であった様々なケトル形状やそれに最適な張力，面密度を設計することが可能であろう。また，今回用いた評価関数やティンパニに限らず，様々な膜鳴楽器の設計を効率化できると考える。

3.4 まとめ

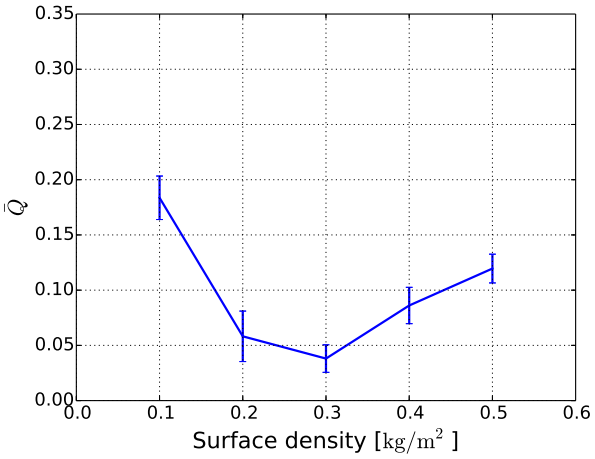
本章では，円形膜振動場の理論解析解と音場の法線方向微分型境界要素法を用いた膜鳴楽器の効率的な解析手法を構築し，実測結果との比較を行い，解析手法としての妥当性を示した。音響振動連成解析に基づく膜鳴楽器の設計例としてティンパニをとりあげ，その固有周波数を整数比に近づけるための影響要因として，既往の研究における張力とケトル容積だけでなく，新たに面密度とケトル形状を考慮し，かつそれらの相互依存性についても調べた。本章で得られたティンパニの設計における知見は以下のとおりである。

1. 固有周波数を整数比に近づけるためのヘッドの張力，面密度，ケトルの形状，および容積は，それぞれ独立に最適値があるわけではなく，それらの最適値には相互依存性があると考えられる。
2. ヘッドの張力よりも面密度の変化のほうが固有周波数比に与える影響が大きい。
3. 典型的な容積のケトルの場合，ヘッドは面密度が約 0.2kg/m^2 となる材質が望ましい。

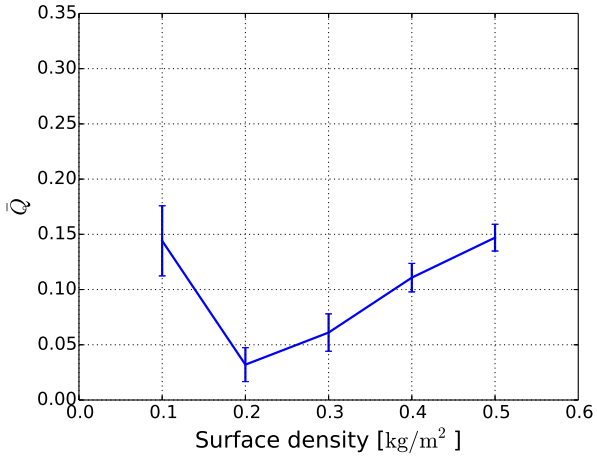
また，特殊な場合として，



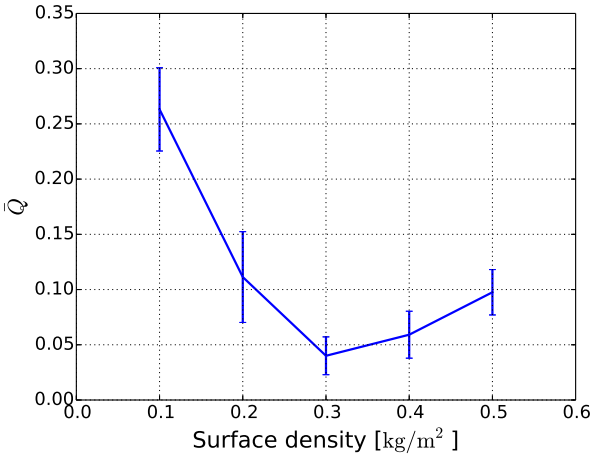
(a) ケトル形状 A



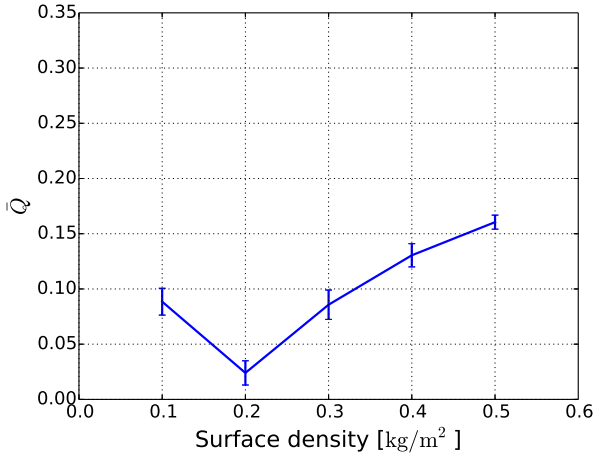
(b) ケトル形状 B



(c) ケトル形状 C



(d) ケトル形状 D



(e) ケトル形状 E

図 3.13: 面密度に対する評価関数 $\bar{Q}$

4. 容積が小さいケトルを採用する場合には，ヘッドの面密度が $0.3\mathrm{kg/m^2}$ 程度となるようにし，ケトルの形状は楕円形とすることが望ましい。
5. 面密度が小さいヘッドを採用する場合には，底が空いた円筒形のケトルとするとよい。

本章の解析手法では膜の曲げ剛性は考慮していない。空気負荷の影響に比べればその影響は小さいが，曲げ剛性によって固有周波数がわずかに高くなることが知られている [9]。曲げ剛性をもつ膜 (張力のかかった板) 振動場の理論解析解は求められないため，マトリクスの自由度は大きくなるが，FEM などの数値解析手法を用いることで膜の曲げ剛性を考慮した解析を行うことができる。そこで次章では，膜の曲げ剛性を考慮した解析手法として，スペクトル法を用いた手法を提案する。

第 4 章

スペクトル法による張力を有する円形薄板振動場の解析

ドラムやティンパニに張られているヘッドは曲げ剛性をもっており，その影響によって理想的な膜よりも固有周波数が大きくなる [9]。そのため，厳密な解析のためにはヘッドを曲げ剛性を有する膜，もしくは張力を有する薄板としてモデル化する必要がある。張力を有する円形薄板振動は，固有値については固有多項式の零点から求められ [24, 25]，空間離散化の必要はない。しかし，強制振動については理論解析解を求めることはできないため，空間離散化に基づく数値解析手法が必要となる。そこで高精度な数値解析手法であるスペクトル法を張力を有する円形薄板振動場に適用する。

弾性板の解析にスペクトル法を用いた例はいくつか発表されている [26–28]。中でも Lee らは Mindlin の理論に基づく円形厚板を対象として，スペクトル法による固有値解析を行った [26]。ただし，この研究では振動変位が円周方向に一様な軸対称問題のみを扱っており，円周方向に変化がある場合は考慮されていない。

本章では，半径方向の解析にスペクトル法，円周方向の解析にフーリエ級数展開を用いた解析手法を提案する。フーリエ級数展開を用いることで，非軸対称振動場でも円周方向を離散化することなく，効率良く解析することができる。提案手法による計算結果を FEM と比較し，提案手法が少ない未知数でも高精度の数値解が得られることを示す。

4.1 提案解析手法

4.1.1 張力を有する円形薄板振動場の振動方程式

図 4.1 のような円座標系における張力のかかった薄板の振動方程式は，次の微分方程式で与えられる [24]。

$$B\nabla^4\zeta - T\nabla^2\zeta + \rho h\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = f \tag{4.1}$$

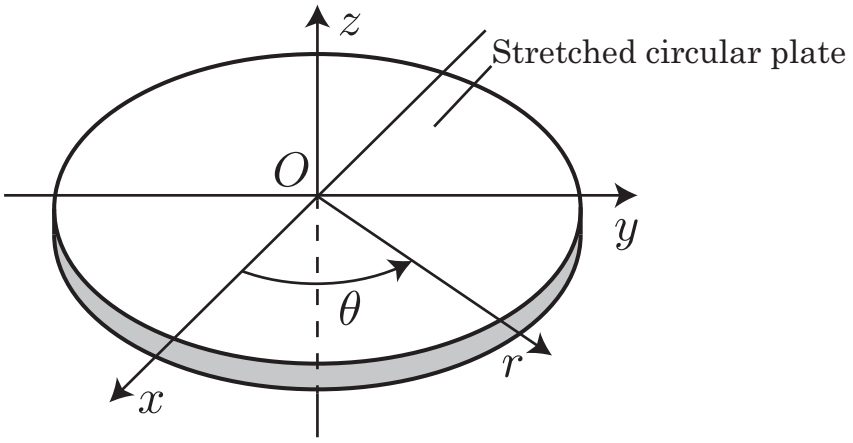


図 4.1: 円形薄板の解析モデル

ここで，ζ は振動変位，f は加振圧力，B は曲げ剛性，T は張力，ρ は密度，h は厚さである。また，微分作用素は円座標系のものであり，

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} \tag{4.2}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{4.3}$$

で表される。曲げ剛性 B はヤング率 E，厚さ h，ポアソン比 ν から，次式によって求められる。

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{4.4}$$

式 (4.1) において，$B = 0, T \neq 0$ のときは膜の振動方程式，$B \neq 0, T = 0$ のときは薄板の振動方程式，$B \neq 0, T \neq 0$ のときは張力のかかった薄板の振動方程式を表す。

今考えている薄板の形状は円形であるので，円周方向の周期性を利用して振動変位と加振圧力をフーリエ級数展開し，また角周波数 ω の調和振動を仮定すると，

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n(r) \cos(n\theta) e^{j\omega t} \tag{4.5}$$

$$f(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \cos(n\theta) e^{j\omega t} \tag{4.6}$$

と表される。なお，ここでは薄板上のある 1 点に加振圧力が与えられ，そこを θ 軸の原点として，振動変位と加振圧力がともに θ に関して偶関数になると想定し，余弦関数で展開している。これらを式 (4.1) に代入し，三角関数の直交性を利用すると最終的に次式が得られる。

$$B\nabla_n^4 \zeta_n - T\nabla_n^2 \zeta_n - \rho h \omega^2 \zeta_n = f_n \tag{4.7}$$

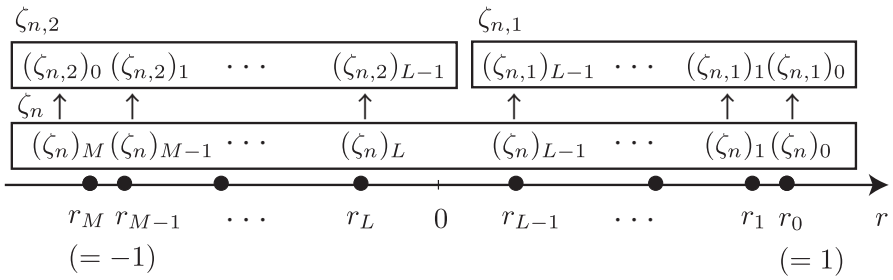


図 4.2: 変位ベクトルの置き換え

ただし，

$$\nabla_n^4 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{2n^2+1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2n^2+1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n^4-4n^2}{r^4} \tag{4.8}$$

$$\nabla_n^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \tag{4.9}$$

である。式 (4.7) は n 次の展開係数 $\zeta_n(r)$ に関する方程式を表しており，半径方向のみの微分方程式になっていることが分かる。上式より有限個の $\zeta_n(r)$ を求め，式 (4.5) に従って重ね合わせることで任意の (r,θ) における変位を求めることができる。

4.1.2 半径方向の離散化

次に半径 r 方向を Chebyshev ノードに離散化し，式 (4.7) に微分マトリクスを適用する。このとき，半径が a の円形板の区間 $r \in [0,a]$ に Chebyshev ノードを採用すると，境界ではない原点付近にも節点が密に集まってしまい，非効率である。そこで，区間 $[-a,a]$ を Chebyshev ノードに離散化することを考える。Chebyshev ノードは通常，区間 $\xi \in [-1,1]$ において定義されるため，次のように座標変換しておく。

$$r = a\xi, \quad -1 \le \xi \le 1 \tag{4.10}$$

これより，r についての偏微分は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \xi} \tag{4.11}$$

この座標変換を用いて，$r \in [-a,a]$ を Chebyshev ノードに離散化できる。ただし，円周方向のフーリエ級数展開 (4.5)，(4.6) は周期を 2π と仮定しているため，$r \in [-a,0]$ の区間は冗長である。そこで，次の条件

$$\zeta(r,\theta) = \zeta(-r,(\theta+\pi)(\mathrm{mod}2\pi)) \tag{4.12}$$

を満たすように，$r \in [0,a]$ の範囲の節点のみ用いる方法を考える [5]。

まず，$r \in [0,a]$ の節点数を L とし，$M = 2L-1$ とおいて次のように微分マトリクス $\boldsymbol{D}$ の成分を並び

替える。

$$
\begin{aligned}
&(D_1)_{i,j} = D_{i,j} && (4.13)\\
&(D_2)_{i,j} = D_{i,M-j} && (4.14)\\
&(D_3)_{i,j} = D_{i+L,j} && (4.15)\\
&(D_4)_{i,j} = D_{i+L,M-j} && (4.16)\\
&i,j = 0,1,\ldots,L-1
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{D}$ を 4 つの L 行 L 列のブロックマトリクスに分けたとき，$\boldsymbol{D}_1$ と $\boldsymbol{D}_3$ はそれぞれ左上と左下のブロックマトリクスであり，$\boldsymbol{D}_2$ と $\boldsymbol{D}_4$ はそれぞれ右上と右下のブロックマトリクスの列を反転したマトリクスに相当する。また，展開係数 $\zeta_n(r)$ を区間 $[-a,a]$ で離散化した変位ベクトル $\boldsymbol{\zeta}_n$ については，図 4.2 に示すように次の二つのベクトルに分けて考える。

$$
\begin{aligned}
&(\zeta_{n,1})_j = (\zeta_n)_j && (4.17)\\
&(\zeta_{n,2})_j = (\zeta_n)_{M-j} && (4.18)\\
&j = 0,1,\ldots,L-1
\end{aligned}
$$

ただし，$\boldsymbol{\zeta}_{n,1}$ は $r \in [0,a]$ の変位，$\boldsymbol{\zeta}_{n,2}$ は $r \in [-a,0]$ の変位を離散化した変位ベクトルを表している。並べ替えた微分マトリクスと変位ベクトルの積を書き下すと，

$$
\boldsymbol{D}'\boldsymbol{\zeta}'_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{D}_2 \\ \boldsymbol{D}_3 & \boldsymbol{D}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_{n,1} \\ \boldsymbol{\zeta}_{n,2} \end{Bmatrix} \tag{4.19}
$$

となる。ここで展開係数 ζ_n と展開している関数 $\cos n\theta$ との積が式 (4.12) を満たすためには，

$$
\boldsymbol{\zeta}_{n,1} \cos n\theta = \boldsymbol{\zeta}_{n,2} \cos(n(\theta+\pi)(\mathrm{mod}2\pi)) \tag{4.20}
$$

でなければならない。n が偶数のとき，上式は

$$
\boldsymbol{\zeta}_{n,1} \cos n\theta = \boldsymbol{\zeta}_{n,2} \cos n\theta \tag{4.21}
$$

となるので，結局

$$
\boldsymbol{\zeta}_{n,1} = \boldsymbol{\zeta}_{n,2} \tag{4.22}
$$

を満たさなければならない。このとき，次の式が成立する。

$$
\left(\boldsymbol{D}'\boldsymbol{\zeta}'_n\right)_{0:L-1} = \left[\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2\right] \boldsymbol{\zeta}_{n,1} = \left[\boldsymbol{D}_3 + \boldsymbol{D}_4\right] \boldsymbol{\zeta}_{n,1} \tag{4.23}
$$

すなわち，$\bar{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2$ として新たな微分マトリクスを構成することで，$r \in [0,a]$ の区間のみを離散化すればよいことになる。また，円座標系において $r = 0$ の点は特異点となるが，M を奇数とすることによって特異点における特別な処理は必要なくなる。

上記の操作において注意しなければならないのは，式 (4.22) は式 (4.12) だけでなく，

$$
\zeta(r,\theta) = \zeta(-r,\theta) = \zeta(r,-\theta) \tag{4.24}
$$

という条件，つまり ζ が r に関して偶関数になるという条件を課してしまっているということである。展開次数 n が奇数のとき，式 (4.22) に対応する条件は，

$$\boldsymbol{\zeta}_{n,1} = -\boldsymbol{\zeta}_{n,2} \tag{4.25}$$

である。この場合については，

$$\zeta_n(r) = -\zeta_n(-r) \tag{4.26}$$

を満たすように補間多項式を修正することで，式 (4.25) を満足するようにする。この方法について次項で述べる。

4.1.3 境界条件と補間多項式

ここでは境界条件とそれを満たす補間多項式について考える。式 (4.7) は 4 階の微分方程式であるため，周辺において二つの境界条件が必要となる。しかし，スペクトル法では通常，一つの節点につき一つの方程式しか得られないため，境界における方程式を境界条件で置き換えるという方法では二つの境界条件を課すことはできない。そのため，境界条件の処理に工夫が必要となる。両端固定条件においては，境界条件を満たすように補間多項式を構成する方法が提案されており [29]，本手法でもこの方法を用いることとする。

$r \in [0, a]$ に L 個の離散化された変位があるとき，

$$p_n(r_j) = \zeta_n(r_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, L-1 \tag{4.27}$$

を満たす補間多項式 $p_n(r)$ によって $\zeta_n(r)$ を近似する。板周辺の境界条件が固定の場合，周辺において変位とその傾きが 0 となる，つまり補間多項式は，

$$p_n(\pm 1) = \frac{\partial p_n}{\partial r}(\pm 1) = 0 \tag{4.28}$$

を満たさなければならない。さらにこの条件に加えて，前項でも述べたように展開次数 n が奇数であれば $\zeta_n(r)$ が奇関数，n が偶数であれば $\zeta_n(r)$ が偶関数となる条件が必要である [30]。そこで補間多項式を次のように構成する。

$$p_n(r) = (1 - r^2) q_n(r), \quad n = 0, 2, 4, \ldots \tag{4.29a}$$
$$p_n(r) = r(1 - r^2) q_n(r), \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{4.29b}$$

ここで $q_n(r)$ は，

$$q_n(\pm 1) = 0 \tag{4.30a}$$
$$q_n(r_j) = \frac{\zeta_n(r_j)}{1 - r_j^2}, \quad n = 0, 2, 4, \ldots \tag{4.30b}$$
$$q_n(r_j) = \frac{\zeta_n(r_j)}{r_j(1 - r_j^2)}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{4.30c}$$

を満たす最大 $L-1$ 次の多項式である。上述したように，式 (4.22) は $\zeta_n(r)$ が偶関数となることを強制していることから，式 (4.29a)，(4.29b) のように補間多項式を構成することで，$p_n(r)$ は n が偶数のとき偶

関数，n が奇数のとき奇関数となる。また，同時に周辺における固定の条件 (4.28) を満たす。式 (4.29a)，(4.29b) の 4 階微分はそれぞれ，

$$p_n^{(4)}(r) = (1-r^2)q_n^{(4)}(r) - 8rq_n^{(3)}(r) - 12q_n^{(2)}(r), \quad n = 0, 2, 4, \ldots \tag{4.31a}$$
$$p_n^{(4)}(r) = r(1-r^2)q_n^{(4)}(r) + 4(1-3r^2)q_n^{(3)}(r) - 36rq_n^{(2)}(r) - 24q_n^{(1)}(r), \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{4.31b}$$

となる。上式を区間 $[0, a]$ で $r = r_j, j = 0, 1, 2, \ldots, L-1$ に離散化，式 (4.27)，(4.30b)，(4.30c) を代入し，微分マトリクスで書き表す。このとき，式 (4.11) の座標変換を用いると，

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n^{(4)} &= \left[\frac{1}{a^4}\mathrm{diag}(1-r_j^2)\tilde{\boldsymbol{D}}^{(4)} - \frac{8}{a^3}\mathrm{diag}(r_j)\tilde{\boldsymbol{D}}^{(3)} - \frac{12}{a^2}\tilde{\boldsymbol{D}}^{(2)}\right]\mathrm{diag}(1/(1-r_j^2))\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \\ &= \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{e}}^{(4)}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \qquad n = 0, 2, 4, \ldots \end{aligned} \tag{4.32a}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n^{(4)} &= \left[\frac{1}{a^4}\mathrm{diag}(r_j(1-r_j^2))\tilde{\boldsymbol{D}}^{(4)} + \frac{4}{a^3}\mathrm{diag}(1-3r_j^2)\tilde{\boldsymbol{D}}^{(3)} - \frac{36}{a^2}\mathrm{diag}(r_j)\tilde{\boldsymbol{D}}^{(2)} - \frac{24}{a}\tilde{\boldsymbol{D}}\right] \\ &\quad \times\mathrm{diag}(1/\{r_j(1-r_j^2)\})\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \\ &= \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{o}}^{(4)}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \end{aligned} \tag{4.32b}$$

となる。ここで，$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n$ は変位ベクトル $\boldsymbol{\zeta}_n$ から境界の節点変位に相当する成分を取り除いたもの，$\tilde{\boldsymbol{D}}^{(4)}$，$\tilde{\boldsymbol{D}}^{(3)}$，$\tilde{\boldsymbol{D}}^{(2)}$ は微分マトリクス $\bar{\boldsymbol{D}}$ を累乗した後，1 行目と 1 列目を取り除いたものである。これは周辺において変位が 0 となる境界条件を満足させるために必要な処理である。

次に 3 階以下の微分について考える。文献 [5] に従って，3 階以下の微分には傾きについての境界条件は与えず，変位についての境界条件と関数の偶奇の条件を与える。つまり，補間多項式を次のように構成する。

$$\hat{p}_n(r) = \hat{q}_n, \quad n = 0, 2, 4, \ldots \tag{4.33a}$$
$$\hat{p}_n(r) = r\hat{q}_n, \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{4.33b}$$

ここで $\hat{q}_n(r)$ は

$$\hat{q}_n(\pm 1) = 0 \tag{4.34a}$$
$$\hat{q}_n(r_j) = \zeta_n(r_j), \quad n = 0, 2, 4, \ldots \tag{4.34b}$$
$$\hat{q}_n(r_j) = \frac{\zeta_n(r_j)}{r_j}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{4.34c}$$

を満たす最大 $L-1$ 次の多項式である。

ここで注意すべきは，4 階とそれ以外の階数の微分において異なる補間多項式，$p_n(r)$ と $\hat{p}_n(r)$ を用いていることである。この二つの補間多項式はいずれも節点座標において節点値と等しい値をとる。つまり，式 (4.29a)，(4.29b)，(4.30b)，(4.30c)，(4.33a)，(4.33b)，(4.34b)，(4.34c) より，

$$p_n(r_j) = \zeta_n(r_j) = (\zeta_n)_j, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.35a}$$
$$\hat{p}_n(r_j) = \zeta_n(r_j) = (\zeta_n)_j, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.35b}$$

を満たすため，変位ベクトル $\boldsymbol{\zeta}_n$ を共通の未知数にすることができる。この二つの異なる補間多項式を用いるという処理は，ここでは詳細は述べないが，本来存在しない固有値を除去するために必要となる特別な処理である [30,31]。

4 階微分のときと同じように変位ベクトルの 3 階，2 階，1 階微分を書き表すと，n が偶数のときは，

$$\boldsymbol{\zeta}_n^{(3)} = \frac{1}{a^3}\tilde{\boldsymbol{D}}^{(3)}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n = \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{e}}^{(3)}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \tag{4.36}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_n^{(2)} = \frac{1}{a^2}\tilde{\boldsymbol{D}}^{(2)}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n = \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{e}}^{(2)}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \tag{4.37}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_n^{(1)} = \frac{1}{a}\tilde{\boldsymbol{D}}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n = \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{e}}^{(1)}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \quad n = 0, 2, 4, \ldots \tag{4.38}$$

となる。同じようにして n が奇数のときは，

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n^{(3)} = \left[\frac{1}{a^3}\mathrm{diag}(r_j)\tilde{\boldsymbol{D}}^{(3)} + \frac{3}{a^2}\tilde{\boldsymbol{D}}^{(2)}\right]\mathrm{diag}(1/r_j)\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n = \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{o}}^{(3)}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \tag{4.39}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n^{(2)} = \left[\frac{1}{a^2}\mathrm{diag}(r_j)\tilde{\boldsymbol{D}}^{(2)} + \frac{2}{a}\tilde{\boldsymbol{D}}\right]\mathrm{diag}(1/r_j)\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n = \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{o}}^{(2)}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \tag{4.40}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n^{(1)} = \left[\frac{1}{a}\mathrm{diag}(r_j)\tilde{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{I}\right]\mathrm{diag}(1/r_j)\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n = \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{o}}^{(1)}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{4.41}$$

となる。これらを用いて，式 (4.7) を離散化すると，最終的の解くべきマトリクス方程式，

$$\left[B\boldsymbol{L}_n^{(4)} - T\boldsymbol{L}_n^{(2)} - \rho h\omega^2\boldsymbol{I}\right]\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n = \tilde{\boldsymbol{f}}_n \tag{4.42}$$

が得られる。ただし，n が偶数のとき，

$$\boldsymbol{L}_n^{(4)} = \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{e}}^{(4)} + 2\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{e}}^{(3)} - (2n^2+1)\boldsymbol{R}^2\tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{e}}^{(2)} + (2n^2+1)\boldsymbol{R}^3\tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{e}}^{(1)} + (n^4-4n^2)\boldsymbol{R}^4\boldsymbol{I} \tag{4.43}$$

$$\boldsymbol{L}_n^{(2)} = \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{e}}^{(2)} + \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{e}}^{(1)} - n^2\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{I} \tag{4.44}$$

$n = 0, 2, 4 \ldots$

であり，n が奇数のとき，

$$\boldsymbol{L}_n^{(4)} = \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{o}}^{(4)} + 2\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{o}}^{(3)} - (2n^2+1)\boldsymbol{R}^2\tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{o}}^{(2)} + (2n^2+1)\boldsymbol{R}^3\tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{o}}^{(1)} + (n^4-4n^2)\boldsymbol{R}^4\boldsymbol{I} \tag{4.45}$$

$$\boldsymbol{L}_n^{(2)} = \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{o}}^{(2)} + \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{o}}^{(1)} - n^2\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{I} \tag{4.46}$$

$n = 1, 3, 5 \ldots$

である。ただし，$\boldsymbol{R} = \mathrm{diag}(1/r_j)$ である。式 (4.42) を有限個の n について解き，式 (4.5) に従ってフーリエ級数和を求めることで任意の円周方向 θ における変位を求めることができる。

4.2 数値計算例

4.2.1 張力を有する円形薄板の固有値問題

ここでは前節で定式化した解析手法の妥当性と計算精度を検証する。まず，式 (4.42) の右辺を $\boldsymbol{0}$ と置いたときの固有値問題を解き，固有周波数を求める。周辺固定された張力を有する円形板の固有角周波数

表 4.1: 張力を有する円形板の計算条件

半径 a[m]	1.0
厚さ h[m]	0.4×10^{-3}
密度 ρ[kg/m^3]	1250
張力 T[N/m]	6000
ヤング率 E[Pa]	5.0×10^9
ポアソン比 ν	0.3

ω は，空間離散化しない方法としては次の固有方程式を解くことで求めることができる [24]。

$$\alpha \frac{J_{n+1}(\alpha)}{J_n(\alpha)} + \beta \frac{I_{n+1}(\beta)}{I_n(\beta)} = 0 \tag{4.47}$$

$$\alpha^2 = \frac{Ta^2}{2B}\left(\sqrt{1 + \frac{4\omega^2\rho h B}{T^2}} - 1\right) \tag{4.48}$$

$$\beta^2 = \frac{Ta^2}{2B}\left(\sqrt{1 + \frac{4\omega^2\rho h B}{T^2}} + 1\right) \tag{4.49}$$

ここで J_n と I_n はそれぞれ，n 次の第一種ベッセル関数と n 次の第一種変形ベッセル関数を表している。この方程式を満たす固有角周波数をニュートン法によって求め，それから得られる固有周波数を理論値とし，提案手法と FEM によって求めた固有角周波数の精度を比較した。なお，FEM の要素には軸対称 3 次要素を使用した。計算条件を表 4.1 に示す。

表 4.2 に提案手法 (SCM) と FEM によって計算した固有角周波数を示す。SCM と FEM の数値はそれぞれの手法の自由度を表している。まず，提案手法は自由度を大きくするにつれて固有周波数が理論値に近づいており，解析手法としての妥当性が確認できる。また，定式化の中で円周方向のモード次数 n の偶奇によって補間多項式の形が変わることを述べたが，軸対称モード ($n = 0$)，非軸対称モードのうち奇数次モード ($n = 1$)，偶数次モード ($n = 2$) のいずれも妥当な計算結果が得られていることが分かる。表に示している範囲のモード次数であれば，自由度が 20 で 3 桁から 4 桁の精度が得られており，自由度を 50 にすると，7 桁から 8 桁の精度が得られている。それに対して FEM では，自由度を 50 にしても 2 桁か 3 桁程度の精度しか得られていない。提案手法であれば FEM の半分以下の自由度で同等，もしくはそれ以上の精度が得られる。少ない自由度で高精度の数値解が得られるというスペクトル法の利点を，提案手法においても確認することができた。

次に，より詳細に誤差が収束する様子を調べるため，理論値との相対誤差を提案手法と FEM で算出した。算出した相対誤差は次の式で定義されるものである。

$$\varepsilon_{nm} = \frac{|\bar{f}_{nm} - f_{nm}|}{f_{nm}} \tag{4.50}$$

f_{nm} は式 (4.47)，(4.48)，(4.49) から理論的に得られる固有周波数，$\bar{f}_{nm}$ は提案手法，または FEM から数値的に得られる固有周波数である。図 4.3 に自由度を変化さたときの各固有周波数の相対誤差を示す。

表 4.2: 提案手法 (SCM) と FEM により計算した固有周波数 [Hz]

Mode	Theoretical	SCM					FEM
(n, m)		10	20	30	40	50	50
(0, 1)	42.02051	41.97142	42.01833	42.02046	42.02051	42.02051	42.15001
(0, 2)	96.46042	96.35314	96.45849	96.46072	96.46043	96.46042	96.75738
(0, 3)	151.23569	151.06096	151.22916	151.23569	151.23568	151.23569	151.70045
(0, 4)	206.10543	205.86730	206.10054	206.10596	206.10545	206.10543	206.73744
(0, 5)	261.03249	260.28613	261.02173	261.03257	261.03249	261.03249	261.83128
(1, 1)	66.95444	66.87891	66.95224	66.95453	66.95444	66.95444	67.16071
(1, 2)	122.59925	122.46102	122.59525	122.59942	122.59925	122.59925	122.97640
(1, 3)	177.80765	177.60692	177.80182	177.80789	177.80765	177.80765	178.35353
(1, 4)	232.90805	232.65711	232.90045	232.90837	232.90806	232.90805	233.62153
(1, 5)	287.98478	287.68614	287.97531	287.98516	287.98478	287.98478	288.86535
(2, 1)	89.74136	89.63958	89.73843	89.74149	89.74136	89.74136	90.01775
(2, 2)	147.10136	146.93402	147.09650	147.10156	147.10137	147.10136	147.55358
(2, 3)	203.10239	202.87094	203.09581	203.10267	203.10240	203.10239	203.72538
(2, 4)	258.67039	258.24019	258.66172	258.67074	258.67040	258.67039	259.46210
(2, 5)	314.06217	313.82012	314.05213	314.06261	314.06218	314.06217	315.02192

三つの異なる円周方向のモード次数 n について，半径方向のモード次数 m を 1 と 10 として，全部で 6 個の固有周波数の相対誤差を示している。いずれのモード次数の固有周波数においても，提案手法は少ない自由度でも誤差が小さい。また，自由度を大きくしていくと誤差が急速に収束し，最終的に 10 桁以上の精度をもつことが分かる。一方，FEM は提案手法に比べて誤差が大きく，収束もかなり緩やかである。

実用的なシーンにおいて節点数をどのように設定するべきかは重要な問題である。Helmholtz 方程式の場合には，Chebyshev ノードの間隔が疎になる中心において 1 波長あたりの節点数 (Points Per Wavelength: PPW) が 2 以上であれば，3 桁の精度の固有周波数と妥当な固有モード形状が得られることが文献 [5] に示されている。本章で対象としている張力を有する薄板の場合にも同様のことが言えるのか，PPW と固有周波数の相対誤差の間にどのような関係があるのかを次に調べる。

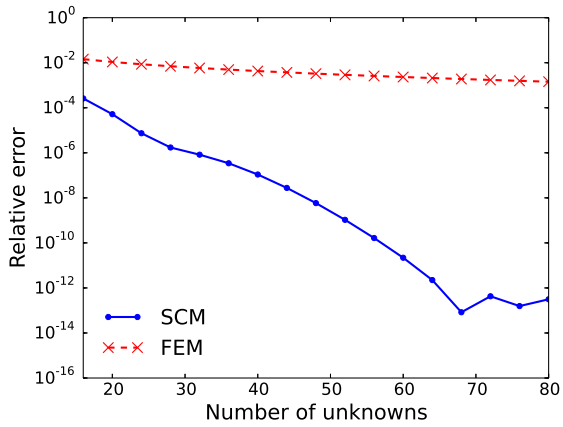
張力を有する薄板を伝わる曲げ波の場合，角周波数 ω と波数 β の間には次のような分散関係がある [1]。

$$\omega = \beta\sqrt{\gamma^2 + \kappa^2\beta^2} \tag{4.51}$$

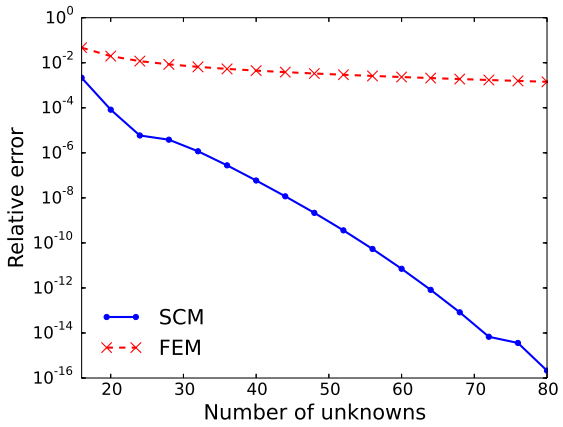
ここで $\gamma = \sqrt{T/\rho h}$，$\kappa = \sqrt{B/\rho h}$ である。上式を β について解き，波長 λ は $\beta = 2\pi/\lambda$ の関係より，

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{2\kappa^2}{-\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\kappa^2\omega^2}}} \tag{4.52}$$

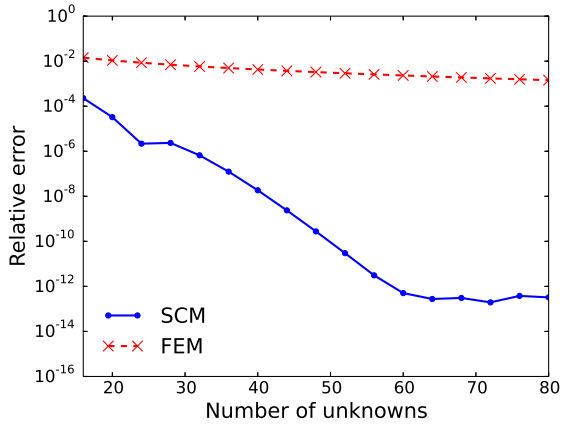
で求められる。



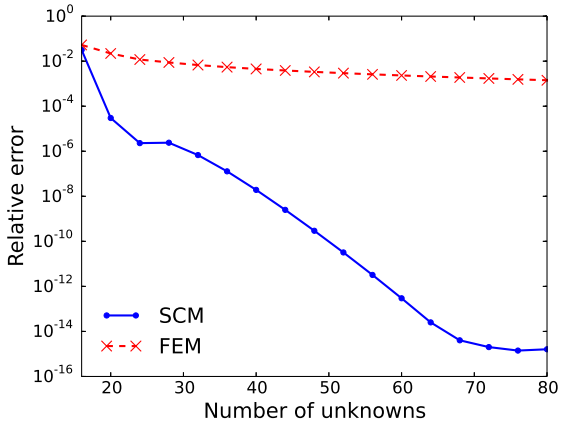
(a) (0, 1) 次



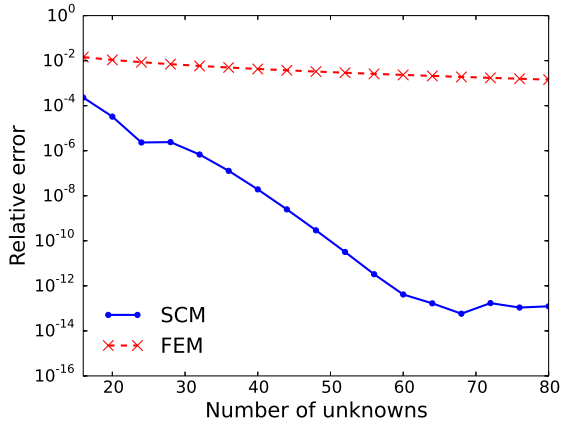
(b) (0, 10) 次



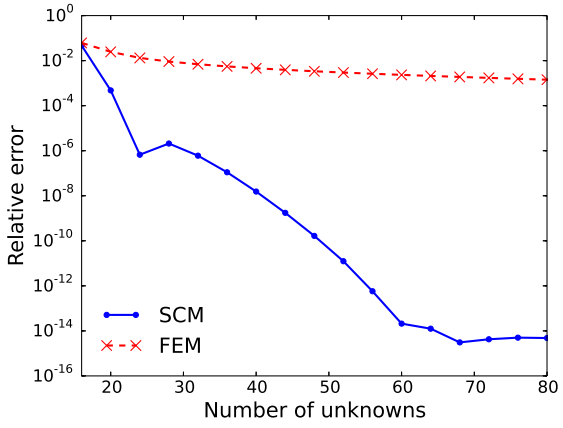
(c) (1, 1) 次



(d) (1, 10) 次



(e) (2, 1) 次



(f) (2, 10) 次

図 4.3: 未知数の数に対する固有周波数の相対誤差

表 4.3: 円形膜の計算条件

半径 a[m]	1.0
厚さ h[m]	0.4×10^{-3}
密度 ρ[kg/m^3]	1250
張力 T[N/m]	6000
ヤング率 E[Pa]	0

図 4.4 に PPW と固有周波数の相対誤差の関係を示す。一定の精度，例えば相対誤差が約 1% となる PPW を比較すると，提案手法と有限要素法ともに固有周波数が低いほど多くの PPW を要し，固有周波数が高くなるにつれて同じ精度を保つために必要な PPW が小さくなっている。最も多くの PPW を必要とするのは (0, 1) 次の固有周波数であり，相対誤差を 1% 以下に抑えるためには，有限要素法で約 25 PPW，提案手法で約 5 PPW 必要であることが分かる。

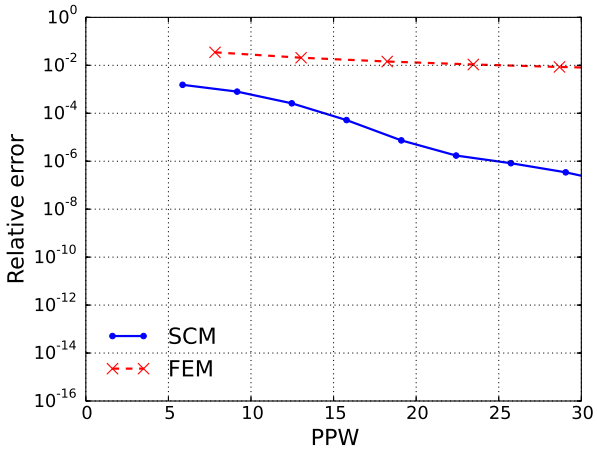
次に固有周波数ごとの誤差の傾向を調べるため，自由度を固定し，半径方向のモード次数 m ごとの固有周波数の相対誤差を算出した。自由度を図 4.3 において誤差がほぼ収束している 80 としたときの半径方向のモード次数ごとの相対誤差を図 4.5 に示している。図の横軸は半径方向のモード次数 m である。まず，FEM は全体的に相対誤差が大きく，半径方向のモード次数が大きくなるにつれて相対誤差は緩やかに大きくなっている。それに対して提案手法では，自由度 80 の約半分の 40 次あたりの固有周波数までは 12 桁以上の精度でほぼ横ばいになっている。しかし，40 次を超えるあたりから誤差が急激に大きくなっており，50 次から 60 次以上の固有周波数では FEM よりも誤差が大きくなっている。ただ，そのような高次のモード次数になると提案手法，FEM ともに精度が 1 桁程度しかなく，実用的な精度ではない。3 桁以上の実用的な精度が保たれるモード次数で比較するならば，提案手法のほうが優位であると言える。

このような高次の固有値において誤差が急激に大きくなるという性質はスペクトル法特有の性質である [30]。本論文では取り扱わないが，とくに時間領域解法においては安定性の問題と関わってくる重要な性質である。これはスペクトル法における不等間隔な節点に起因するものであり，これを改善するために物理空間では節点を等間隔に設定し，計算空間では Chebyshev ノードで計算するという方法が提案されている [32]。この方法を用いると低次の固有値の誤差は大きくなるが，高次の固有値の誤差を改善することができる。

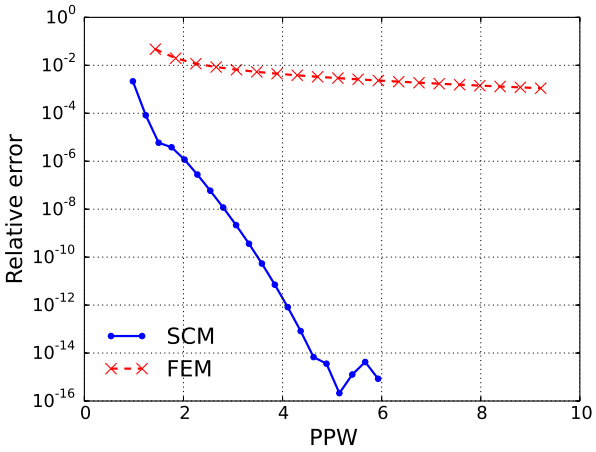
4.2.2 円形膜の強制振動問題

次に式 (4.42) の加振圧力の項を与えたときの強制振動問題を解き，変位分布を計算した。張力を有する円形薄板の強制振動の理論解析解は求められないため，曲げ剛性を 0 とし，理想的な円形膜の強制振動の理論解析解との相対誤差を算出した。計算条件は表 4.3 に示す通りである。加振圧力の空間分布は次式で表されるガウシアンパルスを与えた。

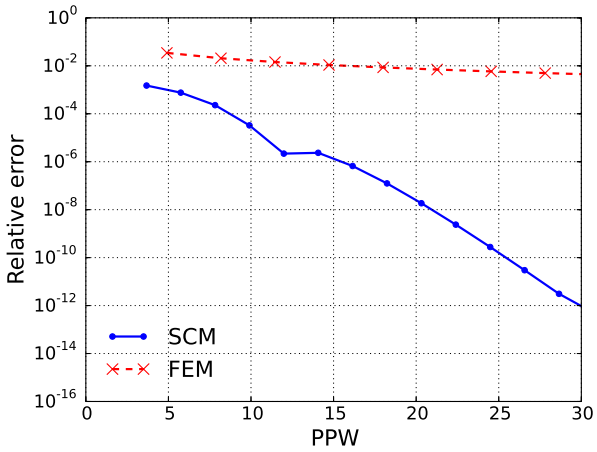
$$f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 - 2rr_0\cos\theta + r_0^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4.53}$$



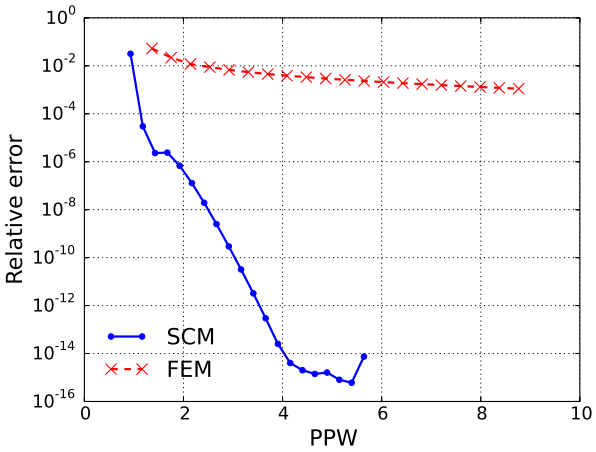
(a) (0, 1) 次 ($f = 42.0\text{Hz}, \lambda = 2.61\text{m}$)



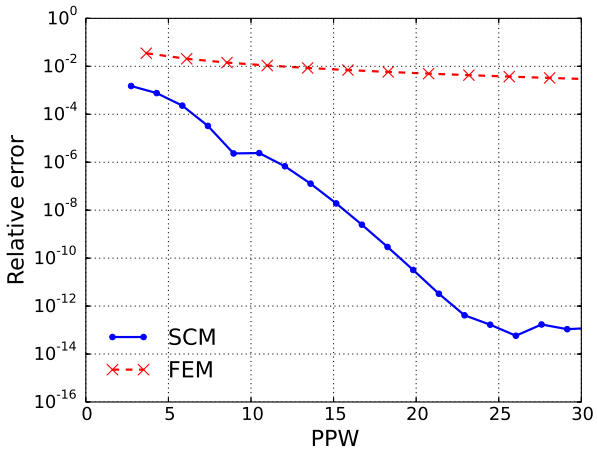
(b) (0, 10) 次 ($f = 536\text{Hz}, \lambda = 0.205\text{m}$)



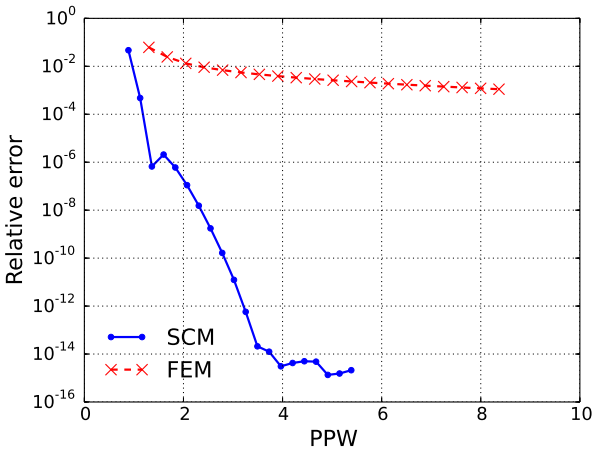
(c) (1, 1) 次 ($f = 67.0\text{Hz}, \lambda = 1.63\text{m}$)



(d) (1, 10) 次 ($f = 564\text{Hz}, \lambda = 0.195\text{m}$)



(e) (2, 1) 次 ($f = 89.7\text{Hz}, \lambda = 1.22\text{m}$)



(f) (2, 10) 次 ($f = 590\text{Hz}, \lambda = 0.186\text{m}$)

図 4.4: 1 波長あたりの節点数 (Points Per Wavelength: PPW) に対する固有周波数の相対誤差

ここで，r_0 は加振圧力の中心位置であり，$r_0 = 0.75$ とした。また，σ は加振圧力の広がりを表す標準偏差であり，$\sigma = 0.1$ とした。このときの加振圧力の空間分布を図 4.6 に示す。

今回は提案手法と軸対称要素を用いる FEM に加えて，円周方向も離散化して微分マトリクスを適用する従来の SCM を比較対象に加えた。提案手法と軸対称 FEM では円周方向の変位はフーリエ級数展開を用いて求めるため，フーリエ級数展開の打ち切り次数と離散化の点数を対応させて，変位の相対誤差を比較した。半径方向の自由度はいずれも 100 とした。真値とした理論解析解の打ち切り次数は，フーリエ級数，ベッセル級数，それぞれ 30 次と 20 次とした。評価する誤差として，次式で定義される L_2 相対誤差を用いた。

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{J} |\bar{\zeta}(x_j) - \zeta(x_j)|^2}{\sum_{j=1}^{J} |\zeta(x_j)|^2}} \tag{4.54}$$

$\zeta(x_j)$ は理論解析解により求めた変位，$\bar{\zeta}(x_j)$ は提案手法，FEM，円周方向も離散化する SCM により求めた変位，J は受振点の数である。

加振周波数を 125 Hz，250 Hz，500 Hz としたときの受振点 6,400 点 (半径方向 100 点，円周方向 64 点) における変位分布の L_2 相対誤差を図 4.7 に示す。提案手法と軸対称 FEM では，フーリエ級数展開の打ち切り次数が円周方向の精度を決めるパラメータであり，一方，従来の SCM は円周方向の離散化点数が円周方向の精度を決めるパラメータであると言える。そこで，グラフの横軸が提案手法と軸対称 FEM はフーリエ級数の打ち切り次数，従来の SCM では円周方向の離散化点数を表すようにした。

図 4.7 のいずれの結果においても提案手法と FEM は，フーリエ級数の打ち切り次数を増やしていくと誤差が急速に収束に向かっており，真値とした理論解析解で用いている 30 次程度の打ち切り次数でほぼ収束している。これはこの二つの手法は円周方向には理論解析解を用いていることと同等であるため，当然の結果であると言える。それに対して円周方向にも離散化する従来の SCM では，離散化点数を 30 より大きくしても誤差が収束していない。収束するためには円周方向に 60 点程度の節点数が必要であることが分かる。また，収束した誤差を比べると，FEM よりも二つの SCM のほうが 2 桁，もしくは 3 桁程度精度が高い。三つの周波数間で比較すると，周波数が高くなるにつれて二つの SCM と FEM の精度の差は小さくなる傾向が見られる。これは前項で述べた，モードの次数が高くなるにつれて誤差が急激に大きくなるというスペクトル法の性質に起因するものであると考えられる。しかし，FEM はそもそも同じ自由度の SCM に比べて精度が悪い。そのため，さらに周波数を高くして両者の差がなくなったとしても，そのときの L_2 相対誤差は 0.1 程度になると予想され，両者とも実用的であるとは言い難い。よって，L_2 相対誤差が 0.01 から 0.001 程度の精度を要求するのであれば，SCM のほうが優位であると考えられる。

4.2.3 張力を有する円形薄板の強制振動問題

計算例の最後に，張力を有する円形薄板の周波数応答関数を示す。計算条件は表 4.1 に示した条件と同じとした。加振圧力は前項と同様に中心位置 $r_0 = 0.75$，標準偏差 $\sigma = 0.1$ のガウシアンパルスを与えた。提案手法と FEM ともに自由度は 20，フーリエ級数展開の打ち切り次数は 30 とした。

図 4.8 と 4.9 は提案手法と FEM によって計算した受振点 $(r, \theta) = (0.9, 0), (0.9, \pi)$ における周波数応答関数である。張力を有する円形薄板の固有周波数は 4.2.1 項の方法で離散化することなく求めることができるが，強制振動の理論解析解は求めることができない。そこで固有周波数のみをグラフに縦に引いた

実線で示している。ここでは減衰については考慮していないため，強制振動においてピークとなる周波数は固有周波数に一致するはずである。周波数応答関数の概形としては提案手法と FEM で近い結果が得られている。しかし，ピークをとる周波数を見てみると FEM は固有周波数からずれており，また周波数が高くなるにつれてその誤差が大きくなっている。それに対して，提案手法ではピークの周波数が固有周波数と高い精度で一致していることが分かる。

4.2.4　演算量

4.2.2 項では，円周方向を離散化することなくフーリエ級数展開を用いる提案手法と，円周方向にも離散化を行う従来のスペクトル法において円周方向の未知数の数を変化させたときの計算精度を比較した。収束しきった誤差ではほとんど変わらないが，収束する速度が提案手法のほうが速いことを示した。本項では両者の演算量について考える。なお，ここでは係数行列に非対称密行列をもつ連立一次方程式の基本的な解法である LU 分解を用いた場合の演算量を示す。N 次正方行列の LU 分解にかかる演算量は $O(N^3)$ である。

提案手法におけるフーリエ級数展開の打ち切り次数と円周方向を離散化する場合の節点数をともに N，半径方向の節点数を M とする。従来のスペクトル法の係数マトリクスは MN 次であり，LU 分解にかかる演算量は $O(M^3N^3)$ である。一方，提案手法の場合は円周方向には離散化しないため，M 次のマトリクスの LU 分解を展開係数の数だけ，つまり N 回行うことになり，その総演算量は $O(M^3N)$ となる。ただし，従来手法は連立方程式を解くと同時に MN 点の変位が求まるのに対して，提案手法は M 点の物理的には意味のない展開係数しか求まらない。変位は展開係数を使って式 (4.5) によって求められ，1 点の級数和，つまり変位を求めるための演算量は $O(N)$，従来手法と同様に MN 点の変位を求めるとするとその演算量は $O(MN^2)$ となる。つまり，変位を求める級数和を含めた総演算量で比較しても，提案手法の演算量 $O(M^3N) + O(MN^2)$ のほうが従来手法の演算量 $O(M^3N^3)$ より少ない。また，これまで述べたように，N を大きくしたときの誤差の収束についても従来手法より提案手法のほうが速いことから，提案手法は計算精度，演算量ともに優れていると言える。

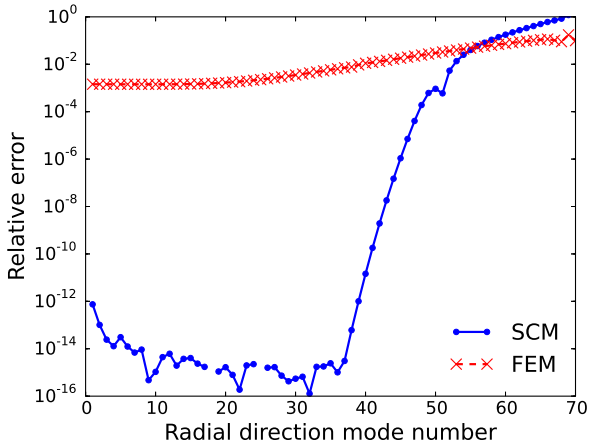
4.3　まとめ

本章では膜鳴楽器のヘッドをより厳密にモデル化するため，張力を有する円形薄板振動場の解析手法を提案した。円周方向の解析はその周期性を利用し，フーリエ級数展開することで計算の効率化を図った。半径方向の解析手法として SCM を採用した。4 階微分方程式に周辺固定条件を課すため，周辺固定条件を満たすように 4 階微分マトリクスの内挿関数を構成した。また，SCM において $r \in [-a, a]$ を離散化するとき，フーリエ級数展開の次数の偶奇に応じて，内挿関数の形が変わることを述べた。

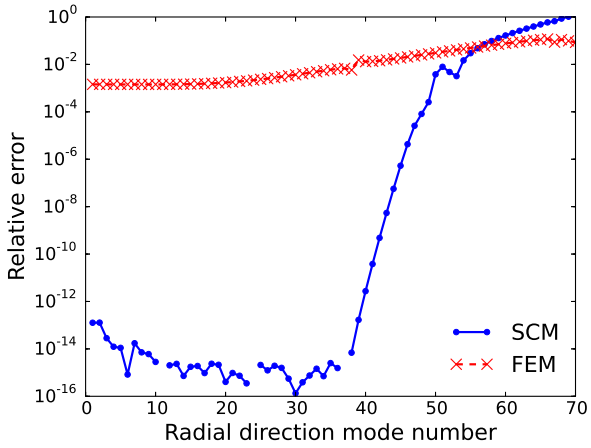
固有値問題や強制振動問題を提案手法で解き，軸対称 3 次要素を用いた FEM や円周方向にも離散化する SCM と比較したところ，少ない自由度でも高精度の解が得られることを示した。また，演算量においても従来の SCM よりも少ないということを示した。

提案手法の問題点としては，周辺固定以外の境界条件については解くことができないという点である。例えば，あらかじめ単純支持条件を満たすように内挿関数を構成することは難しい。円形薄板振動場に限

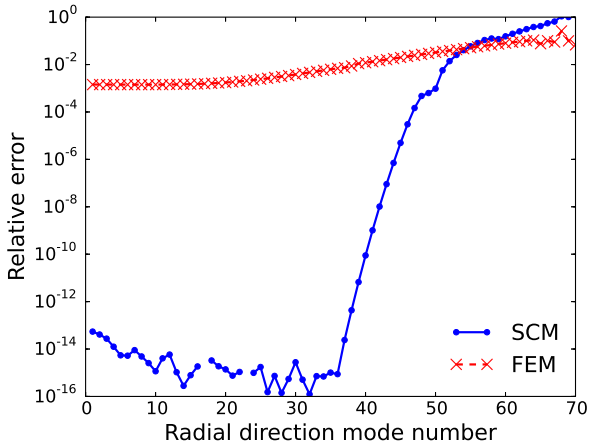
らず，支配方程式が高階の微分方程式である場合に同様の問題が生じる。次章では，4 階の微分方程式を支配方程式としてもつ円筒シェル振動場の解析手法を構築するが，固定条件だけでなくその他の境界条件についても扱えるような方法を提案する。



(a) $(0, m)$ 次



(b) $(1, m)$ 次



(c) $(2, m)$ 次

図 4.5: 半径方向のモード次数に対する固有周波数の相対誤差

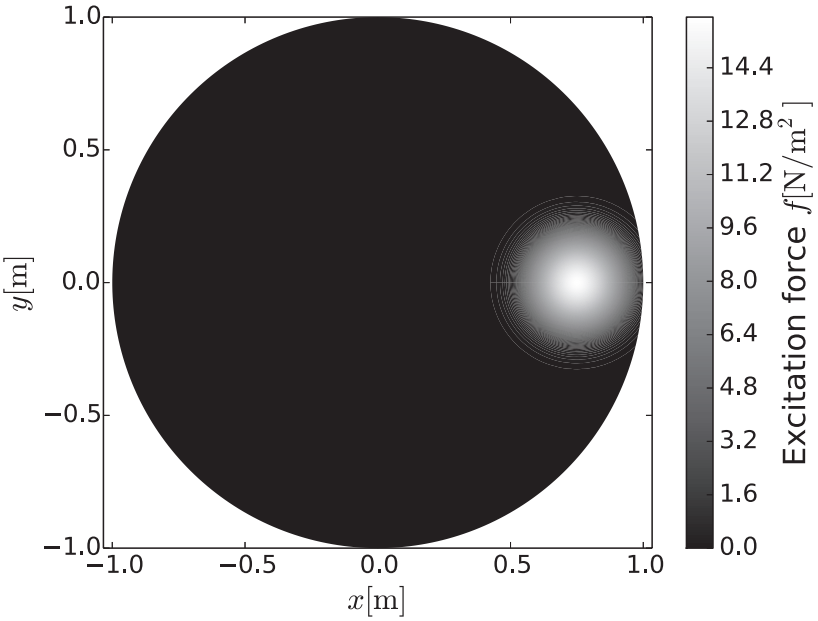
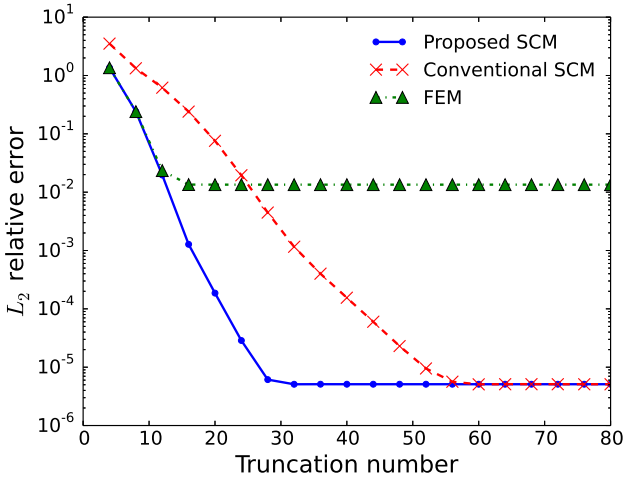
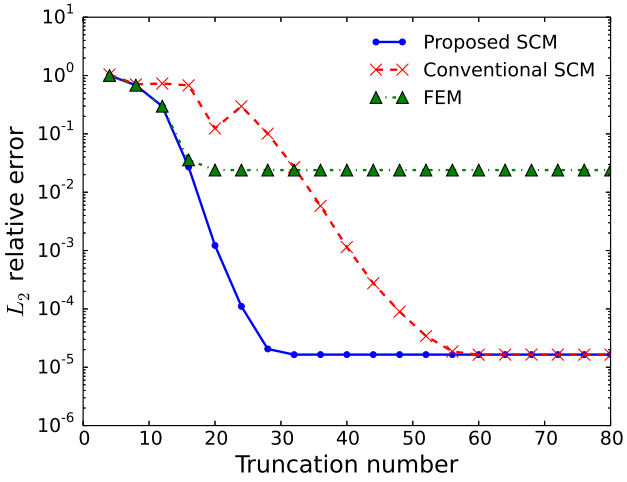


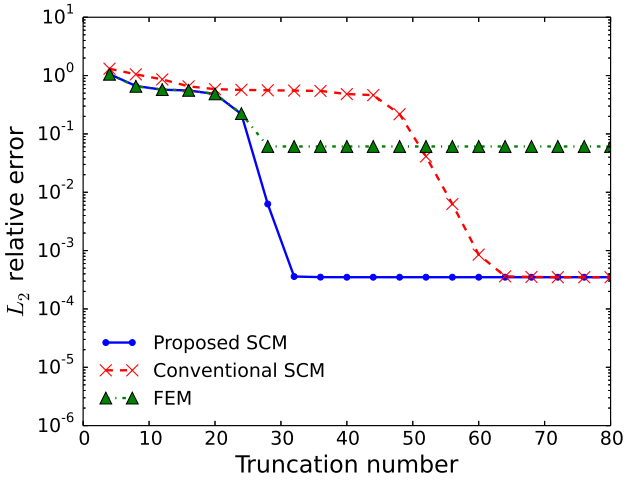
図 4.6: 与えた加振圧力の空間分布



(a) 125 Hz



(b) 250 Hz



(c) 500 Hz

図 4.7: 円周方向の打ち切り次数に対する変位分布の L_2 相対誤差

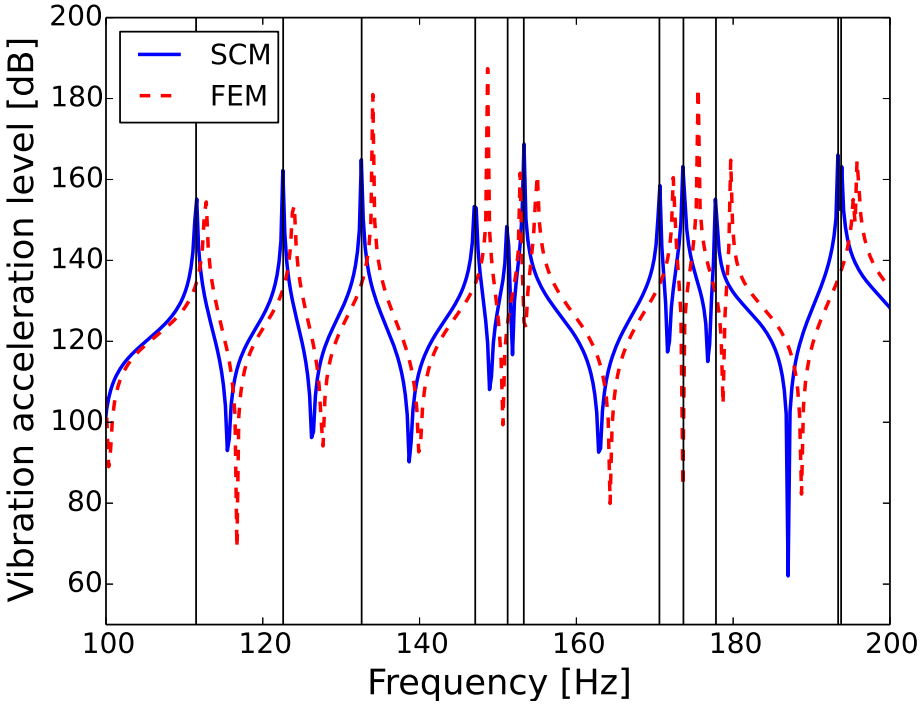


図 4.8: 張力を有する円形薄板の周波数応答関数 (受振点 $(r, \theta) = (0.9, 0)$)

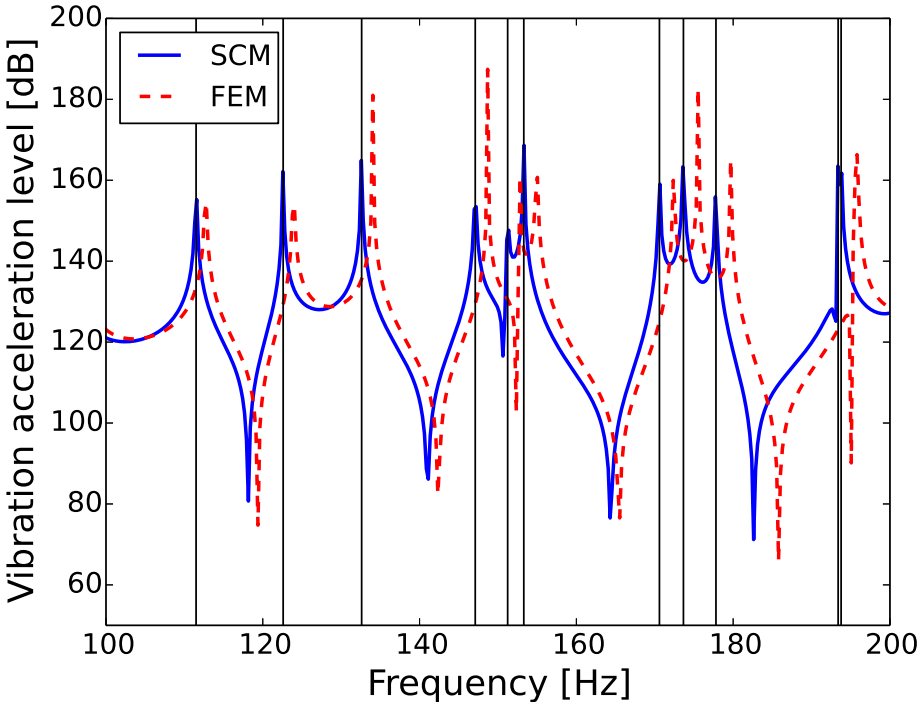


図 4.9: 張力を有する円形薄板の周波数応答関数 (受振点 $(r, \theta) = (0.9, \pi)$)

第 5 章

スペクトル法による円筒シェル振動場の解析

一般的なドラムのシェルは円筒シェルとしてモデル化することができる。円筒シェルの強制振動は，境界条件が両端単純支持の場合には理論解析解を求めることができる。しかし，この条件は円筒シェルの軸方向 (長さ方向) に固定しないという条件であり，実用的であるとは言えない。ドラムのように円筒シェルの底をスタンドで支える状況を解析するには，数値解析手法が必要である。そこで，スペクトル法を用いる。

円筒シェルの振動方程式は円形薄板の場合と同様に 4 階の微分方程式である。4 階微分方程式では本来，四つの境界条件が必要となるが，通常の微分マトリクスを用いるスペクトル法では一つの節点につき一つの方程式しか得られない。そのため，境界の節点についての方程式を境界条件で置き換えるという方法では，四つすべての境界条件を課すことができない。そこで前章では節点値とその傾きが境界で 0 となるように補間多項式を構成することで，固定条件のもと解析できるようにした。しかし，この方法では固定以外の境界条件を解くことができない。

この問題に対処するために様々な方法が提案されている [30, 33–37]。ここでは Chirikalov によって導出された Hermite 補間型の微分マトリクス [38] を用いる。これは境界にのみ未知数として通常の節点値に加えてその傾きを用いるという方法である。新たに加えた傾きについての方程式を境界条件で置き換えることで，四つすべての境界条件を課すことが可能である。有限要素法で用いられる 3 次 Hermite 要素に近い考え方であると言える。

本章では Hermite 補間型微分マトリクスを用いたスペクトル法による円筒シェル振動場の解析手法を定式化し，その妥当性と計算精度を検証する。また，Spectral Collocation Method に加えて，Spectral Nodal Galerkin Method による定式化を行う。

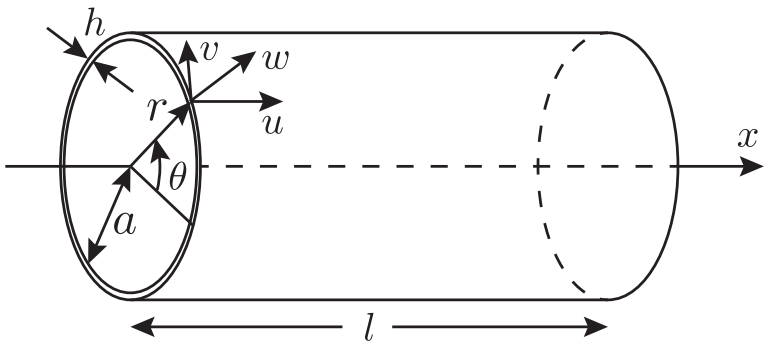


図 5.1: 円筒シェルの解析モデル

5.1 提案解析手法

5.1.1 円筒シェル振動場の振動方程式

解析モデルとして，図 5.1 のような円筒シェルを考える。u，v，w はそれぞれ，x，θ，r 方向の振動変位である。円筒シェルの振動方程式は様々なものが提案されているが，本論文では最も基本的な Donnell-Mushtari の方程式を採用することとする。Donnell-Mushtari の方程式は，垂直応力 N_{xx}，$N_{\theta\theta}$，せん断応力 $N_{x\theta}$，$N_{\theta x}$，曲げモーメント M_{xx}，$M_{\theta\theta}$，ねじりモーメント $M_{x\theta}$ を用いて次のように表される [39, 40]。

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{5.1a}$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{5.1b}$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{1}{a}N_{\theta\theta} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{a}\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \tag{5.1c}$$

ここで，p は r 方向の加振圧力，a は半径，h は厚さ，ρ は密度である。また，各応力，モーメントは振動変位によって次のように表される。

$$N_{xx} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{a}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\nu}{a}w\right) \tag{5.2a}$$

$$N_{\theta\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{a}w + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{5.2b}$$

$$M_{xx} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \tag{5.2c}$$

$$M_{\theta\theta} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{5.2d}$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{5.2e}$$

$$M_{x\theta} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \tag{5.2f}$$

E はヤング率，ν はポアソン比である。

振動変位と加振圧力は円周方向に周期的になるので，前章と同じようにフーリエ級数展開して，

$$u(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\cos n\theta\ e^{j\omega t} \tag{5.3a}$$

$$v(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)\sin n\theta\ e^{j\omega t} \tag{5.3b}$$

$$w(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)\cos n\theta\ e^{j\omega t} \tag{5.3c}$$

$$p(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\cos n\theta\ e^{j\omega t} \tag{5.3d}$$

と表せる。ここで，u_n，v_n，w_n，p_n は n 次の展開係数を表している。これらを式 (5.2a)-(5.2f) に代入し，応力とモーメントについても次のようにフーリエ級数展開する。

$$N_{xx}(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\nu n}{a}v_n + \frac{\nu}{a}w_n\right)\cos n\theta\ e^{j\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} N_{xx}^{(n)}(x)\cos n\theta\ e^{j\omega t} \tag{5.4a}$$

$$N_{\theta\theta}(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{n}{a}v_n + \frac{1}{a}w_n + \nu\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)\cos n\theta\ e^{j\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} N_{\theta\theta}^{(n)}(x)\cos n\theta\ e^{j\omega t} \tag{5.4b}$$

$$M_{xx}(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \frac{\nu n^2}{a^2}w_n\right)\cos n\theta\ e^{j\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{xx}^{(n)}(x)\cos n\theta\ e^{j\omega t} \tag{5.4c}$$

$$M_{\theta\theta}(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(-\frac{n^2}{a^2}w_n + \nu\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\right)\cos n\theta\ e^{j\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{\theta\theta}^{(n)}(x)\cos n\theta\ e^{j\omega t} \tag{5.4d}$$

$$N_{x\theta}(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(-\frac{n}{a}u_n + \frac{\partial v_n}{\partial x}\right)\sin n\theta\ e^{j\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} N_{x\theta}^{(n)}(x)\sin n\theta\ e^{j\omega t} \tag{5.4e}$$

$$M_{x\theta}(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\left(-\frac{n}{a}\frac{\partial w_n}{\partial x}\right)\sin n\theta\ e^{j\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{x\theta}^{(n)}(x)\sin n\theta\ e^{j\omega t} \tag{5.4f}$$

ただし，

$$N_{xx}^{(n)}(x) = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\nu n}{a}v_n + \frac{\nu}{a}w_n\right) \tag{5.5a}$$

$$N_{\theta\theta}^{(n)}(x) = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{n}{a}v_n + \frac{1}{a}w_n + \nu\frac{\partial u_n}{\partial x}\right) \tag{5.5b}$$

$$M_{xx}^{(n)}(x) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \frac{\nu n^2}{a^2}w_n\right) \tag{5.5c}$$

$$M_{\theta\theta}^{(n)}(x) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(-\frac{n^2}{a^2}w_n + \nu\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\right) \tag{5.5d}$$

$$N_{x\theta}^{(n)}(x) = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(-\frac{n}{a}u_n + \frac{\partial v_n}{\partial x}\right) \tag{5.5e}$$

$$M_{x\theta}^{(n)}(x) = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\left(-\frac{n}{a}\frac{\partial w_n}{\partial x}\right) \tag{5.5f}$$

である。式 (5.3a)-(5.3d) と (5.4a)-(5.4f) を式 (5.1a)-(5.1c) に代入し，三角関数の直交性を用いると，次のような微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial N_{xx}^{(n)}}{\partial x} + \frac{n}{a} N_{x\theta}^{(n)} + \rho h \omega^2 u_n = 0 \tag{5.6a}$$

$$-\frac{n}{a} N_{\theta\theta}^{(n)} + \frac{\partial N_{x\theta}^{(n)}}{\partial x} + \rho h \omega^2 v_n = 0 \tag{5.6b}$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{1}{a} N_{\theta\theta}^{(n)} - \frac{n^2}{a^2} M_{\theta\theta}^{(n)} + \frac{2n}{a} \frac{\partial M_{x\theta}^{(n)}}{\partial x} - \rho h \omega^2 w_n = p_n \tag{5.6c}$$

これらは n 次の展開係数についての微分方程式を表している。

実際に微分方程式 (5.6a)-(5.6c) を解くとき，両端において次のような境界条件が必要である。

$$u_n = \bar{u}_n \text{ or } N_{xx}^{(n)} = \bar{N}_{xx}^{(n)}, \quad x = 0, l \tag{5.7a}$$

$$v_n = \bar{v}_n \text{ or } N_{x\theta}^{(n)} = \bar{N}_{x\theta}^{(n)}, \quad x = 0, l \tag{5.7b}$$

$$w_n = \bar{w}_n \text{ or } \frac{\partial M_{xx}^{(n)}}{\partial x} + \frac{2n}{a} M_{x\theta}^{(n)} = \overline{\left(\frac{\partial M_{xx}^{(n)}}{\partial x} + \frac{2n}{a} M_{x\theta}^{(n)} \right)}, \quad x = 0, l \tag{5.7c}$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial x} = \overline{\frac{\partial w_n}{\partial x}} \text{ or } M_{xx}^{(n)} = \bar{M}_{xx}^{(n)}, \quad x = 0, l \tag{5.7d}$$

上の各境界条件のうち一つ目は基本境界条件，二つ目は自然境界条件と呼ばれる。これらの境界条件のもとで式 (5.6a)-(5.6c) を解くことで展開係数 u_n，v_n，w_n が得られる。さらに式 (5.3a)-(5.3c) に従って級数和を求めることで，任意の (x, θ) における振動変位 u，v，w を求めることができる。

5.1.2　Hermite 補間型微分マトリクスの導出

式 (5.6c) は 4 階微分方程式であり，解くためには四つの境界条件が必要になる。しかし，通常の微分マトリクスでは一つの節点につき一つの方程式しか立てることができず，境界の節点の方程式を置き換える方法では四つすべての境界条件を課すことはできない。そこで，本手法では Hermite 補間型の微分マトリクスを用いる。Lagrange 補間は節点値のみを用いて関数を補間するのに対して，Hermite 補間では節点値に加えてその微係数を用いて関数を次のように補間する。

$$w(x) \approx w_0' H_{01}(x) + \sum_{j=0}^{M} w_j H_{j0}(x) + w_M' H_{M1}(x) \tag{5.8}$$

ここで，w_i は i 番目の節点変位，w'_0 と w'_M はそれぞれ，0 番目と M 番目の節点の微係数である。また，$H_{j0}(x)$，$H_{01}(x)$，$H_{M1}(x)$ は Hermite 基底関数であり，次のように表される [38]。

$$H_{j0}(x) = \frac{x - x_0}{x_j - x_0}\frac{x - x_M}{x_j - x_M}\ell_j(x) \quad i = 1, 2, \cdots, M-1 \tag{5.9a}$$

$$H_{00}(x) = \frac{x - x_M}{x_0 - x_M}p_0(x)\ell_0(x) \tag{5.9b}$$

$$H_{M0}(x) = \frac{x - x_0}{x_M - x_0}p_M(x)\ell_M(x) \tag{5.9c}$$

$$H_{01}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_M)}{x_0 - x_M}\ell_0(x) \tag{5.9d}$$

$$H_{M1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_M)}{x_M - x_0}\ell_M(x) \tag{5.9e}$$

ただし，

$$p_0(x) = 1 - \left(\ell'_0(x_0) - \frac{1}{L}\right)(x - x_0) \tag{5.10a}$$

$$p_M(x) = 1 - \left(\ell'_M(x_M) + \frac{1}{L}\right)(x - x_M) \tag{5.10b}$$

$$L = x_M - x_0 \tag{5.10c}$$

である。また，$\ell_j(x)$ は Lagrange 基底関数を表している。式 (5.8) を x で微分すると，節点 x_i における変位 $w(x_i)$ の微分係数 $w'(x_i)$ は

$$w'(x_i) \approx w'_0 H'_{01}(x_i) + \sum_{j=0}^{M} w_j H'_{j0}(x_i) + w'_M H'_{M1}(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, M \tag{5.11}$$

となる。さらに，節点 x_0 と x_M における 2 階微分係数 $w''(x_0)$ と $w''(x_M)$ は，

$$w''(x_0) \approx w'_0 H''_{01}(x_0) + \sum_{j=0}^{M} w_j H''_{j0}(x_0) + w'_M H''_{M1}(x_0) \tag{5.12a}$$

$$w''(x_M) \approx w'_0 H''_{01}(x_M) + \sum_{j=0}^{M} w_j H''_{j0}(x_M) + w'_M H''_{M1}(x_M) \tag{5.12b}$$

となる。式 (5.11)，(5.12a)，(5.12b) はマトリクス方程式の形で，

$$\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{D}_{\mathrm{H}}\boldsymbol{w} \tag{5.13}$$

と書き表すことができる。ただし，

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} H''_{01}(x_0) & H''_{00}(x_0) & H''_{10}(x_0) & \cdots & H''_{M-1,0}(x_0) & H''_{M0}(x_0) & H''_{M1}(x_0) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ H'_{01}(x_1) & H'_{00}(x_1) & H'_{10}(x_1) & \cdots & H'_{M-1,0}(x_1) & H'_{M0}(x_1) & H'_{M1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H'_{01}(x_{M-1}) & H'_{00}(x_{M-1}) & H'_{10}(x_{M-1}) & \cdots & H'_{M-1,0}(x_{M-1}) & H'_{M0}(x_{M-1}) & H'_{M1}(x_{M-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ H''_{01}(x_M) & H''_{00}(x_M) & H''_{10}(x_M) & \cdots & H''_{M-1,0}(x_M) & H''_{M0}(x_M) & H''_{M1}(x_M) \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

$$\boldsymbol{w} = \begin{Bmatrix} w_0' & w_0 & w_1 & \cdots & w_{M-1} & w_M & w_M' \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.15a}$$

$$\boldsymbol{w}' = \begin{Bmatrix} w_0'' & w_0' & w_1' & \cdots & w_{M-1}' & w_M' & w_M'' \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.15b}$$

である。$\boldsymbol{D}_{\mathrm{H}}$ の各成分は，式 (5.9a)-(5.9e) を微分することで求められ，

$$H_{01}''(x_0) = 2(b_{00} - 1/L) \tag{5.16a}$$
$$H_{M1}''(x_0) = -2b_{0M} \tag{5.16b}$$
$$H_{00}''(x_0) = b_{00}' - 2b_{00}^2 + 2b_{00}/L - 2/L^2 \tag{5.16c}$$
$$H_{M0}''(x_0) = 2b_{0M}p_M(x_0)/L \tag{5.16d}$$
$$H_{i0}''(x_0) = -2b_{0i}L/c_{i0}c_{iM}, \quad i = 1, 2, \cdots, M-1 \tag{5.16e}$$
$$H_{01}'(x_k) = -b_{k0}c_{k0}c_{kM}/L \tag{5.16f}$$
$$H_{M1}'(x_k) = b_{kM}c_{k0}c_{kM}/L \tag{5.16g}$$
$$H_{00}'(x_k) = a_{k0}b_{k0}p_0(x_k) \tag{5.16h}$$
$$H_{M0}'(x_k) = a_{kM}b_{kM}p_M(x_k) \tag{5.16i}$$
$$H_{i0}'(x_k) = \left[(c_{k0} + c_{kM})\,\delta_{ik} + b_{ki}c_{k0}c_{kM}\right]/c_{i0}c_{iM}, \quad i, k = 1, 2, \cdots, M-1 \tag{5.16j}$$
$$H_{01}''(x_M) = -2b_{M0} \tag{5.16k}$$
$$H_{M1}''(x_M) = 2(b_{MM} + 1/L) \tag{5.16l}$$
$$H_{00}''(x_M) = -2b_{M0}p_0(x_M)/L \tag{5.16m}$$
$$H_{M0}''(x_M) = b_{MM}' - 2b_{MM}^2 - 2b_{MM}/L - 2/L^2 \tag{5.16n}$$
$$H_{i0}''(x_M) = 2b_{Mi}L/c_{i0}c_{iM}, \quad i = 1, 2, \cdots, M-1, \tag{5.16o}$$

となる。ここで，

$$a_{i0} = -(x_i - x_M)/L \tag{5.17a}$$
$$a_{iM} = (x_i - x_M)/L \tag{5.17b}$$
$$b_{ij} = \ell_j'(x_i) \tag{5.17c}$$
$$b_{ij}' = \ell_j''(x_i) \tag{5.17d}$$
$$c_{ij} = x_i - x_j \tag{5.17e}$$

である。Hermite 補間型微分マトリクス $\boldsymbol{D}_{\mathrm{H}}$ は，行と列の数がともに Lagrange 補間型の微分マトリクスより 2 だけ大きくなっている。そのため，境界において境界条件を二つずつ与えることができる。また，Lagrange 補間型微分マトリクスと同じように，高階の微分を求める場合には Hermite 補間型微分マトリクス同士の積を計算すればよい。

5.1.3　Spectral Collocation Method による解析

前項で求めた Hermite 補間型微分マトリクスを用いた Spectral Collocation Method (SCM) によって，円筒シェルの振動方程式 (5.6a)-(5.6c) を離散化する。まず，式 (5.5a)-(5.5f) を式 (5.6a)-(5.6c) に代入し，各応力とモーメントを変位によって表すと，

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \frac{(1-\nu)n^2}{2a^2}u_n + \frac{(1+\nu)n}{2a}\frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\nu}{a}\frac{\partial w_n}{\partial x} + \frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}u_n = 0 \tag{5.18a}$$

$$-\frac{(1+\nu)n}{2a}\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}-\frac{n^2}{a^2}v_n-\frac{n}{a^2}w_n+\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}v_n=0 \tag{5.18b}$$

$$\frac{\nu}{a}\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{n}{a^2}w_n+\frac{1}{a^2}w_n+\beta^2\nabla_n^4 w_n-\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}w_n=\frac{p_n(1-\nu^2)}{Eh} \tag{5.18c}$$

となる。ここで,

$$\nabla_n^4=a^2\frac{\partial^4}{\partial x^4}-2n^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{n^4}{a^2} \tag{5.19}$$

である。また，c_{L} と β はそれぞれ縦波の伝搬速度と剛性係数を表しており，次のように与えられる。

$$c_{\mathrm{L}}=\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \tag{5.20}$$

$$\beta^2=\frac{h^2}{12a^2} \tag{5.21}$$

これから式 (5.18a)-(5.18c) に微分マトリクスを適用するが，微分マトリクスは通常，$\xi\in[-1,1]$ において定義されるため，任意の区間 $x\in[0,l]$ において解析できるように，次のような座標変換を行っておく。

$$x=\frac{\xi+1}{2}l \tag{5.22}$$

ξ を用いると x による微分は,

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{2}{l}\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{5.23}$$

$$dx=\frac{l}{2}d\xi \tag{5.24}$$

となる。

ξ を Chebyshev ノード，もしくは Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) ノードに離散化し，式 (5.18a)-(5.18c) の微分演算子を微分マトリクスで置き換えると，次のようなマトリクス方程式が得られる。

$$\left[\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_{11}&\boldsymbol{L}_{12}&\boldsymbol{L}_{13}\\ \boldsymbol{L}_{21}&\boldsymbol{L}_{22}&\boldsymbol{L}_{23}\\ \boldsymbol{L}_{31}&\boldsymbol{L}_{32}&\boldsymbol{L}_{33}\end{bmatrix}-\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}\boldsymbol{I}\right]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}_n\\ \boldsymbol{v}_n\\ \boldsymbol{w}_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \dfrac{1-\nu^2}{Eh}\boldsymbol{p}_n\end{Bmatrix} \tag{5.25}$$

微分を作用するマトリクスの部分マトリクスは，

$$\boldsymbol{L}_{11} = -\frac{4}{l^2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}}^2 + \frac{(1-\nu)n^2}{2a^2}\boldsymbol{I} \tag{5.26a}$$

$$\boldsymbol{L}_{12} = -\frac{(1+\nu)n}{2a}\frac{2}{l}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}} \tag{5.26b}$$

$$\boldsymbol{L}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ \vdots & -\dfrac{\nu}{a}\dfrac{2}{l}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}} & \vdots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \tag{5.26c}$$

$$\boldsymbol{L}_{21} = \frac{(1+\nu)n}{2a}\frac{2}{l}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}} \tag{5.26d}$$

$$\boldsymbol{L}_{22} = -\frac{1-\nu}{2}\frac{4}{l^2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}}^2 + \frac{n^2}{a^2}\boldsymbol{I} \tag{5.26e}$$

$$\boldsymbol{L}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ \vdots & \dfrac{n}{a^2}\boldsymbol{I} & \vdots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \tag{5.26f}$$

$$\boldsymbol{L}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \dfrac{\nu}{a}\dfrac{2}{l}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}} & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{5.26g}$$

$$\boldsymbol{L}_{32} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \dfrac{n}{a^2}\boldsymbol{I} & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{5.26h}$$

$$\boldsymbol{L}_{33} = \beta^2\left[a^2\frac{16}{l^4}\boldsymbol{D}_{\mathrm{H}}^4 - 2n^2\frac{4}{l^2}\tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{L}}^2 + \frac{n^4}{a^2}\tilde{\boldsymbol{I}}\right] + \frac{1}{a^2}\tilde{\boldsymbol{I}} \tag{5.26i}$$

である。ただし，

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{L}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \boldsymbol{D}_{\mathrm{L}}^2 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

$$\tilde{\boldsymbol{I}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \boldsymbol{I} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

と置いた。節点数を M とすると，部分マトリクス $\boldsymbol{L}_{11}$，$\boldsymbol{L}_{12}$，$\boldsymbol{L}_{21}$，$\boldsymbol{L}_{22}$ は M 行 M 列，$\boldsymbol{L}_{13}$，$\boldsymbol{L}_{23}$ は M 行 $M+2$ 列，$\boldsymbol{L}_{31}$，$\boldsymbol{L}_{32}$ は $M+2$ 行 M 列，$\boldsymbol{L}_{33}$ は $M+2$ 行 $M+2$ 列のマトリクスとなっており，式 (5.25) の係数マトリクスは $3M+2$ 行 $3M+2$ 列のマトリクスである。ここで，$\boldsymbol{L}_{33}$ において 2 階微分に Lagrange 補間型，4 階微分に Hermite 補間型の微分マトリクスを用いているが，これは円形薄板の場合と同様に誤った固有値を除去するために必要な処理である。

式 (5.25) のうち，境界の節点についての方程式は境界条件で置き換える。具体的には 1，M，$M+1$，$2M$，$2M+1$，$2M+2$，$3M+1$，$3M+2$ 番目の方程式である。適切な境界条件を課した上で式 (5.25) を解くと，フーリエ級数展開係数 $\boldsymbol{u}_n$，$\boldsymbol{v}_n$，$\boldsymbol{w}_n$ を求めることができ，得られた係数を式 (5.3a)-(5.3c) に従って級数和を求めることで，任意の θ における変位を求めることができる。

5.1.4 Spectral Nodal Galerkin Method による解析

本項では，Spectral Nodal Galerkin Method (NGM) を定式化する。まず，式 (5.6a)-(5.6c) の両辺に重み関数として Lagrange 基底関数 $\ell_j(\xi)$ をかけ，$x \in [0, l]$ で積分する。

$$\int_0^l \left(\frac{\partial N_{xx}^{(n)}}{\partial x} + \frac{n}{a} N_{x\theta}^{(n)} + \rho h \omega^2 u_n \right) \ell_j(\xi) dx = 0 \tag{5.29a}$$

$$\int_0^l \left(-\frac{n}{a} N_{\theta\theta}^{(n)} + \frac{\partial N_{x\theta}^{(n)}}{\partial x} + \rho h \omega^2 v_n \right) \ell_j(\xi) dx = 0 \tag{5.29b}$$

$$\int_0^l \left(\frac{\partial^2 M_{xx}^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{1}{a} N_{\theta\theta}^{(n)} - \frac{n^2}{a^2} M_{\theta\theta}^{(n)} + \frac{2n}{a} \frac{\partial M_{x\theta}^{(n)}}{\partial x} - \rho h \omega^2 w_n \right) \ell_j(\xi) dx = \int_0^l p_n \ell_j(\xi) dx \tag{5.29c}$$

上式において式 (5.22)-(5.24) の座標変換を施すと，

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial N_{xx}^{(n)}}{\partial \xi} + \frac{l}{2} \frac{n}{a} N_{x\theta}^{(n)} + \frac{l}{2} \rho h \omega^2 u_n \right) \ell_j(\xi) d\xi = 0 \tag{5.30a}$$

$$\int_{-1}^1 \left(-\frac{l}{2} \frac{n}{a} N_{\theta\theta}^{(n)} + \frac{\partial N_{x\theta}^{(n)}}{\partial \xi} + \frac{l}{2} \rho h \omega^2 v_n \right) \ell_j(\xi) d\xi = 0 \tag{5.30b}$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{2}{l} \frac{\partial^2 M_{xx}^{(n)}}{\partial \xi^2} + \frac{l}{2} \frac{1}{a} N_{\theta\theta}^{(n)} - \frac{l}{2} \frac{n^2}{a^2} M_{\theta\theta}^{(n)} + \frac{2n}{a} \frac{\partial M_{x\theta}^{(n)}}{\partial \xi} - \frac{l}{2} \rho h \omega^2 w_n \right) \ell_j(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{l}{2} p_n \ell_j(\xi) d\xi \tag{5.30c}$$

となる。被積分関数の中の ξ についての微分の項を部分積分すると，

$$\left[N_{xx}^{(n)} \ell_j \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \left(-N_{xx}^{(n)} \ell_j' + \frac{l}{2} \frac{n}{a} N_{x\theta}^{(n)} \ell_j + \frac{l}{2} \rho h \omega^2 u_n \ell_j \right) d\xi = 0 \tag{5.31a}$$

$$\left[N_{x\theta}^{(n)} \ell_j \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \left(-\frac{l}{2} \frac{n}{a} N_{\theta\theta}^{(n)} \ell_j - N_{x\theta}^{(n)} \ell_j' + \frac{l}{2} \rho h \omega^2 v_n \ell_j \right) d\xi = 0 \tag{5.31b}$$

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{2}{l} \frac{\partial M_{xx}^{(n)}}{\partial \xi} + \frac{2n}{a} M_{x\theta}^{(n)} \right) \ell_j \right]_{-1}^1 - \left[\frac{2}{l} M_{xx}^{(n)} \ell_j' \right]_{-1}^1 \\ &+ \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{l} M_{xx}^{(n)} \ell_j'' + \frac{l}{2} \frac{1}{a} N_{\theta\theta}^{(n)} \ell_j - \frac{l}{2} \frac{n^2}{a^2} M_{\theta\theta}^{(n)} \ell_j - \frac{2n}{a} M_{x\theta}^{(n)} \ell_j' - \frac{l}{2} \rho h \omega^2 w_n \ell_j \right) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{l}{2} p_n \ell_j d\xi \end{aligned} \tag{5.31c}$$

となる。部分積分によって生じた定数項を次のようにおくこととする。

$$b_u^{(n)} = \left[N_{xx}^{(n)} \ell_j \right]_{-1}^1 = N_{xx}^{(n)}(1) \ell_j(1) - N_{xx}^{(n)}(-1) \ell_j(-1) \tag{5.32a}$$

$$b_v^{(n)} = \left[N_{x\theta}^{(n)} \ell_j \right]_{-1}^1 = N_{x\theta}^{(n)}(1) \ell_j(1) - N_{x\theta}^{(n)}(-1) \ell_j(-1) \tag{5.32b}$$

$$
\begin{aligned}
b_w^{(n)} &= -\left[\left(\frac{2}{l}\frac{\partial M_{xx}^{(n)}}{\partial \xi}+\frac{2n}{a}M_{x\theta}^{(n)}\right)\ell_j\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{2}{l}M_{xx}^{(n)}\ell_j'\right]_{-1}^{1}\\
&= -\left(\frac{2}{l}\frac{\partial M_{xx}^{(n)}}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=1}+\frac{2n}{a}M_{x\theta}^{(n)}(1)\right)\ell_j(1)+\left(\frac{2}{l}\frac{\partial M_{xx}^{(n)}}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=-1}+\frac{2n}{a}M_{x\theta}^{(n)}(-1)\right)\ell_j(-1)\\
&\quad+\frac{2}{l}M_{xx}^{(n)}(1)\ell_j'(1)-\frac{2}{l}M_{xx}^{(n)}(-1)\ell_j'(-1)
\end{aligned}
\tag{5.32c}
$$

次に，式 (5.31a)-(5.31c) に式 (5.5a)-(5.5f) を代入し，積分の中を整理する。まず，式 (5.31a) の積分は，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\left(-N_{xx}^{(n)}\ell_j'+\frac{l}{2}\frac{n}{a}N_{x\theta}^{(n)}\ell_j+\frac{l}{2}\rho h\omega^2u_n\ell_j\right)d\xi\\
&=\int_{-1}^{1}\left\{-\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{2}{l}\frac{\partial u_n}{\partial \xi}+\frac{\nu n}{a}v_n+\frac{\nu}{a}w_n\right)\ell_j'\right.\\
&\quad\left.+\frac{l}{2}\frac{n}{a}\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(-\frac{n}{a}u_n+\frac{2}{l}\frac{\partial v_n}{\partial \xi}\right)\ell_j+\frac{l}{2}\rho h\omega^2u_n\ell_j\right\}d\xi\\
&=\frac{Eh}{1-\nu^2}\int_{-1}^{1}\left\{-\left(\frac{2}{l}\frac{\partial u_n}{\partial \xi}+\frac{\nu n}{a}v_n+\frac{\nu}{a}w_n\right)\ell_j'\right.\\
&\quad\left.+\frac{l}{2}\frac{(1-\nu)n}{2a}\left(-\frac{n}{a}u_n+\frac{2}{l}\frac{\partial v_n}{\partial \xi}\right)\ell_j+\frac{l}{2}\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\omega^2u_n\ell_j\right\}d\xi\\
&=\frac{Eh}{1-\nu^2}\int_{-1}^{1}\left\{-\frac{2}{l}\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\ell_j'-\frac{l}{2}\frac{(1-\nu)n^2}{2a^2}u_n\ell_j\right.\\
&\quad\left.-\frac{\nu n}{a}v_n\ell_j'+\frac{(1-\nu)n}{2a}\frac{\partial v_n}{\partial \xi}\ell_j-\frac{\nu}{a}w_n\ell_j'+\frac{l}{2}\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}u_n\ell_j\right\}d\xi
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

となる。次に，式 (5.31b) の積分は，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\left(-\frac{l}{2}\frac{n}{a}N_{\theta\theta}^{(n)}\ell_j-N_{x\theta}^{(n)}\ell_j'+\frac{l}{2}\rho h\omega^2v_n\ell_j\right)d\xi\\
&=\int_{-1}^{1}\left\{-\frac{l}{2}\frac{n}{a}\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{n}{a}v_n+\frac{1}{a}w_n+\nu\frac{2}{l}\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\right)\ell_j\right.\\
&\quad\left.-\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(-\frac{n}{a}u_n+\frac{2}{l}\frac{\partial v_n}{\partial \xi}\right)\ell_j'+\frac{l}{2}\rho h\omega^2v_n\ell_j\right\}d\xi\\
&=\frac{Eh}{1-\nu^2}\int_{-1}^{1}\left\{-\frac{l}{2}\frac{n}{a}\left(\frac{n}{a}v_n+\frac{1}{a}w_n+\nu\frac{2}{l}\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\right)\ell_j\right.\\
&\quad\left.-\frac{1-\nu}{2}\left(-\frac{n}{a}u_n+\frac{2}{l}\frac{\partial v_n}{\partial \xi}\right)\ell_j'+\frac{l}{2}\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}v_n\ell_j\right\}d\xi\\
&=\frac{Eh}{1-\nu^2}\int_{-1}^{1}\left\{-\frac{\nu n}{a}\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\ell_j+\frac{(1-\nu)n}{2a}u_n\ell_j'\right.\\
&\quad\left.-\frac{l}{2}\frac{n^2}{a^2}v_n\ell_j-\frac{2}{l}\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial v_n}{\partial \xi}\ell_j'-\frac{l}{2}\frac{n}{a^2}w_n\ell_j+\frac{l}{2}\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}v_n\ell_j\right\}d\xi
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

となる。最後に，式 (5.31c) の積分は，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{l}M_{xx}^{(n)}\ell_j''+\frac{l}{2}\frac{1}{a}N_{\theta\theta}^{(n)}\ell_j-\frac{l}{2}\frac{n^2}{a^2}M_{\theta\theta}^{(n)}\ell_j-\frac{2n}{a}M_{x\theta}^{(n)}\ell_j'-\frac{l}{2}\rho h\omega^2 w_n\ell_j\right)d\xi\\
&=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{2}{l}\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{4}{l^2}\frac{\partial^2 w_n}{\partial\xi^2}-\frac{\nu n^2}{a^2}w_n\right)\ell_j''+\frac{l}{2}\frac{1}{a}\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{n}{a}v_n+\frac{1}{a}w_n+\nu\frac{2}{l}\frac{\partial u_n}{\partial\xi}\right)\ell_j\right.\\
&\quad\left.-\frac{l}{2}\frac{n^2}{a^2}\frac{Eh}{12(1-\nu^2)}\left(-\frac{n^2}{a^2}w_n+\nu\frac{4}{l^2}\frac{\partial^2 w_n}{\partial\xi^2}\right)\ell_j-\frac{2n}{a}\frac{Eh}{12(1+\nu)}\left(-\frac{n}{a}\frac{2}{l}\frac{\partial w_n}{\partial\xi}\right)\ell_j'-\frac{l}{2}\rho h\omega^2 w_n\ell_j\right\}d\xi\\
&=\frac{Eh}{1-\nu^2}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{2}{l}\frac{h^2}{12a^2}\left(\frac{4}{l^2}a^2\frac{\partial^2 w_n}{\partial\xi^2}-\nu n^2 w_n\right)\ell_j''+\frac{l}{2}\frac{1}{a}\left(\frac{n}{a}v_n+\frac{1}{a}w_n+\nu\frac{2}{l}\frac{\partial u_n}{\partial\xi}\right)\ell_j\right.\\
&\quad\left.-\frac{l}{2}\frac{h^2}{12a^2}n^2\left(-\frac{n^2}{a^2}w_n+\nu\frac{4}{l^2}\frac{\partial^2 w_n}{\partial\xi^2}\right)\ell_j-\frac{h^2}{12a^2}2(1-\nu)n\left(-n\frac{2}{l}\frac{\partial w_n}{\partial\xi}\right)\ell_j'-\frac{l}{2}\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}w_n\ell_j\right\}d\xi\\
&=\frac{Eh}{1-\nu^2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\nu}{a}\frac{\partial u_n}{\partial\xi}\ell_j+\frac{l}{2}\frac{n}{a^2}v_n\ell_j+\beta^2\left\{\frac{8}{l^3}a^2\frac{\partial^2 w_n}{\partial\xi^2}\ell_j''-\frac{2}{l}\nu n^2\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial\xi^2}\ell_j+w_n\ell_j''\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{2}{l}2(1-\nu)n^2\frac{\partial w_n}{\partial\xi}\ell_j'+\frac{l}{2}\frac{n^4}{a^2}w_n\ell_j\right\}+\frac{l}{2}\frac{1}{a^2}w_n\ell_j-\frac{l}{2}\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}w_n\ell_j\right]d\xi
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

となる。よって，式 (5.31a)-(5.31c) は式 (5.32a)-(5.32c) と (5.33)-(5.35) を用いて，次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\left\{\frac{2}{l}\frac{\partial u_n}{\partial\xi}\ell_j'+\frac{l}{2}\frac{(1-\nu)n^2}{2a^2}u_n\ell_j+\frac{\nu n}{a}v_n\ell_j'-\frac{(1-\nu)n}{2a}\frac{\partial v_n}{\partial\xi}\ell_j+\frac{\nu}{a}w_n\ell_j'-\frac{l}{2}\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}u_n\ell_j\right\}d\xi\\
&=\frac{1-\nu^2}{Eh}b_u^{(n)}
\end{aligned}
\tag{5.36a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\nu n}{a}\frac{\partial u_n}{\partial\xi}\ell_j-\frac{(1-\nu)n}{2a}u_n\ell_j'+\frac{l}{2}\frac{n^2}{a^2}v_n\ell_j+\frac{2}{l}\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial v_n}{\partial\xi}\ell_j'+\frac{l}{2}\frac{n}{a^2}w_n\ell_j-\frac{l}{2}\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}v_n\ell_j\right\}d\xi\\
&=\frac{1-\nu^2}{Eh}b_v^{(n)}
\end{aligned}
\tag{5.36b}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\left[\frac{\nu}{a}\frac{\partial u_n}{\partial\xi}\ell_j+\frac{l}{2}\frac{n}{a^2}v_n\ell_j+\beta^2\left\{\frac{8}{l^3}a^2\frac{\partial^2 w_n}{\partial\xi^2}\ell_j''-\frac{2}{l}\nu n^2\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial\xi^2}\ell_j+w_n\ell_j''\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{2}{l}2(1-\nu)n^2\frac{\partial w_n}{\partial\xi}\ell_j'+\frac{l}{2}\frac{n^4}{a^2}w_n\ell_j\right\}+\frac{l}{2}\frac{1}{a^2}w_n\ell_j-\frac{l}{2}\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}w_n\ell_j\right]d\xi=\frac{1-\nu^2}{Eh}\left(\frac{l}{2}\int_{-1}^{1}p_n\ell_j d\xi+b_w^{(n)}\right)
\end{aligned}
\tag{5.36c}
$$

上式の積分を数値積分で計算するため，ξ を LGL ノード ξ_i に離散化し，2.3.2 項で述べた手順に従って，微分を微分マトリクス，積分を LGL 数値積分で処理すると，最終的に次のようなマトリクス方程式が得られる。

$$
\left[\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11}&\boldsymbol{K}_{12}&\boldsymbol{K}_{13}\\\boldsymbol{K}_{21}&\boldsymbol{K}_{22}&\boldsymbol{K}_{23}\\\boldsymbol{K}_{31}&\boldsymbol{K}_{32}&\boldsymbol{K}_{33}\end{bmatrix}-\frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2}\frac{l}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{W}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\tilde{\boldsymbol{W}}\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}_n\\\boldsymbol{v}_n\\\boldsymbol{w}_n\end{Bmatrix}=\frac{1-\nu^2}{Eh}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{b}_u^{(n)}\\\boldsymbol{b}_v^{(n)}\\\frac{l}{2}\tilde{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{p}_n+\boldsymbol{b}_w^{(n)}\end{Bmatrix}
\tag{5.37}
$$

係数マトリクスの部分マトリクスは,

$$\boldsymbol{K}_{11} = \frac{2}{l}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}} + \frac{l}{2}\frac{(1-\nu)n^2}{2a^2}\boldsymbol{W} \tag{5.38a}$$

$$\boldsymbol{K}_{12} = \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{T}} = \frac{\nu n}{a}\boldsymbol{W}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}} - \frac{(1-\nu)n}{2a}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W} \tag{5.38b}$$

$$\boldsymbol{K}_{13} = \boldsymbol{K}_{31}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ \vdots & \dfrac{\nu}{a}\boldsymbol{W}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}} & \vdots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \tag{5.38c}$$

$$\boldsymbol{K}_{22} = \frac{2}{l}\frac{1-\nu}{2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}} + \frac{l}{2}\frac{n^2}{a^2}\boldsymbol{W} \tag{5.38d}$$

$$\boldsymbol{K}_{23} = \boldsymbol{K}_{32}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \dfrac{l}{2}\dfrac{n}{a^2}\boldsymbol{W} & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{5.38e}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_{33} = \beta^2 \Bigg[&\frac{8}{l^3}a^2 \left(\boldsymbol{D}_{\mathrm{H}}^2\right)^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{D}_{\mathrm{H}}^2 - \frac{2}{l}\nu n^2 \left\{ \left(\tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{L}}^2\right)^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{W}} + \tilde{\boldsymbol{W}} \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{L}}^2 \right\} \\ &+ \frac{2}{l} 2(1-\nu) n^2 \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{W}} \tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{L}} + \frac{l}{2}\frac{n^4}{a^2}\tilde{\boldsymbol{W}} \Bigg] + \frac{l}{2}\frac{1}{a^2}\tilde{\boldsymbol{W}}\end{aligned} \tag{5.38f}$$

である。$\boldsymbol{W}$ は LGL 数値積分の重み W_k を対角成分とするマトリクス $\boldsymbol{W} = \mathrm{diag}(W_k)$ である。また,

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{L}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \boldsymbol{D}_{\mathrm{L}} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

$$\tilde{\boldsymbol{W}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \boldsymbol{W} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

とおいた。式 (5.37) の右辺のベクトルは,

$$\boldsymbol{p}_n = \begin{Bmatrix} 0 & p_n(x_0) & p_n(x_1) & \cdots & p_n(x_M) & 0 \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.41}$$

$$\boldsymbol{b}_u^{(n)} = \begin{Bmatrix} -N_{xx}^{(n)}(-1) & 0 & \cdots & 0 & N_{xx}^{(n)}(1) \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.42a}$$

$$\boldsymbol{b}_v^{(n)} = \begin{Bmatrix} -N_{x\theta}^{(n)}(-1) & 0 & \cdots & 0 & N_{x\theta}^{(n)}(1) \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.42b}$$

$$\boldsymbol{b}_w^{(n)} = \begin{Bmatrix} -M_{xx}^{(n)}(-1) \\ \dfrac{2}{l}\dfrac{\partial M_{xx}^{(n)}}{\partial \xi}\Big|_{\xi=-1} + \dfrac{2n}{a}M_{x\theta}^{(n)}(-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\left(\dfrac{2}{l}\dfrac{\partial M_{xx}^{(n)}}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1} + \dfrac{2n}{a}M_{x\theta}^{(n)}(1) \right) \\ M_{xx}^{(n)}(1) \end{Bmatrix} \tag{5.42c}$$

表 5.1: 円筒シェルの計算条件

長さ l[m]	2.0
半径 a[m]	1.0
厚さ h[m]	1.0×10^{-3}
密度 ρ[kg/m^3]	7900
ヤング率 E[Pa]	205×10^9
ポアソン比 ν	0.3

である。

式 (5.37) の係数マトリクスは対称マトリクスである。そのため，連立方程式の解法として Cholesky 分解などが利用できる。また，右辺のベクトルは自然境界条件を含んでいるため，SCM のように係数マトリクスの特定の行を置き換えるという操作なく，自然境界条件を与えることができる。

5.2 数値計算例

5.2.1 単純支持された円筒シェルの固有値問題

前節で定式化した SCM と NGM，および従来手法として軸対称薄肉シェル要素 [41] による FEM の三つの手法で単純支持された円筒シェルの固有値問題を解き，得られた固有周波数の精度を比較する。円筒シェルにおける単純支持条件は次の式で定義される。

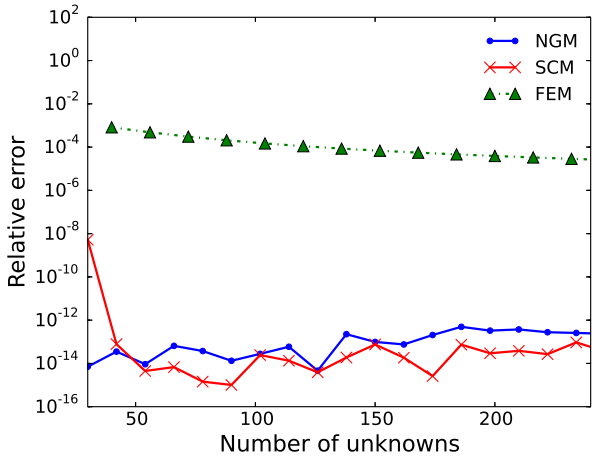
$$N_{xx}^{(n)} = v_n = w_n = M_{xx}^{(n)} = 0, \quad x = 0, l \tag{5.43}$$

単純支持された円筒シェルの固有周波数は理論解析的に求めることができる [39, 42]。それを真値とした各手法の相対誤差を算出した。計算した円筒シェルの物性値と寸法は表 5.1 の通りである。

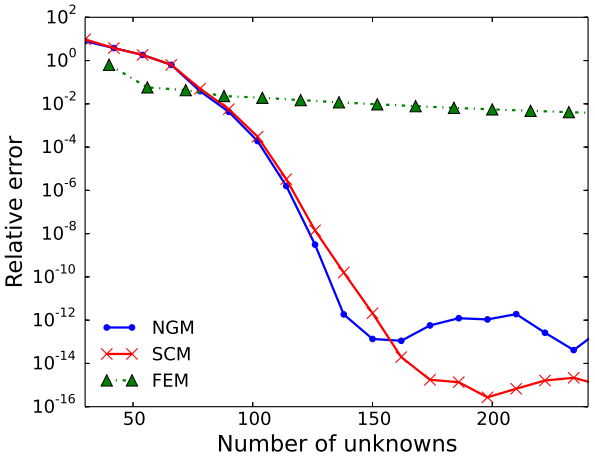
円周方向 (θ 方向) のモード次数を n，軸方向 (x 方向) のモード次数を m として，それらの組み合わせによるモード次数を (n, m) と書くこととする。(0, 1)，(0, 20)，(19, 1)，(19, 20) 次の固有周波数の相対誤差と円周方向と軸方向のモード次数をともに 20 個採用した計 400 個の固有周波数の平均相対誤差を図 5.2 に示す。FEM は誤差が大きく，自由度を大きくすると緩やかに収束していくのに対して，二つの提案手法は急速に誤差が収束しており，前章の結果と同じような傾向にある。相対誤差を各モード次数間で比較すると，軸方向のモード次数 m が大きいほど，誤差が収束し始める自由度が大きいことが分かる。一方，円周方向のモード次数 n については，0 次と 19 次で大きな差は見られない。これは円周方向については非連成化しており，円周方向のモード次数 n ごとに方程式が異なるためである。

また，二つの提案手法，SCM と NGM で比較すると，NGM のほうがわずかではあるが収束が速い。しかし，収束しきった誤差で比較すると，これもわずかな差ではあるが NGM のほうが SCM よりも誤差が大きいということが分かる。

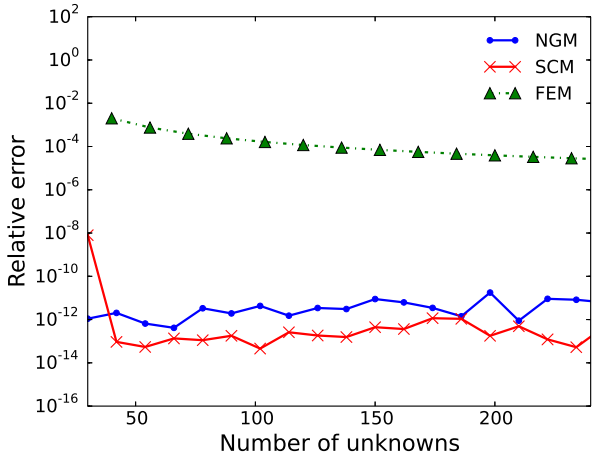
自由度を提案手法において (0, 1) 次と (19, 1) 次の固有周波数の相対誤差がほぼ収束している 48 と (0, 20) 次と (19, 20) 次の固有周波数の相対誤差がほぼ収束している 192 に設定し，軸方向のモード次数 m



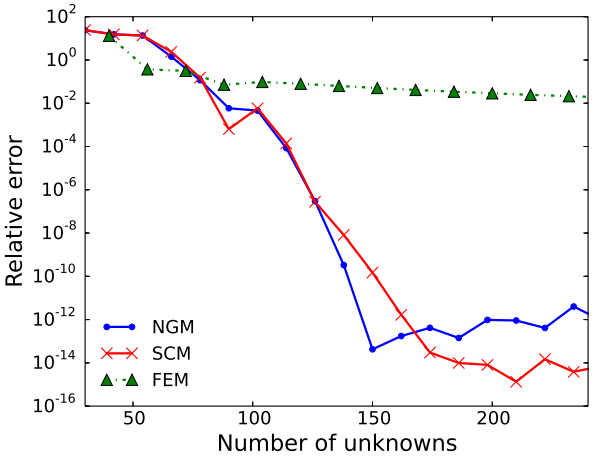
(a) (0, 1) 次



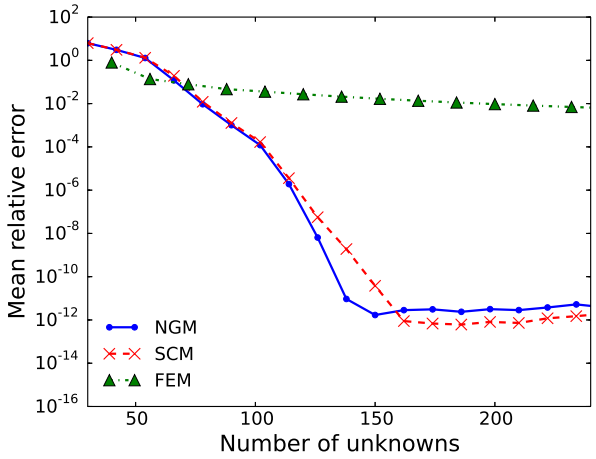
(b) (0, 20) 次



(c) (19, 1) 次

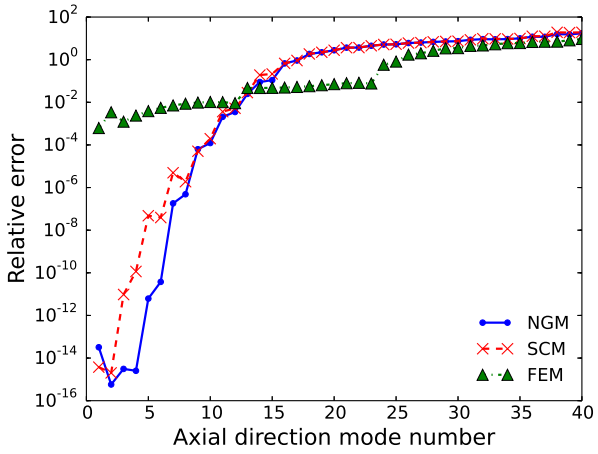


(d) (19, 20) 次

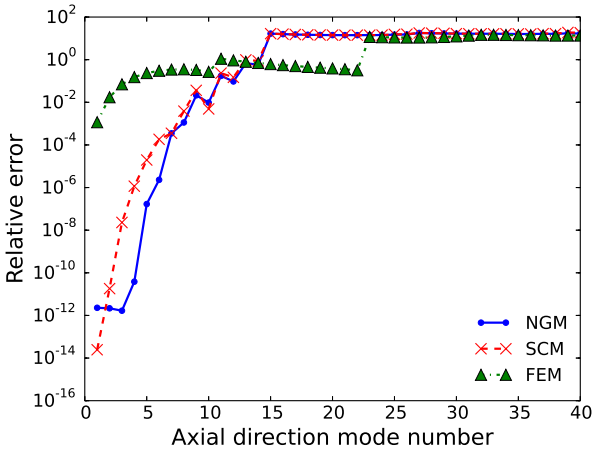


(e) 400 個の固有周波数の平均相対誤差

図 5.2: 未知数の数に対する固有周波数の相対誤差

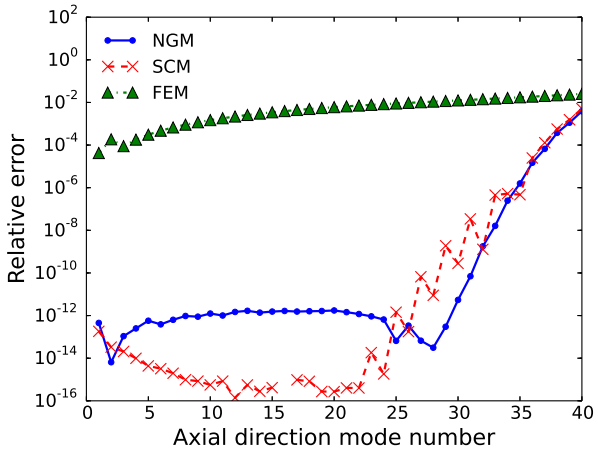


(a) (0, m) 次

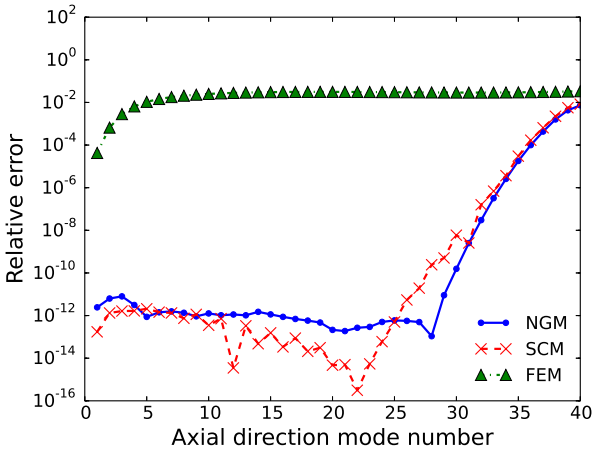


(b) (19, m) 次

図 5.3: 自由度を 48 としたときの各固有周波数の相対誤差



(a) (0, m) 次



(b) (19, m) 次

図 5.4: 自由度を 192 としたときの各固有周波数の相対誤差

の固有周波数ごとに相対誤差をプロットしたものが図 5.3 と 5.4 である。横軸が軸方向のモード次数 m を表している。円形薄板の場合と同様に，FEM は誤差の分布が平坦なのに対して，提案手法はモード次数が大きくなるにつれて誤差が急激に大きくなっている。これも円形薄板の場合のように不等間隔な節点に起因するものだと考えられる [30]。高いモード次数では提案手法の精度が FEM よりも悪くなっているが，そのような次数ではそもそも FEM の相対誤差も 0.01 より大きい。実用上，要求される相対誤差を 0.01 以下だとすると，同じ自由度であれば提案手法のほうが FEM よりもその精度を満たす固有周波数が多く，提案手法のほうが優位であると言える。

5.2.2　単純支持された円筒シェルの強制振動問題

次に，単純支持された円筒シェルに加振圧力を与えたときの変位分布を計算し，理論解析解との相対誤差を求めた。物性値と寸法についての計算条件は前項と同じである (表 5.1)。加振圧力の空間的な分布は次の式で与えた。

$$p(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-x_{\mathrm{s}})^2}{2\sigma^2}\right) \delta(\theta-\theta_{\mathrm{s}}) \tag{5.44}$$

加振圧力の広がりを表す標準偏差 σ は $\sigma = 0.1$ とし，加振圧力の中心位置は $(x_{\mathrm{s}}, \theta_{\mathrm{s}}) = (1.9, 0)$ とした。受振点は $\theta = 0$ の線上の両端を除く 199 点とした。フーリエ級数展開の打ち切り次数は提案手法，FEM，理論解析解いずれも 20 とした。評価する誤差として 4.2.2 項でも用いた L_2 相対誤差を本項でも採用する。再掲しておくと，次式で定義される誤差である。

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{J} |\bar{w}(x_j) - w(x_j)|^2}{\sum_{j=1}^{J} |w(x_j)|^2}} \tag{5.45}$$

$w(x_j)$ は理論解析解によって求めた法線方向の変位，$\bar{w}(x_j)$ は提案手法，または FEM によって求めた変位，J は受振点の数である。

自由度の比較

まず，図 5.5 に加振周波数を 125 Hz，250 Hz，500 Hz としたときの三つの手法における自由度に対する L_2 相対誤差を示す。固有値問題と同様，強制振動問題においてもやはり提案手法が FEM よりも少ない未知数で高精度の数値解を得られるということが分かる。L_2 相対誤差を 0.01 以下に抑えたい場合，FEM では 2000 自由度以上を要するのに対して，二つの提案手法は 100 以下の自由度で同等の精度が得られる。

NGM と SCM を比較してみると，自由度が少ないうちは誤差の減少する傾向はほぼ同じである。しかし，自由度が 1000 を超えたあたりで SCM では正しい解が得られなくなってしまっている。NGM についても 125 Hz では同じであるが，250 Hz と 500 Hz では自由度が 1000 を超えてもさらに誤差が減少している。これはスペクトル法における係数マトリクスの条件数の増加が原因だと考えられる。一般的に条件数が大きければ，数値計算における打ち切り誤差の影響が大きくなり，条件数の逆数が計算機イプシロンより小さくなると，妥当な解が得られなくなる。スペクトル法の微分マトリクスは自由度が大きくなると，条件数が急激に大きくなることが知られている。文献 [6] によると，SCM における条件数の増加率は $O(N^4)$ であるのに対して，NGM は $O(N^3)$ である。そのため，NGM のほうがより大きい自由度に対しても精度よく解を求められると考えられる。また，式 (5.37) の係数マトリクスは，$\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}$ という形をしており，周波数が低ければ微分マトリクスを含む $\boldsymbol{K}$ が相対的に大きくなり，周波数が高くなると微分マトリクスを含まない対角マトリクス $\boldsymbol{M}$ が相対的に大きくなる。つまり，係数マトリクス全体の条件数は周波数が低いほど大きくなる。そのため，同じ自由度の NGM でも 125 Hz では正しい解が得られなかったものと考えられる。

計算時間の比較

提案手法の係数マトリクスは密行列であるのに対して，FEM は係数マトリクスが疎行列となる。そのため，自由度のみによる評価は十分ではない。そこで，実際にかかった計算時間の比較を行う。

FEM のように大規模疎行列を係数マトリクスとする連立一次方程式の解法には，記憶容量や演算量を大きく削減できる反復法を用いることが本来は望ましい。しかし，反復法は解きたい問題によっては反復解がなかなか収束しないというリスクがある。シェルについてもそういった問題の一つであり，係数マトリクスが悪条件であるために反復法では解が収束するまでに多くの反復回数を要する，もしくは収束に失敗するということが起こる [43]。正しい解を得るためには前処理やパラメータの調整が必要であるが，それは本論文の範疇を超えた別の課題である。よって，本論文では確実性が高い疎行列向けの直接法を用いることとした。

各手法の連立一次方程式の求解には汎用数値計算ライブラリ NAG を用いた。実行環境と各手法に用いたサブルーチンは次の通りである。

- CPU: Intel Xeon 2.00 GHz
- Memory: 4 GB
- Library: NAG C Library Mark 8
- Subroutines:
  - NGM: nag_real_sym_lin_solve
  - SCM: nag_real_gen_lin_solve
  - FEM: nag_superlu_column_permutation/nag_superlu_lu_factorize/nag_superlu_solve_lu

図 5.6 は，各手法において，マトリクスの構築から変位分布の計算にかかった計算時間と L_2 相対誤差の関係を示している。自由度は図 5.5 は同じであるが，計測できる時間分解能より計算時間が短かったものについてはプロットできていない。これは周波数が 125 Hz，250 Hz のとき，FEM では 100 秒近くかかる計算が NGM や SCM では計測できないほど短い時間で計算できるということを示している。

また，NGM と SCM を比較してみると，NGM のほうがわずかに計算時間が短くなっているが，ほぼ変わらない。NGM の係数マトリクスは対称なのでコレスキー分解を，SCM は非対称なので LU 分解を用いている。しかし，実際の計算時間は単純に半分にはならないようである。

必要メモリ容量の比較

最後に係数マトリクスを格納するために必要なメモリ容量の比較を行う。SCM の係数マトリクスは非対称密行列であるので係数を 2 次元配列として格納したときのメモリ容量を算出し，対称密行列となる NGM についてはその半分とした。FEM の係数マトリクスは疎行列であるので，非零成分のみを格納する圧縮行格納形式 [44] でのメモリ容量を算出した。

図 5.7 はさきほどのグラフの横軸を必要メモリ容量にしてプロットしたものである。メモリ容量についても，今回検討した範囲においては二つの提案手法のほうが FEM よりも小さくなっている。しかし，周波数が高くなるにつれてその差は縮まる傾向にあり，より高い周波数では FEM が省メモリとなる可能性はある。

NGM と SCM においては，同じ自由度であればほぼ同じ精度の得られることから，対称マトリクスとなる NGM のほうが省メモリということになる。これらの結果から，NGM は定式化，マトリクスの構成が複雑にはなるものの，マトリクスの条件数や必要メモリ容量といった観点では SCM よりも優れているということが言えそうである。

5.2.3　完全固定された円筒シェルの強制振動問題

最後に理論解析解を求めることができない例として，両端を固定された円筒シェルの強制振動問題を解く。円筒シェルの両端固定条件は次のように表される。

$$u_n = v_n = w_n = \frac{\partial w_n}{\partial x} = 0, \quad x = 0, l \tag{5.46}$$

寸法と物性値についての計算条件は表 5.1 の通りである。加振点は $(x_s, \theta_s) = (1.9, 0)$ とし，受振点を $(x, \theta) = (0.1, 0), (0.1, \pi), (1.9, \pi)$ の 3 点とした。

これまでの結果より，二つの提案手法のうち NGM のほうが安定性とメモリ容量の観点で優れていることから，今回は NGM のみの結果を示す。両端固定条件は理論解析解を求めることができないため，自由度を大きくした FEM の解を参照解とする。図 5.5(b) より，FEM の自由度が 1600 程度であれば L_2 相対誤差が 0.01 程度に抑えられることが分かる。よって，これを参照解とした。また，同図より提案手法の自由度はそれと同等の精度が得られている 60 とした。

図 5.8 から 5.10 に各受振点における周波数応答関数を示す。凡例の数値は自由度を表している。自由度 60 の提案手法によって計算した周波数応答関数は，自由度 1600 の FEM の周波数応答関数に一致していることが分かる。図にはそれらに加えて自由度 60 の FEM によって計算した周波数応答関数を示しているが，周波数が高くなるにつれて参照解からの誤差が大きくなっていることが分かる。この結果から提案手法は両端固定された円筒シェルの強制振動についても正しく計算でき，また，同じ自由度の FEM よりも精度が高いということが分かる。

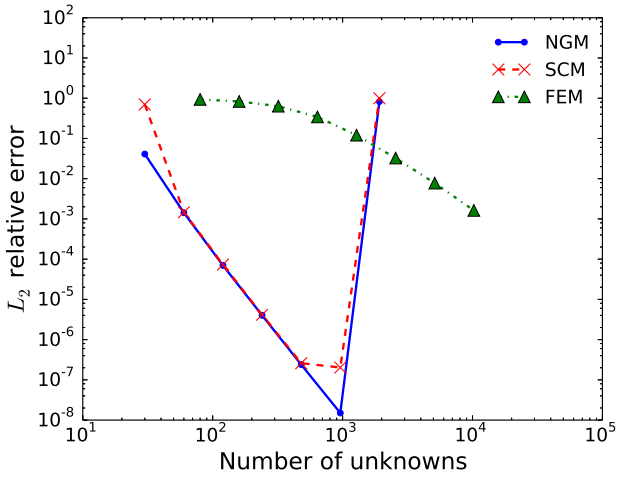
5.3　まとめ

本章では円筒シェル振動場の効率的な解析手法を提案した。4 階微分方程式を四つの境界条件のもとで解くために，Hermite 補間型微分マトリクスを用いた。Hermite 補間では節点値に加えて境界の微係数を用いるため，それらがマトリクス方程式の未知数として加わり，従来方法で不足していた二つの境界条件を課すことができる。

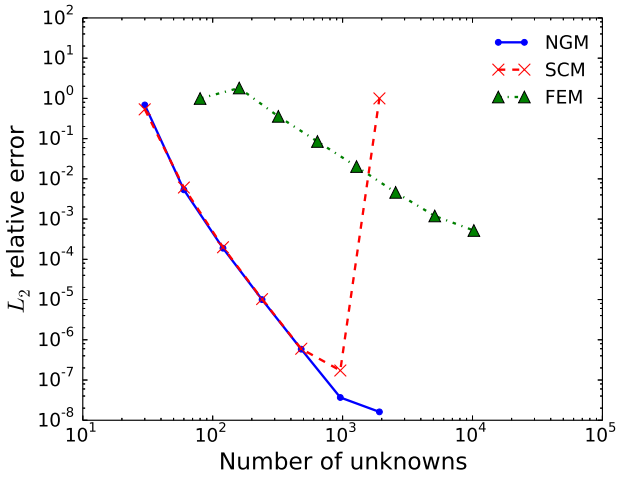
また，定式化において SCM と NGM という二つのスペクトル法での定式化を行った。SCM は微分方程式の微分作用素を微分マトリクスで置き換えるだけでマトリクス方程式が得られるため，より単純な方法である。一方，NGM は数値積分を要するため，煩雑にはなってしまうが，連立一次方程式の特定の行を置き換えるという操作なく，自然境界条件を課すことができる。

二つの提案手法と軸対称薄肉シェル要素を用いた FEM の計算精度，計算時間，必要メモリ容量を比較したところ，提案手法のほうが高精度，高速，省メモリであることを確認した。ただし，周波数が高くになるにつれてこれらの差は小さくなる傾向にあった。二つの提案手法を比較すると，SCM は自由度が大

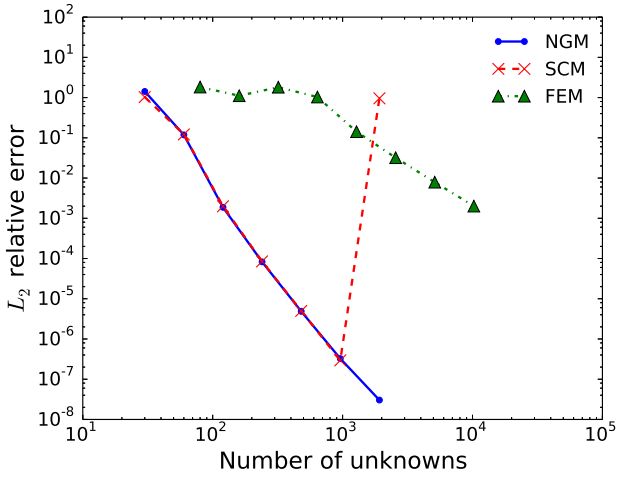
きくなると正しい解が得られなくなるのに対して，NGM はより安定して解が得られることや NGM の係数マトリクスは対称であるため省メモリであることなどを確認できた。



(a) 125 Hz

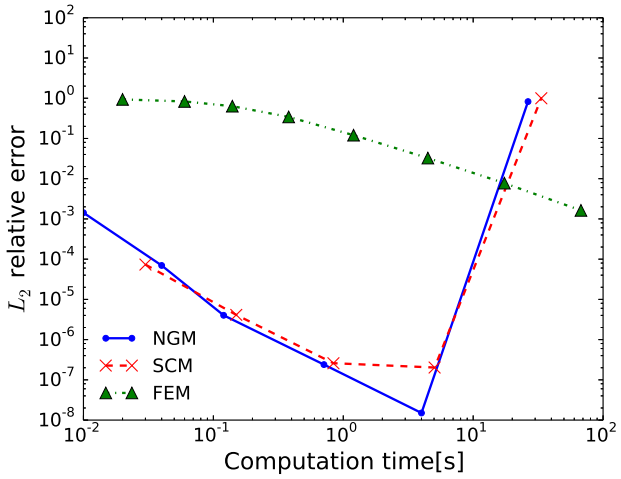


(b) 250 Hz

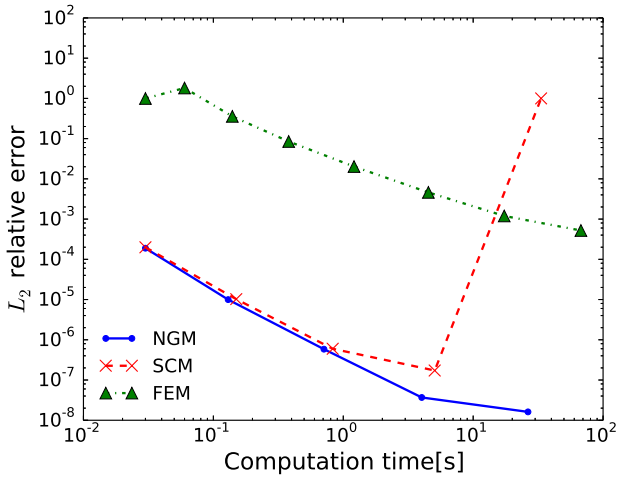


(c) 500 Hz

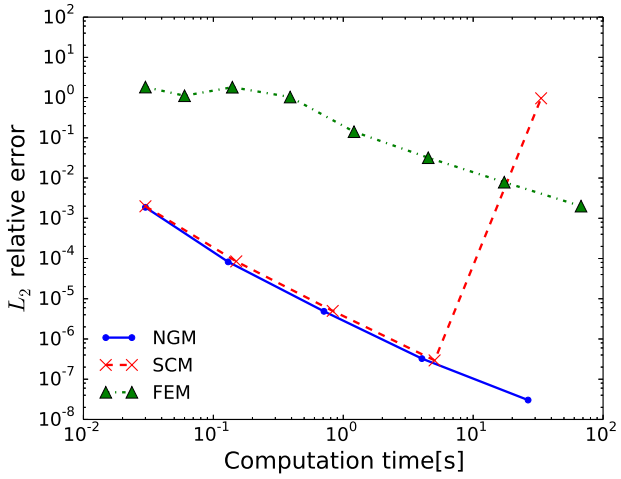
図 5.5: 未知数の数に対する変位分布の L_2 相対誤差



(a) 125 Hz

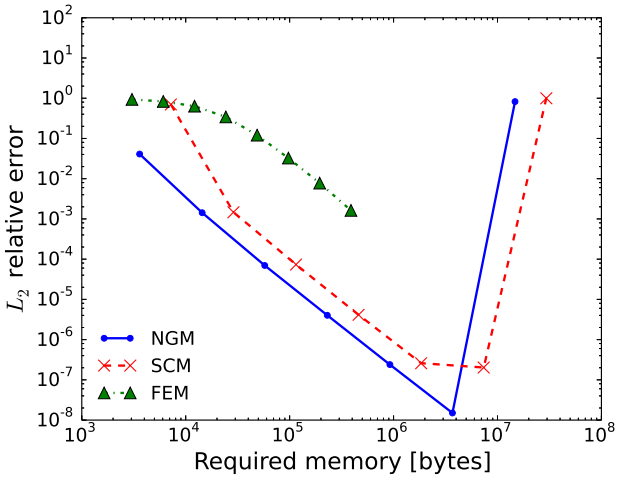


(b) 250 Hz

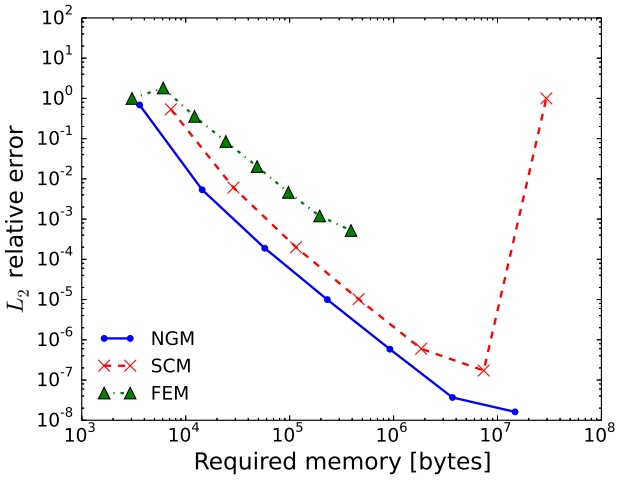


(c) 500 Hz

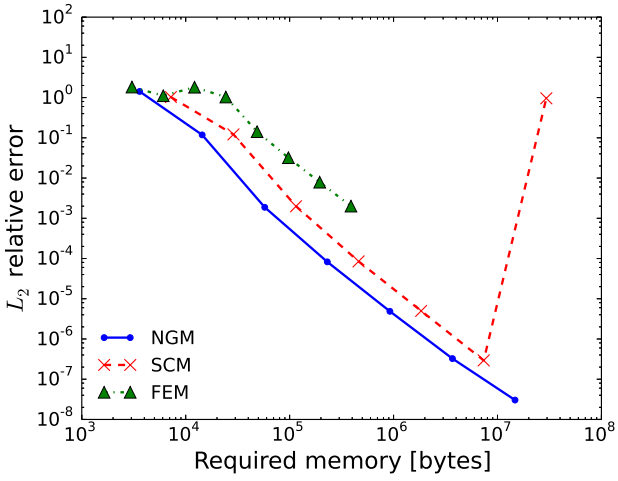
図 5.6: 計算時間に対する変位分布の L_2 相対誤差



(a) 125 Hz



(b) 250 Hz



(c) 500 Hz

図 5.7: 必要メモリ容量に対する変位分布の L_2 相対誤差

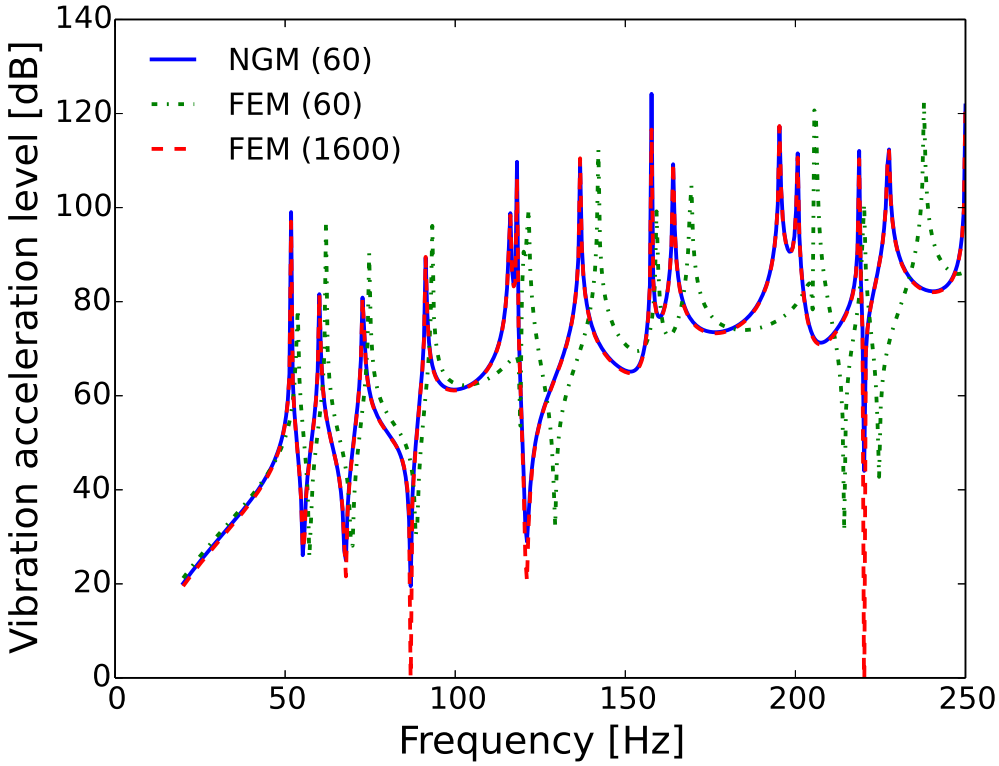


図 5.8: 完全固定された円筒シェルの周波数応答関数 (受振点 $(x, \theta) = (0.1, 0)$)

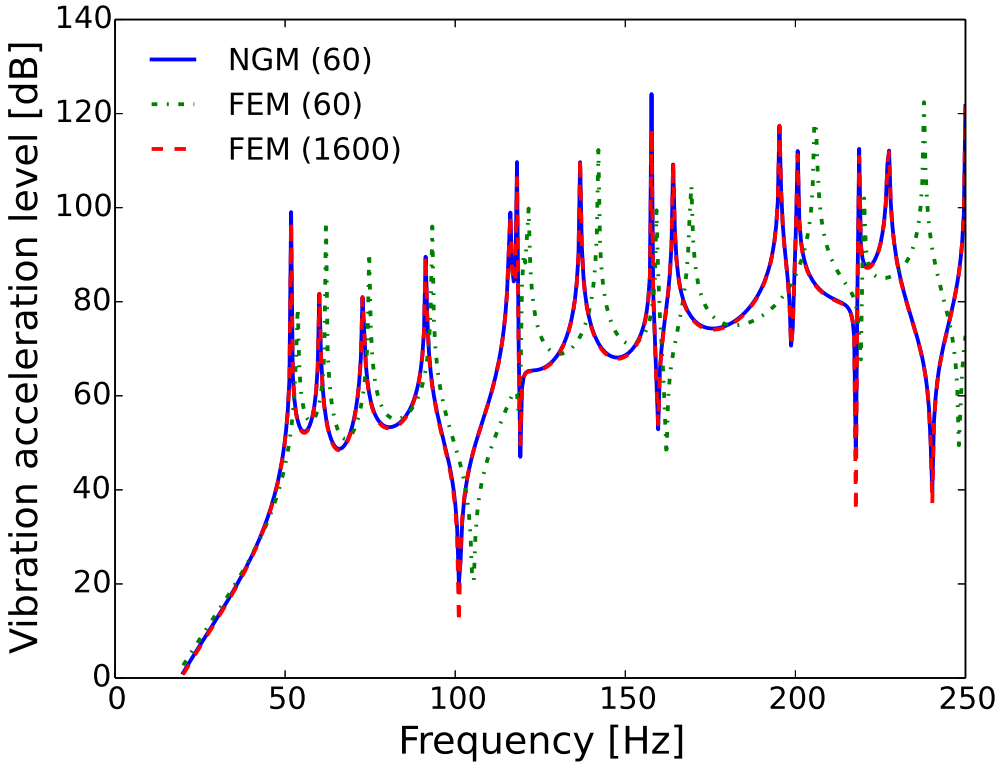


図 5.9: 完全固定された円筒シェルの周波数応答関数 (受振点 $(x, \theta) = (0.1, \pi)$)

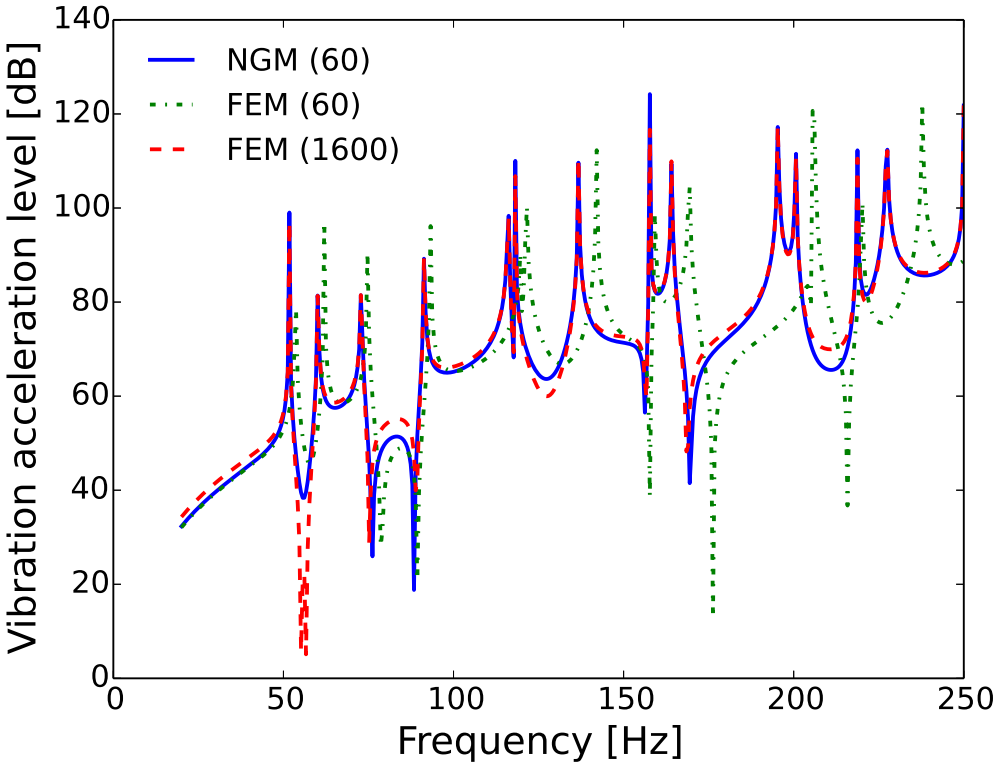


図 5.10: 完全固定された円筒シェルの周波数応答関数 (受振点 $(x, \theta) = (1.9, \pi)$)

第 6 章

スペクトル法による軸対称空洞内の音場解析

これまでも定式化の中で触れてきたように，スペクトル法は節点に Chebyshev ノード，もしくは Legendre-Gauss-Lobatto ノードを用いる。これらは区間 [-1, 1] において定義されるため，二次元や三次元の問題を解く場合，通常の方法では矩形の領域しか解析することができない。膜鳴楽器では，ドラムの内部音場は円筒形をしているため，回転断面を矩形と見なすことができるが，ティンパニの場合には楕円形をしており，回転断面を矩形として扱って解析することは適切ではない。

そこで本章では軸対称形状を有する音場に一般曲線座標系を導入することによって，円筒形以外のより一般的な軸対称形状音場もスペクトル法で解析できるようにする。まず，回転断面を一般曲線座標系によって表し，Helmholtz 方程式を書き換える。一般曲線座標系から物理座標系への変換は，四つの境界から領域内部の座標を補間する Transfinite 補間を用いて定義することができる。円周方向についてはこれまで同様，フーリエ級数展開する。数値計算例としてティンパニの内部音場を提案手法により解析する。

6.1 提案解析手法

6.1.1 一般曲線座標系における Helmholtz 方程式

図 6.1 のような一般曲線座標系 (ξ, η) とその物理座標系への変換 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(\xi, \eta)$ を用いることで，矩形以外の任意形状をもつ領域の解析が可能になる。実際の計算は物理座標系ではなく一般曲線座標系上で行うため，ここでは Helmhotz 方程式を一般曲線座標系で表す。

まず，一般曲線座標系 (ξ, θ, η) で物理座標系 $\boldsymbol{X}(\xi, \theta, \eta) = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}$ を表すことを考える。ここで $\hat{x}$，$\hat{y}$，$\hat{z}$ は物理座標系の基底ベクトルを表している。具体的には，

$$X(\xi, \theta, \eta) = R(\xi, \eta)\cos\theta \tag{6.1a}$$
$$Y(\xi, \theta, \eta) = R(\xi, \eta)\sin\theta \tag{6.1b}$$
$$Z(\xi, \theta, \eta) = Z(\xi, \eta) \tag{6.1c}$$

のように表されるものとする。なお以降，単なる座標を指す場合には r，z のように小文字で，ξ，η の変換関数という意味を強調する場合には R，Z のように大文字で表記することとする。一般的な変換の手順

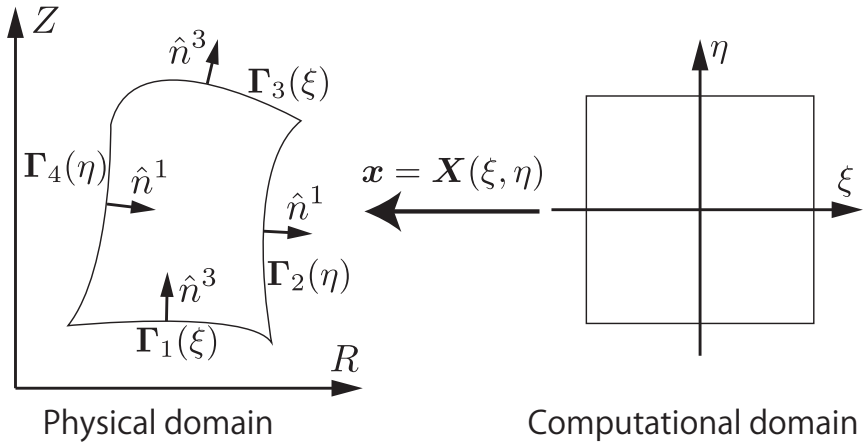


図 6.1: 計算空間から物理空間への変換

は付録に記すこととし，本節ではそれに従って上記の場合の導出を行っていく。式 (6.1a) と (6.1b) を一般曲線座標系で微分したものは，

$$X_\xi = R_\xi \cos\theta \tag{6.2a}$$
$$X_\theta = -R \sin\theta \tag{6.2b}$$
$$X_\eta = R_\eta \cos\theta \tag{6.2c}$$
$$Y_\xi = R_\xi \sin\theta \tag{6.2d}$$
$$Y_\theta = R \cos\theta \tag{6.2e}$$
$$Y_\eta = R_\eta \sin\theta \tag{6.2f}$$

となる。ここで，添字はそれぞれの変数による微分を表している。一般曲線座標系の軸に沿った共変基底ベクトルは物理座標系で次のように表される。

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \xi} = X_\xi \hat{x} + Y_\xi \hat{y} + Z_\xi \hat{z} \tag{6.3a}$$
$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \theta} = X_\theta \hat{x} + Y_\theta \hat{y} \tag{6.3b}$$
$$\boldsymbol{a}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \eta} = X_\eta \hat{x} + Y_\eta \hat{y} + Z_\eta \hat{z} \tag{6.3c}$$

次にヤコビアンを求めると，

$$\begin{aligned}
J &= \boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3) \\
&= (X_\xi \hat{x} + Y_\xi \hat{y} + Z_\xi \hat{z}) \cdot \{(X_\theta \hat{x} + Y_\theta \hat{y}) \times (X_\eta \hat{x} + Y_\eta \hat{y} + Z_\eta \hat{z})\} \\
&= (X_\xi \hat{x} + Y_\xi \hat{y} + Z_\xi \hat{z}) \cdot \{Y_\theta Z_\eta \hat{x} - X_\theta Z_\eta \hat{y} + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\hat{z}\} \\
&= X_\xi Y_\theta Z_\eta - Y_\xi X_\theta Z_\eta + Z_\xi (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta) \\
&= X_\xi Y_\theta Z_\eta - Y_\xi X_\theta Z_\eta + Z_\xi X_\theta Y_\eta - Z_\xi Y_\theta X_\eta \\
&= (R_\xi \cos\theta)(R\cos\theta) Z_\eta - (R_\xi \sin\theta)(-R\sin\theta) Z_\eta \\
&\quad + Z_\xi (-R\sin\theta)(R_\eta \sin\theta) - Z_\xi (R\cos\theta)(R_\eta \cos\theta) \\
&= R R_\xi Z_\eta - R R_\eta Z_\xi \\
&= R(R_\xi Z_\eta - R_\eta Z_\xi)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

となる。反変基底ベクトルは共変基底ベクトルの外積より，

$$\begin{aligned} J\boldsymbol{a}^1 &= \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3 \\ &= (X_\theta \hat{x} + Y_\theta \hat{y}) \times (X_\eta \hat{x} + Y_\eta \hat{y} + Z_\eta \hat{z}) \\ &= Y_\theta Z_\eta \hat{x} - X_\theta Z_\eta \hat{y} + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\hat{z} \end{aligned} \tag{6.5a}$$

$$\begin{aligned} J\boldsymbol{a}^2 &= \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1 \\ &= (X_\eta \hat{x} + Y_\eta \hat{y} + Z_\eta \hat{z}) \times (X_\xi \hat{x} + Y_\xi \hat{y} + Z_\xi \hat{z}) \\ &= (Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)\hat{x} + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)\hat{y} + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)\hat{z} \end{aligned} \tag{6.5b}$$

$$\begin{aligned} J\boldsymbol{a}^3 &= \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \\ &= (X_\xi \hat{x} + Y_\xi \hat{y} + Z_\xi \hat{z}) \times (X_\theta \hat{x} + Y_\theta \hat{y}) \\ &= -Z_\xi Y_\theta \hat{x} + Z_\xi X_\theta \hat{y} + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)\hat{z} \end{aligned} \tag{6.5c}$$

となる。曲面 $\xi = \text{const.}$ に垂直な法線ベクトルを $\hat{n}^1$，曲面 $\theta = \text{const.}$ に垂直な法線ベクトルを $\hat{n}^2$，曲面 $\eta = \text{const.}$ に垂直な法線ベクトルを $\hat{n}^3$ とすると，

$$\begin{aligned} \hat{n}^1 &= \frac{|J|}{J} \frac{\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3}{\|\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3\|} \\ &= \frac{|J|}{J} \frac{Y_\theta Z_\eta \hat{x} - X_\theta Z_\eta \hat{y} + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\hat{z}}{\sqrt{Y_\theta^2 Z_\eta^2 + X_\theta^2 Z_\eta^2 + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)^2}} \end{aligned} \tag{6.6a}$$

$$\begin{aligned} \hat{n}^2 &= \frac{|J|}{J} \frac{\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1\|} \\ &= \frac{|J|}{J} \frac{(Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)\hat{x} + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)\hat{y} + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)\hat{z}}{\sqrt{(Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)^2 + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)^2 + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)^2}} \end{aligned} \tag{6.6b}$$

$$\begin{aligned} \hat{n}^3 &= \frac{|J|}{J} \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{\|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2\|} \\ &= \frac{|J|}{J} \frac{-Z_\xi Y_\theta \hat{x} + Z_\xi X_\theta \hat{y} + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)\hat{z}}{\sqrt{Z_\xi^2 Y_\theta^2 + Z_\xi^2 X_\theta^2 + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)^2}} \end{aligned} \tag{6.6c}$$

である。

次に速度ポテンシャル ϕ の一般曲線座標系における微分演算を求めていく。まず勾配 $\boldsymbol{\Phi} = \nabla\phi$ は,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi} &= \nabla\phi \\
&= \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3} J\boldsymbol{a}^i \frac{\partial\phi}{\partial\xi^i} \\
&= \frac{1}{J}\left[\{Y_\theta Z_\eta\hat{x} - X_\theta Z_\eta\hat{y} + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\hat{z}\}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right. \\
&\quad + \{(Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)\hat{x} + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)\hat{y} + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)\hat{z}\}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \\
&\quad \left. + \{-Z_\xi Y_\theta\hat{x} + Z_\xi X_\theta\hat{y} + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)\hat{z}\}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right] \\
&= \frac{1}{J}\left[\left\{Y_\theta Z_\eta\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - Z_\xi Y_\theta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right\}\hat{x}\right. \\
&\quad + \left\{-X_\theta Z_\eta\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + Z_\xi X_\theta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right\}\hat{y} \\
&\quad \left. + \left\{(X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right\}\hat{z}\right] \\
&= \Phi_x\hat{x} + \Phi_y\hat{y} + \Phi_z\hat{z}
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

となる。ここで

$$
\Phi_x = \frac{1}{J}\left\{Y_\theta Z_\eta\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - Z_\xi Y_\theta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right\} \tag{6.8a}
$$

$$
\Phi_y = \frac{1}{J}\left\{-X_\theta Z_\eta\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + Z_\xi X_\theta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right\} \tag{6.8b}
$$

$$
\Phi_z = \frac{1}{J}\left\{(X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right\} \tag{6.8c}
$$

とおいた。速度ポテンシャル ϕ のラプラシアン，つまり $\boldsymbol{\Phi}$ の発散は,

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= \nabla\cdot\nabla\phi \\
&= \nabla\cdot\boldsymbol{\Phi} \\
&= \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\left(J\boldsymbol{a}^i\cdot\boldsymbol{\Phi}\right) \\
&= \frac{1}{J}\left(\frac{\partial\Phi^1}{\partial\xi} + \frac{\partial\Phi^2}{\partial\theta} + \frac{\partial\Phi^3}{\partial\eta}\right)
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

ここで，$\Phi^i = J\boldsymbol{a}^i\cdot\boldsymbol{\Phi}$ であり，これはベクトル $\boldsymbol{\Phi}$ を一般曲線座標系における基底ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ で表したと

きの反変成分 $\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{\Phi}$ を J 倍したものに相当する。これらを ϕ を使って表していく。Φ^1 は,

$$\begin{aligned}
\Phi^1 &= J\boldsymbol{a}^1 \cdot \boldsymbol{\Phi} \\
&= Y_\theta Z_\eta \Phi_x - X_\theta Z_\eta \Phi_y + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\Phi_z \\
&= \frac{1}{J}\left[Y_\theta Z_\eta \left\{ Y_\theta Z_\eta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + (Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - Z_\xi Y_\theta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right\} \right. \\
&\quad - X_\theta Z_\eta \left\{ -X_\theta Z_\eta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + Z_\xi X_\theta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right\} \\
&\quad \left. + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta) \left\{ (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right\} \right] \\
&= \frac{1}{J}\left[\left\{ Y_\theta^2 Z_\eta^2 + X_\theta^2 Z_\eta^2 + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)^2 \right\} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right. \\
&\quad + \left\{ Y_\theta Z_\eta (Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi) - X_\theta Z_\eta (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi) + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)(X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi) \right\} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\
&\quad \left. + \left\{ -Y_\theta^2 Z_\eta Z_\xi - X_\theta^2 Z_\eta Z_\xi + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)(X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta) \right\} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]
\end{aligned} \tag{6.10}$$

となる。$\partial\phi/\partial\xi$ の係数を取り出し，整理すると，

$$\begin{aligned}
& Y_\theta^2 Z_\eta^2 + X_\theta^2 Z_\eta^2 + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)^2 \\
&= R^2 \cos^2\theta Z_\eta^2 + R^2 \sin^2\theta Z_\eta^2 + (-RR_\eta \sin^2\theta - RR_\eta \cos^2\theta)^2 \\
&= R^2 Z_\eta^2 + R^2 R_\eta^2
\end{aligned} \tag{6.11}$$

となる。次に，$\partial\phi/\partial\theta$ の係数は,

$$\begin{aligned}
& Y_\theta Z_\eta (Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi) - X_\theta Z_\eta (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi) + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)(X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi) \\
&= (Y_\theta Y_\eta + X_\theta X_\eta) Z_\xi Z_\eta - (Y_\xi Y_\theta + X_\xi X_\theta) Z_\eta^2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.12}$$

となる。最後に，$\partial\phi/\partial\eta$ の係数は,

$$\begin{aligned}
& -Y_\theta^2 Z_\eta Z_\xi - X_\theta^2 Z_\eta Z_\xi + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)(X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta) \\
&= -R^2 Z_\eta Z_\xi \cos^2\theta - R^2 Z_\eta Z_\xi \sin^2\theta + (-RR_\eta \sin^2\theta - RR_\eta \cos^2\theta)(RR_\xi \cos^2\theta + RR_\xi \sin^2\theta) \\
&= -R^2 Z_\eta Z_\xi - R^2 R_\eta R_\xi
\end{aligned} \tag{6.13}$$

となる。これらより，Φ^1 は最終的に

$$\Phi^1 = \frac{1}{J}\left\{ R^2 (Z_\eta^2 + R_\eta^2)\frac{\partial \phi}{\partial \xi} - R^2 (Z_\eta Z_\xi + R_\eta R_\xi)\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right\} \tag{6.14}$$

となる。同じようにして，Φ^2 を求める。

$$
\begin{aligned}
\Phi^2 &= J\boldsymbol{a}^2 \cdot \boldsymbol{\Phi} \\
&= (Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)\Phi_x + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)\Phi_y + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)\Phi_z \\
&= \frac{1}{J}\left[(Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)\left\{Y_\theta Z_\eta \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - Z_\xi Y_\theta \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right\}\right. \\
&\quad +(Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)\left\{-X_\theta Z_\eta \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + Z_\xi X_\theta \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right\} \\
&\quad \left.+(X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)\left\{(X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{J}\left[\{(Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)Y_\theta Z_\eta - (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)X_\theta Z_\eta + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)(X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right. \\
&\quad + \left\{(Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)^2 + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)^2 + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)^2\right\}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \\
&\quad \left.+\{-(Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)Z_\xi Y_\theta + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)Z_\xi X_\theta + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)(X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)\}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right]
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

$\partial\phi/\partial\xi$ の係数は，

$$
\begin{aligned}
&(Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)Y_\theta Z_\eta - (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)X_\theta Z_\eta + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)(X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta) \\
&= (Y_\eta Y_\theta + X_\eta X_\theta)Z_\xi Z_\eta - (Y_\xi Y_\theta + X_\xi X_\theta)Z_\eta^2 \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

$\partial\phi/\partial\theta$ の係数は，

$$
\begin{aligned}
&(Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)^2 + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)^2 + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)^2 \\
&= (Y_\eta^2 + X_\eta^2)Z_\xi^2 - 2(Y_\xi Y_\eta + X_\xi X_\eta)Z_\xi Z_\eta + (Y_\xi^2 + X_\xi^2)Z_\eta^2 \\
&= R_\eta^2 Z_\xi^2 - 2R_\xi R_\eta Z_\xi Z_\eta + R_\xi^2 Z_\eta^2 \\
&= (R_\eta Z_\xi - R_\xi Z_\eta)^2
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

$\partial\phi/\partial\eta$ の係数は，

$$
\begin{aligned}
&-(Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)Z_\xi Y_\theta + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)Z_\xi X_\theta + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)(X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta) \\
&= -(Y_\eta Y_\theta + X_\eta X_\theta)Z_\xi^2 + (Y_\xi Y_\theta + X_\xi X_\theta)Z_\xi Z_\eta \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

となり，Φ^2 は，

$$
\Phi^2 = \frac{1}{J}(R_\eta Z_\xi - R_\xi Z_\eta)^2 \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{6.19}
$$

と表される。最後に Φ^3 は,

$$\begin{aligned}
\Phi^3 &= J\boldsymbol{a}^3 \cdot \boldsymbol{\Phi} \\
&= -Z_\xi Y_\theta \Phi_x + Z_\xi X_\theta \Phi_y + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)\Phi_z \\
&= \frac{1}{J}\left[-Z_\xi Y_\theta \left\{ Y_\theta Z_\eta \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - Z_\xi Y_\theta \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right\} \right. \\
&\quad + Z_\xi X_\theta \left\{ -X_\theta Z_\eta \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + Z_\xi X_\theta \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right\} \\
&\quad \left. + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta) \left\{ (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right\} \right] \\
&= \frac{1}{J}\left[\left\{ -Y_\theta^2 Z_\xi Z_\eta - X_\theta^2 Z_\xi Z_\eta + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)(X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta) \right\} \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right. \\
&\quad + \left\{ -Z_\xi Y_\theta (Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi) + Z_\xi X_\theta (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi) + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)(X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi) \right\} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \\
&\quad \left. + \left\{ Z_\xi^2 Y_\theta^2 + Z_\xi^2 X_\theta^2 + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)^2 \right\} \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right] \qquad (6.20)
\end{aligned}$$

$\partial\phi/\partial\xi$ の係数は,

$$\begin{aligned}
&-Y_\theta^2 Z_\xi Z_\eta - X_\theta^2 Z_\xi Z_\eta + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)(X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta) \\
&= -R^2 Z_\xi Z_\eta \cos^2\theta - R^2 Z_\xi Z_\eta \sin^2\theta + (RR_\xi \cos^2\theta + RR_\xi \sin^2\theta)(-RR_\eta \sin^2\theta - RR_\eta \cos^2\theta) \\
&= -R^2 Z_\xi Z_\eta - R^2 R_\xi R_\eta \qquad (6.21)
\end{aligned}$$

$\partial\phi/\partial\theta$ の係数は,

$$\begin{aligned}
&-Z_\xi Y_\theta (Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi) + Z_\xi X_\theta (Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi) + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)(X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi) \\
&= -(Y_\theta Y_\eta + X_\theta X_\eta) Z_\xi^2 + (Y_\theta Y_\xi + X_\theta X_\xi) Z_\xi Z_\eta \\
&= 0 \qquad (6.22)
\end{aligned}$$

$\partial\phi/\partial\eta$ の係数は,

$$\begin{aligned}
&Z_\xi^2 Y_\theta^2 + Z_\xi^2 X_\theta^2 + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)^2 \\
&= R^2 Z_\xi^2 + R^2 R_\xi^2 \qquad (6.23)
\end{aligned}$$

となり，よって Φ^3 は,

$$\Phi^3 = \frac{1}{J}\left\{ -R^2 (Z_\xi Z_\eta + R_\xi R_\eta)\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + R^2 (Z_\xi^2 + R_\xi^2)\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right\} \qquad (6.24)$$

と表される。これで，速度ポテンシャル ϕ を使って Φ^1，Φ^2，Φ^3 を表すことができた。

これらを用いると一般曲線座標系 (ξ, θ, η) における Helmholtz 方程式は,

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial\Phi^1}{\partial\xi} + \frac{\partial\Phi^2}{\partial\theta} + \frac{\partial\Phi^3}{\partial\eta} \right) + k^2\phi = -q \qquad (6.25)$$

$$\Phi^1 = \frac{1}{J}\left\{R^2(Z_\eta^2 + R_\eta^2)\frac{\partial\phi}{\partial\xi} - R^2(Z_\eta Z_\xi + R_\eta R_\xi)\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right\} \tag{6.26a}$$

$$\Phi^2 = \frac{1}{J}(R_\eta Z_\xi - R_\xi Z_\eta)^2\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{6.26b}$$

$$\Phi^3 = \frac{1}{J}\left\{-R^2(Z_\xi Z_\eta + R_\xi R_\eta)\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + R^2(Z_\xi^2 + R_\xi^2)\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right\} \tag{6.26c}$$

と表すことができる。

ここで，座標系を式 (6.1a)-(6.1c) で定義しているため，θ 方向は前章までと同じようにフーリエ級数展開できる。すなわち，速度ポテンシャル ϕ と音源の分布 q は次のような形で表すことができる。

$$\phi(\xi,\theta,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(\xi,\eta)\cos n\theta \tag{6.27}$$

$$q(\xi,\theta,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}q_n(\xi,\eta)\cos n\theta \tag{6.28}$$

これらを用いると式 (6.26a)-(6.26c) も

$$\Phi^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n^1(\xi,\eta)\cos n\theta \tag{6.29a}$$

$$\Phi^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n^2(\xi,\eta)\sin n\theta \tag{6.29b}$$

$$\Phi^3 = \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n^3(\xi,\eta)\cos n\theta \tag{6.29c}$$

とフーリエ級数展開の形で表される。ただし，

$$\Phi_n^1 = \frac{1}{J}\left\{R^2(Z_\eta^2 + R_\eta^2)\frac{\partial\phi_n}{\partial\xi} - R^2(Z_\eta Z_\xi + R_\eta R_\xi)\frac{\partial\phi_n}{\partial\eta}\right\} \tag{6.30a}$$

$$\Phi_n^2 = \frac{-n}{J}(R_\eta Z_\xi - R_\xi Z_\eta)^2\phi_n \tag{6.30b}$$

$$\Phi_n^3 = \frac{1}{J}\left\{-R^2(Z_\xi Z_\eta + R_\xi R_\eta)\frac{\partial\phi_n}{\partial\xi} + R^2(Z_\xi^2 + R_\xi^2)\frac{\partial\phi_n}{\partial\eta}\right\} \tag{6.30c}$$

である。式 (6.27)，(6.28) と (6.30a)-(6.30c) を式 (6.25) に代入し，三角関数の直交性を利用すると，

$$\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\Phi_n^1}{\partial\xi} + n\Phi_n^2 + \frac{\partial\Phi_n^3}{\partial\eta}\right) + k^2\phi_n = -q_n \tag{6.31}$$

という方程式が得られる。これは n 次の展開係数 ϕ_n についての微分方程式である。

境界条件を与える際に必要となるため，法線方向粒子速度についても一般曲線座標系で表しておく。ま

ず，曲面 $\xi = \text{const.}$ に垂直な $\hat{n}^1$ 方向粒子速度は，

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}^1} &= -\hat{n}^1 \cdot \nabla \phi \\
&= -\frac{|J|}{J} \frac{Y_\theta Z_\eta \Phi_x - X_\theta Z_\eta \Phi_y + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\Phi_z}{\sqrt{Y_\theta^2 Z_\eta^2 + X_\theta^2 Z_\eta^2 + (X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)^2}} \\
&= -\frac{|J|}{J} \frac{\Phi^1}{\sqrt{R^2(Z_\eta^2 + R_\eta^2)}} \\
&= -\frac{|J|}{J} \frac{1}{\sqrt{R^2(Z_\eta^2 + R_\eta^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^1 \cos n\theta
\end{aligned} \tag{6.32}$$

で与えられる。同じようにして，曲面 $\eta = \text{const.}$ に垂直な $\hat{n}^3$ 方向粒子速度は，

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}^3} &= -\hat{n}^3 \cdot \nabla \phi \\
&= -\frac{|J|}{J} \frac{-Z_\xi Y_\theta \Phi_x + Z_\xi X_\theta \Phi_y + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)\Phi_z}{\sqrt{Z_\xi^2 Y_\theta^2 + Z_\xi^2 X_\theta^2 + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)^2}} \\
&= -\frac{|J|}{J} \frac{\Phi^3}{\sqrt{R^2(Z_\xi^2 + R_\xi^2)}} \\
&= -\frac{|J|}{J} \frac{1}{\sqrt{R^2(Z_\xi^2 + R_\xi^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^3 \cos n\theta
\end{aligned} \tag{6.33}$$

となる。

6.1.2 Transfinite 補間

前項で求めた Helmholtz 方程式を解くためには，R_ξ や Z_ξ などのメトリックと呼ばれる，物理座標系 $\boldsymbol{x} = (r, z)$ の一般曲線座標系 (ξ, η) による微分が必要になってくる。そこで，一般曲線座標系から物理座標系への変換関数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(\xi, \eta)$ を作ることを考える。ここでは変換関数を構築する手法として，スペクトル法においてよく用いられる Transfinite 補間 [7] について説明する。

図 6.2 のように，解析領域が四つの滑らかな境界 $\boldsymbol{\Gamma}_1$，$\boldsymbol{\Gamma}_2$，$\boldsymbol{\Gamma}_3$，$\boldsymbol{\Gamma}_4$ によって定義されるとする。まず，$\tilde{\xi} \in [0, 1]$，$\tilde{\eta} \in [0, 1]$ とし，$\boldsymbol{\Gamma}_2$ と $\boldsymbol{\Gamma}_4$ による次のような線形補間を考える。

$$\boldsymbol{X}_{42}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = (1 - \tilde{\xi})\boldsymbol{\Gamma}_4(\tilde{\eta}) + \tilde{\xi}\boldsymbol{\Gamma}_2(\tilde{\eta}) \tag{6.34}$$

$\tilde{\xi} = 0$ であれば座標は $\boldsymbol{\Gamma}_4$ に一致し，$\tilde{\xi} = 1$ であれば $\boldsymbol{\Gamma}_2$ に一致する。ただし，上の補間は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$，および $\boldsymbol{x}_4$ と $\boldsymbol{x}_3$ を結ぶ境界，つまり $\boldsymbol{\Gamma}_1$ と $\boldsymbol{\Gamma}_3$ がどちらも直線である場合に相当する。$\boldsymbol{\Gamma}_1$ と $\boldsymbol{\Gamma}_3$ が曲線の場合も考慮するため，次にこれらの境界の間の線形補間を考える。

$$\boldsymbol{X}_{13}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = (1 - \tilde{\eta})\boldsymbol{\Gamma}_1(\tilde{\xi}) + \tilde{\eta}\boldsymbol{\Gamma}_3(\tilde{\xi}) \tag{6.35}$$

この二つの補間を足し合わせると，

$$\boldsymbol{\Sigma}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = (1 - \tilde{\xi})\boldsymbol{\Gamma}_4(\tilde{\eta}) + \tilde{\xi}\boldsymbol{\Gamma}_2(\tilde{\eta}) + (1 - \tilde{\eta})\boldsymbol{\Gamma}_1(\tilde{\xi}) + \tilde{\eta}\boldsymbol{\Gamma}_3(\tilde{\xi}) \tag{6.36}$$

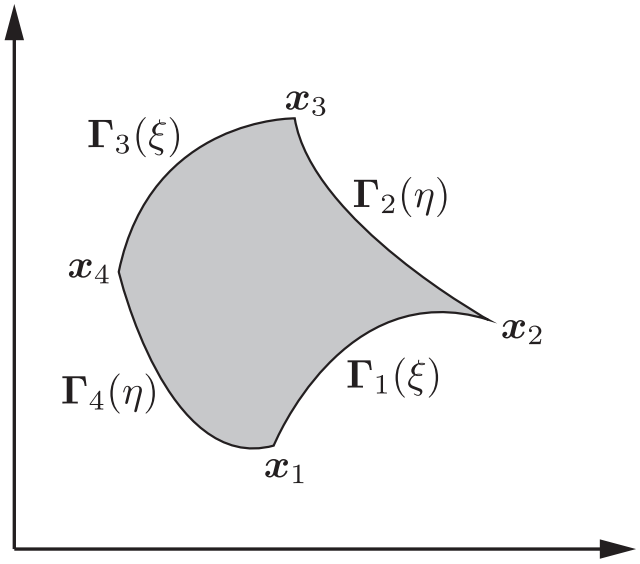


図 6.2: 領域を定義する四つの境界

となる。しかし，このままでは $\tilde{\xi} = 0, 1$ としたときに，

$$\boldsymbol{\Sigma}(0, \tilde{\eta}) = \boldsymbol{\Gamma}_4(\tilde{\eta}) + (1 - \tilde{\eta})\boldsymbol{\Gamma}_1(0) + \tilde{\eta}\boldsymbol{\Gamma}_3(0) \tag{6.37a}$$
$$\boldsymbol{\Sigma}(1, \tilde{\eta}) = \boldsymbol{\Gamma}_2(\tilde{\eta}) + (1 - \tilde{\eta})\boldsymbol{\Gamma}_1(1) + \tilde{\eta}\boldsymbol{\Gamma}_3(1) \tag{6.37b}$$

となり，それぞれ $\boldsymbol{\Gamma}_4$ と $\boldsymbol{\Gamma}_2$ に一致しないことが分かる。式 (6.37a) と (6.37b) の第 2 項と第 3 項が余分なので，

$$(1 - \tilde{\xi})\left\{(1 - \tilde{\eta})\boldsymbol{\Gamma}_1(0) + \tilde{\eta}\boldsymbol{\Gamma}_3(0)\right\} + \tilde{\xi}\left\{(1 - \tilde{\eta})\boldsymbol{\Gamma}_1(1) + \tilde{\eta}\boldsymbol{\Gamma}_3(1)\right\} \tag{6.38}$$

を式 (6.36) から引くと，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = {} & (1 - \tilde{\xi})\boldsymbol{\Gamma}_4(\tilde{\eta}) + \tilde{\xi}\boldsymbol{\Gamma}_2(\tilde{\eta}) + (1 - \tilde{\eta})\boldsymbol{\Gamma}_1(\tilde{\xi}) + \tilde{\eta}\boldsymbol{\Gamma}_3(\tilde{\xi}) \\ & -(1 - \tilde{\xi})\left\{(1 - \tilde{\eta})\boldsymbol{\Gamma}_1(0) + \tilde{\eta}\boldsymbol{\Gamma}_3(0)\right\} - \tilde{\xi}\left\{(1 - \tilde{\eta})\boldsymbol{\Gamma}_1(1) + \tilde{\eta}\boldsymbol{\Gamma}_3(1)\right\}\end{aligned} \tag{6.39}$$

となる。この補間は $\xi = 0, 1$ のとき，確かに $\boldsymbol{\Gamma}_4$ と $\boldsymbol{\Gamma}_2$ に一致する。また，$\eta = 0, 1$ のときは，

$$\boldsymbol{X}(\tilde{\xi}, 0) = (1 - \tilde{\xi})\boldsymbol{\Gamma}_4(0) + \tilde{\xi}\boldsymbol{\Gamma}_2(0) + \boldsymbol{\Gamma}_1(\tilde{\xi}) - (1 - \tilde{\xi})\boldsymbol{\Gamma}_1(0) - \tilde{\xi}\boldsymbol{\Gamma}_1(1) \tag{6.40a}$$
$$\boldsymbol{X}(\tilde{\xi}, 1) = (1 - \tilde{\xi})\boldsymbol{\Gamma}_4(1) + \tilde{\xi}\boldsymbol{\Gamma}_2(1) + \boldsymbol{\Gamma}_3(\tilde{\xi}) - (1 - \tilde{\xi})\boldsymbol{\Gamma}_3(0) - \tilde{\xi}\boldsymbol{\Gamma}_3(1) \tag{6.40b}$$

であるが，図 6.2 より，$\boldsymbol{\Gamma}_4(0) = \boldsymbol{\Gamma}_1(0)$，$\boldsymbol{\Gamma}_2(0) = \boldsymbol{\Gamma}_1(1)$，$\boldsymbol{\Gamma}_4(1) = \boldsymbol{\Gamma}_3(0)$，$\boldsymbol{\Gamma}_2(1) = \boldsymbol{\Gamma}_3(1)$ であるから，この二つの式も $\boldsymbol{\Gamma}_1$ と $\boldsymbol{\Gamma}_3$ に一致する。最後に，

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi + 1}{2} \tag{6.41a}$$
$$\tilde{\eta} = \frac{\eta + 1}{2} \tag{6.41b}$$

のように変数変換し，式 (6.39) に代入すると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(\xi,\eta) = &\frac{1}{2}\left[(1-\xi)\boldsymbol{\Gamma}_4(\eta)+(1+\xi)\boldsymbol{\Gamma}_2(\eta)+(1-\eta)\boldsymbol{\Gamma}_1(\xi)+(1+\eta)\boldsymbol{\Gamma}_3(\xi)\right]\\ &-\frac{1}{4}\left[(1-\xi)\left\{(1-\eta)\boldsymbol{\Gamma}_1(-1)+(1+\eta)\boldsymbol{\Gamma}_3(-1)\right\}\right.\\ &\left.+(1+\xi)\left\{(1-\eta)\boldsymbol{\Gamma}_1(1)+(1+\eta)\boldsymbol{\Gamma}_3(1)\right\}\right] \qquad (6.42)\end{aligned}$$

が得られる。これが Transfinite 補間による一般曲線座標系 (ξ,η) から物理座標系 $\boldsymbol{x}=(r,z)$ への変換関数である。

一般曲線座標系で表されたヘルムホルツ方程式に表れるメトリックは，この変換関数を微分することで次のように求められる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \xi} = &\frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{\Gamma}_2(\eta)-\boldsymbol{\Gamma}_4(\eta)+(1-\eta)\boldsymbol{\Gamma}_1'(\xi)+(1+\eta)\boldsymbol{\Gamma}_3'(\xi)\right\}\\ &-\frac{1}{4}\left[(1-\eta)\left\{\boldsymbol{\Gamma}_1(1)-\boldsymbol{\Gamma}_1(-1)\right\}+(1+\eta)\left\{\boldsymbol{\Gamma}_3(1)-\boldsymbol{\Gamma}_3(-1)\right\}\right] \qquad (6.43a)\\ \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \eta} = &\frac{1}{2}\left\{(1-\xi)\boldsymbol{\Gamma}_4'(\eta)+(1+\xi)\boldsymbol{\Gamma}_2'(\eta)+\boldsymbol{\Gamma}_3(\xi)-\boldsymbol{\Gamma}_1(\xi)\right\}\\ &-\frac{1}{4}\left[(1-\xi)\left\{\boldsymbol{\Gamma}_3(-1)-\boldsymbol{\Gamma}_1(-1)\right\}+(1+\xi)\left\{\boldsymbol{\Gamma}_3(1)-\boldsymbol{\Gamma}_1(1)\right\}\right] \qquad (6.43b)\end{aligned}$$

実際の計算を行う際には，離散化された節点 $(\xi_{i,j},\eta_{i,j})$ における上式の値が必要になる。境界の座標 $\boldsymbol{\Gamma}_1(\xi_{i,j})$ は解析領域を定義するために与えるものであり，微係数 $\boldsymbol{\Gamma}_1'(\xi_{i,j})$ はそれを数値微分して求めることができる。

6.1.3 一般曲線座標系を導入した Spectral Collocation Method による解析

一般曲線座標系で表された Helmholtz 方程式 (6.31) が得られたので，これをスペクトル法によって離散化して解いていく。まず，Spectral Collocation Method (SCM) による解析方法について説明する。式 (6.30a)-(6.30c) を離散化すると，マトリクスとベクトルの積で，

$$\boldsymbol{\Phi}_n^1 = \left[\mathrm{diag}\left(\frac{R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)}{J}\right)\boldsymbol{I}_\eta\otimes\boldsymbol{D}_\xi - \mathrm{diag}\left(\frac{R^2(Z_\eta Z_\xi+R_\eta R_\xi)}{J}\right)\boldsymbol{D}_\eta\otimes\boldsymbol{I}_\xi\right]\boldsymbol{\phi}_n \qquad (6.44a)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_n^2 = -\mathrm{diag}\left(\frac{n(R_\xi Z_\eta - R_\eta Z_\xi)^2}{J}\right)\boldsymbol{\phi}_n \qquad (6.44b)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_n^3 = \left[-\mathrm{diag}\left(\frac{R^2(Z_\xi Z_\eta+R_\xi R_\eta)}{J}\right)\boldsymbol{I}_\eta\otimes\boldsymbol{D}_\xi + \mathrm{diag}\left(\frac{R^2(Z_\xi^2+R_\xi^2)}{J}\right)\boldsymbol{D}_\eta\otimes\boldsymbol{I}_\xi\right]\boldsymbol{\phi}_n \qquad (6.44c)$$

と表される。ここで，$\boldsymbol{D}_\xi$ と $\boldsymbol{D}_\eta$ はそれぞれ，ξ 方向と η 方向の微分を作用する微分マトリクス，$\boldsymbol{I}_\xi$ と $\boldsymbol{I}_\eta$ はそれぞれ，ξ 方向と η 方向の節点数を次元とする単位マトリクス，$\otimes$ はクロネッカー積を表している。また，$\mathrm{diag}(R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)/J)$ は，各節点におけるメトリック $R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)/J$ を対角成分に並べた対角マトリクスであり，その他も同じである。式 (6.31) についても離散化すると，次式が得られる。

$$\mathrm{diag}\left(\frac{1}{J}\right)\left\{\left[\boldsymbol{I}_\eta\otimes\boldsymbol{D}_\xi\right]\boldsymbol{\Phi}_n^1 + n\boldsymbol{\Phi}_n^2 + \left[\boldsymbol{D}_\eta\otimes\boldsymbol{I}_\xi\right]\boldsymbol{\Phi}_n^3\right\} + \mathrm{diag}(k^2)\boldsymbol{\phi}_n = -\boldsymbol{q} \qquad (6.45)$$

式 (6.45) に式 (6.44a)-(6.44c) を代入すると，最終的に解くべきマトリクス方程式は，

$$\left[\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_3 + \mathrm{diag}(k^2)\right]\boldsymbol{\phi}_n = -\boldsymbol{q}_n \tag{6.46}$$

となる。ここで，

$$\boldsymbol{L}_1 = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{J}\right)\boldsymbol{I}_\eta \otimes \boldsymbol{D}_\xi \left[\mathrm{diag}\left(\frac{R^2(Z_\eta^2 + R_\eta^2)}{J}\right)\boldsymbol{I}_\eta \otimes \boldsymbol{D}_\xi - \mathrm{diag}\left(\frac{R^2(Z_\eta Z_\xi + R_\eta R_\xi)}{J}\right)\boldsymbol{D}_\eta \otimes \boldsymbol{I}_\xi\right] \tag{6.47a}$$

$$\boldsymbol{L}_2 = -\mathrm{diag}\left(\frac{n^2}{R^2}\right) \tag{6.47b}$$

$$\boldsymbol{L}_3 = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{J}\right)\boldsymbol{D}_\eta \otimes \boldsymbol{I}_\xi \left[-\mathrm{diag}\left(\frac{R^2(Z_\xi Z_\eta + R_\xi R_\eta)}{J}\right)\boldsymbol{I}_\eta \otimes \boldsymbol{D}_\xi + \mathrm{diag}\left(\frac{R^2(Z_\xi^2 + R_\xi^2)}{J}\right)\boldsymbol{D}_\eta \otimes \boldsymbol{I}_\xi\right] \tag{6.47c}$$

とおいた。

式 (6.46) は適切な境界条件のもとで解く必要がある。音響問題の場合，粒子速度境界，もしくはインピーダンス境界が与えられることが多い。まず，境界において $\hat{n}^1$ 方向の粒子速度が，

$$u^1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^1 \cos n\theta \tag{6.48}$$

というフーリエ級数展開の形で与えられているとき，式 (6.32) より，

$$-\frac{|J|}{J}\frac{\Phi_n^1}{\sqrt{R^2(Z_\eta^2 + R_\eta^2)}} = u_n^1 \tag{6.49}$$

でなければならない。これを離散化すると，

$$-\mathrm{diag}\left(\frac{|J|}{J\sqrt{R^2(Z_\eta^2 + R_\eta^2)}}\right)\boldsymbol{\Phi}_n^1 = \boldsymbol{u}_n^1 \tag{6.50}$$

というマトリクス方程式になる。同じように $\hat{n}^3$ 方向粒子速度が与えられている場合のマトリクス方程式は，

$$-\mathrm{diag}\left(\frac{|J|}{J\sqrt{R^2(Z_\xi^2 + R_\xi^2)}}\right)\boldsymbol{\Phi}_n^3 = \boldsymbol{u}_n^3 \tag{6.51}$$

となる。境界条件として粒子速度境界を与えるためには，i 番目の節点が境界上にあるとすると，式 (6.45) の i 番目の式を式 (6.50) または (6.51) の i 番目の式で置き換えればよい。

次に境界条件としてインピーダンス境界が与えられる場合を考える。粒子速度境界の場合と同じように，$\hat{n}^1$ 方向の比音響インピーダンスが，

$$z^1 = \sum_{n=0}^{\infty} z_n^1 \cos n\theta \tag{6.52}$$

というフーリエ級数展開の形で表されるとする。このとき，比音響インピーダンスの定義 $z_n^1 = j\omega\rho\phi_n/(-\partial\phi_n/\partial\hat{n}^1)$ より，

$$j\omega\rho\phi_n + z_n^1\frac{\partial\phi_n}{\partial\hat{n}^1} = j\omega\rho\phi_n + z_n^1\hat{n}^1\cdot\nabla\phi_n = j\omega\rho\phi_n + z_n^1\frac{|J|}{J}\frac{\Phi_n^1}{\sqrt{R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)}} = 0 \tag{6.53}$$

が成り立つ。ここで ρ は空気の密度である。上式を離散化すると次のようなマトリクス方程式が得られる。

$$\mathrm{diag}\,(j\omega\rho)\,\boldsymbol{\phi}_n + \mathrm{diag}\left(\frac{z_n^1|J|}{J\sqrt{R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)}}\right)\boldsymbol{\Phi}_n^1 = \mathbf{0} \tag{6.54}$$

また，$\hat{n}^3$ 方向の比音響インピーダンスが与えられる場合は，

$$\mathrm{diag}\,(j\omega\rho)\,\boldsymbol{\phi}_n + \mathrm{diag}\left(\frac{z_n^3|J|}{J\sqrt{R^2(Z_\xi^2+R_\xi^2)}}\right)\boldsymbol{\Phi}_n^3 = \mathbf{0} \tag{6.55}$$

である。粒子速度境界のときと同じように，マトリクス方程式 (6.45) のうち，境界の節点に関する式をマトリクス方程式 (6.54) または (6.55) の対応する式で置き換えることで，インピーダンス境界条件を与えることができる。

6.1.4 一般曲線座標系を導入した Spectral Nodal Galerkin Method による解析

前項で定式化した SCM は粒子速度境界条件やインピーダンス境界条件を与える際に，係数マトリクスの置き換えが必要になり，多少煩雑である。それに対して Spectral Nodal Galerkin Method (NGM) は，それらの境界条件をより自然な形で導入することができる。本項では，一般曲線座標系で表された Helmholtz 方程式を NGM によって解くための定式化について述べる。

表記の簡単のため，ξ 方向と η 方向の節点数をともに M であるとする。もちろん，実際には異なる節点数でも構わない。まず，NGM は微分方程式の弱形式を用いるので，式 (6.31) の両辺に重み関数として Lagrange 基底関数 $\ell_i(\xi)\ell_j(\eta)$ をかけ，$\xi\in[-1,1]$，$\eta\in[-1,1]$ で積分する。本章の定式化のように変換前および変換後の座標系がともに右手形で定義される場合，面積要素が $Jd\xi d\eta$ と書けることに注意すると，

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial\Phi_n^1}{\partial\xi}+n\Phi_n^2+\frac{\partial\Phi_n^3}{\partial\eta}\right)\ell_i\ell_j d\xi d\eta + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k^2\phi_n\ell_i\ell_j J d\xi d\eta = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}q_n\ell_i\ell_j J d\xi d\eta \tag{6.56}$$

となる。左辺第 1 項について部分積分を行うと，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left[\Phi_n^1\ell_i\ell_j\right]_{\xi=-1}^{1}d\eta + \int_{-1}^{1}\left[\Phi_n^3\ell_i\ell_j\right]_{\eta=-1}^{1}d\xi - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\Phi_n^1\ell_i'\ell_j - n\Phi_n^2\ell_i\ell_j + \Phi_n^3\ell_i\ell_j'\right)d\xi d\eta \\ + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k^2\phi_n\ell_i\ell_j J d\xi d\eta = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}q_n\ell_i\ell_j J d\xi d\eta\end{aligned} \tag{6.57}$$

と書き換えることができる。節点として Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) ノードを用い，積分を数値積分によって処理する。まず，式 (6.57) の左辺第 3 項の積分は，

$$
\begin{aligned}
&-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\Phi_n^1\ell_i'\ell_j - n\Phi_n^2\ell_i\ell_j + \Phi_n^3\ell_i\ell_j'\right)d\xi d\eta \\
&= -\sum_{l,m=0}^{M}\left\{\Phi_n^1(\xi_l,\eta_m)\ell_i'(\xi_l)\ell_j(\eta_m) - n\Phi_n^2(\xi_l,\eta_m)\ell_i(\xi_l)\ell_j(\eta_m) + \Phi_n^3(\xi_l,\eta_m)\ell_i(\xi_l)\ell_j'(\eta_m)\right\}w_l w_m \\
&= -\sum_{l=0}^{M}\Phi_n^1(\xi_l,\eta_j)\ell_i'(\xi_l)w_l w_j + n\Phi_n^2(\xi_i,\eta_j)w_i w_j - \sum_{m=0}^{M}\Phi_n^3(\xi_i,\eta_m)\ell_j'(\eta_m)w_i w_m \\
&= -\sum_{l=0}^{M}D_{il}^{(\xi)\mathrm{T}}w_l w_j\Phi_n^1(\xi_l,\eta_j) + n w_i w_j\Phi_n^2(\xi_i,\eta_j) - \sum_{m=0}^{M}D_{jm}^{(\eta)\mathrm{T}}w_i w_m\Phi_n^3(\xi_i,\eta_m)
\end{aligned}
\tag{6.58}
$$

となる。ここで，2 行目から 3 行目への変形に，Lagrange 基底関数の性質 $\ell_j(\eta_m)=\delta_{jm}$，$\ell_i(\xi_l)=\delta_{il}$ を，また，3 行目から 4 行目への変形に微分マトリクスの成分 $\ell_i'(\xi_l)=D_{il}^{(\xi)\mathrm{T}}$，$\ell_j'(\eta_m)=D_{jm}^{(\eta)\mathrm{T}}$ を用いて書き換えた。次に，式 (6.57) の左辺第 4 項の積分は，

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k^2\phi_n\ell_i\ell_j J d\xi d\eta &= \sum_{l,m=0}^{M}k^2\phi_n(\xi_l,\eta_m)\ell_i(\xi_l)\ell_j(\eta_m)J_{l,m}w_l w_m \\
&= k^2 J_{i,j}w_i w_j\phi_n(\xi_i,\eta_j)
\end{aligned}
\tag{6.59}
$$

となる。同様にして式 (6.57) の右辺の積分は，

$$
-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}q_n\ell_i\ell_j J d\xi d\eta = -J_{i,j}w_i w_j q_n(\xi_i,\eta_j) \tag{6.60}
$$

となる。最後に，左辺第 1 項と第 2 項の積分は，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\left[\Phi_n^1\ell_i\ell_j\right]_{\xi=-1}^{1}d\eta + \int_{-1}^{1}\left[\Phi_n^3\ell_i\ell_j\right]_{\eta=-1}^{1}d\xi \\
&= \int_{-1}^{1}\left\{\Phi_n^1(1,\eta)\ell_i(1)\ell_j(\eta) - \Phi_n^1(-1,\eta)\ell_i(-1)\ell_j(\eta)\right\}d\eta \\
&\quad + \int_{-1}^{1}\left\{\Phi_n^3(\xi,1)\ell_i(\xi)\ell_j(1) - \Phi_n^3(\xi,-1)\ell_i(\xi)\ell_j(-1)\right\}d\xi \\
&= \sum_{m=0}^{M}\left\{\Phi_n^1(1,\eta_m)\ell_i(1)\ell_j(\eta_m) - \Phi_n^1(-1,\eta_m)\ell_i(-1)\ell_j(\eta_m)\right\}w_m \\
&\quad + \sum_{l=0}^{M}\left\{\Phi_n^3(\xi_l,1)\ell_i(\xi_l)\ell_j(1) - \Phi_n^3(\xi_l,-1)\ell_i(\xi_l)\ell_j(-1)\right\}w_l \\
&= \left\{\Phi_n^1(1,\eta_j)\ell_i(1) - \Phi_n^1(-1,\eta_j)\ell_i(-1)\right\}w_j \\
&\quad + \left\{\Phi_n^3(\xi_i,1)\ell_j(1) - \Phi_n^3(\xi_i,-1)\ell_j(-1)\right\}w_i
\end{aligned}
\tag{6.61}
$$

となる。この項は境界条件を表しており，粒子速度境界とインピーダンス境界で以降の処理が異なる。

一つの例として，境界 $\mathbf{\Gamma}_2(\xi=1,\eta\in[-1,1])$ において粒子速度のフーリエ級数展開係数が $\bar{u}_n$，境界 $\mathbf{\Gamma}_4(\xi=-1,\eta\in[-1,1])$ において比音響インピーダンスのフーリエ級数展開係数が z_n で与えられ，それ以外の境界では粒子速度が 0，つまり音響的に剛であるとする。式 (6.49) と式 (6.53) より，

$$\Phi_n^1(1,\eta_j) = -\left(\frac{J}{|J|}\sqrt{R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)}\right)_{M,j}\bar{u}_n \tag{6.62}$$

$$\Phi_n^1(-1,\eta_j) = -\frac{j\omega\rho}{z_n}\left(\frac{J}{|J|}\sqrt{R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)}\right)_{0,j}\phi_n(-1,\eta_j) \tag{6.63}$$

$$\Phi_n^3(\xi_i,1) = \Phi_n^3(\xi_i,-1) = 0 \tag{6.64}$$

となり，これより式 (6.61) は，

$$\begin{aligned}&\left\{\Phi_n^1(1,\eta_j)\ell_i(1)-\Phi_n^1(-1,\eta_j)\ell_i(-1)\right\}w_j+\left\{\Phi_n^3(\xi_i,1)\ell_j(1)-\Phi_n^3(\xi_i,-1)\ell_j(-1)\right\}w_i\\ =&-\left(\frac{J}{|J|}\sqrt{R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)}\right)_{M,j}\ell_i(1)w_j\bar{u}_n+\frac{j\omega\rho}{z_n}\left(\frac{J}{|J|}\sqrt{R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)}\right)_{0,j}\ell_i(-1)w_j\phi_n(-1,\eta_j)\end{aligned} \tag{6.65}$$

となる。よって，これらを用いると式 (6.57) は，

$$\begin{aligned}&-\sum_{l=0}^{M}D_{il}^{(\xi)\mathrm{T}}w_lw_j\Phi_n^1(\xi_l,\eta_j)+nw_iw_j\Phi_n^2(\xi_i,\eta_j)-\sum_{m=0}^{M}D_{jm}^{(\eta)\mathrm{T}}w_iw_m\Phi_n^3(\xi_i,\eta_m)\\ &+k^2J_{i,j}w_iw_j\phi_n(\xi_i,\eta_j)+\frac{j\omega\rho}{z_n}\left(\frac{J}{|J|}\sqrt{R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)}\right)_{0,j}\ell_i(-1)w_j\phi_n(-1,\eta_j)\\ &=-J_{i,j}w_iw_jq_n(\xi_i,\eta_j)+\left(\frac{J}{|J|}\sqrt{R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)}\right)_{M,j}\ell_i(1)w_j\bar{u}_n\end{aligned} \tag{6.66}$$

と書くことができる。上式を $i=0,1,\ldots,M, j=0,1,\ldots,M$ について書き並べると，次のようなマトリクス方程式を立てることができる。

$$\begin{aligned}&\left[\boldsymbol{I}_\eta\otimes\boldsymbol{D}_\xi\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Phi}_n^1-n\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Phi}_n^2+\left[\boldsymbol{D}_\eta\otimes\boldsymbol{I}_\xi\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Phi}_n^3+j\omega\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}_n-\frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{diag}\,(J)\,\boldsymbol{W}\boldsymbol{\phi}_n\\ &=\mathrm{diag}\,(J)\,\boldsymbol{W}\boldsymbol{q}_n+\boldsymbol{u}_n\end{aligned} \tag{6.67}$$

ここで，$\boldsymbol{W}$ は LGL 数値積分の重みを対角成分に並べたマトリクスであり，その成分は，

$$\begin{aligned}&W_{j(M+1)+i,j(M+1)+i}=w_iw_j,\quad i=0,1,\ldots,M,\ j=0,1,\ldots,M\\ &W_{i,j}=0,\quad \text{otherwise}\end{aligned} \tag{6.68}$$

で表される。$\boldsymbol{C}$ は，境界 $\mathbf{\Gamma}_4$ 上の節点に対応する対角成分のみ値をもち，その成分は，

$$\begin{aligned}&C_{j(M+1),j(M+1)}=-\frac{\rho}{z_n}\left(\frac{J}{|J|}\sqrt{R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)}\right)_{0,j}w_j,\quad j=0,1,\ldots,M\\ &C_{i,j}=0,\quad \text{otherwise}\end{aligned} \tag{6.69}$$

である。また，$\boldsymbol{u}_n$ は，境界 $\mathbf{\Gamma}_2$ 上の節点のみ値をもち，

$$\begin{aligned}&(u_n)_{j(M+1)+M}=-\left(\frac{J}{|J|}\sqrt{R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)}\right)_{M,j}w_j\bar{u}_n,\quad j=0,1,\ldots,M\\ &(u_n)_i=0,\quad \text{otherwise}\end{aligned} \tag{6.70}$$

とおいたベクトルである。式 (6.44a)-(6.44c) を使って式 (6.67) の $\boldsymbol{\Phi}_n^1$，$\boldsymbol{\Phi}_n^2$，$\boldsymbol{\Phi}_n^3$ を $\boldsymbol{\phi}_n$ で表せば，最終的に

$$\left[\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2+\boldsymbol{K}_3+j\omega\boldsymbol{C}-\frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{diag}(J)\boldsymbol{W}\right]\boldsymbol{\phi}_n=\mathrm{diag}(J)\boldsymbol{W}\boldsymbol{q}_n+\boldsymbol{u}_n \tag{6.71}$$

というマトリクス方程式が得られる。ここで，

$$\boldsymbol{K}_1=[\boldsymbol{I}_\eta\otimes\boldsymbol{D}_\xi]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\left[\mathrm{diag}\left(\frac{R^2(Z_\eta^2+R_\eta^2)}{J}\right)\boldsymbol{I}_\eta\otimes\boldsymbol{D}_\xi-\mathrm{diag}\left(\frac{R^2(Z_\eta Z_\xi+R_\eta R_\xi)}{J}\right)\boldsymbol{D}_\eta\otimes\boldsymbol{I}_\xi\right] \tag{6.72a}$$

$$\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{W}\mathrm{diag}\left(\frac{n^2(R_\xi Z_\eta-R_\eta Z_\xi)^2}{J}\right) \tag{6.72b}$$

$$\boldsymbol{K}_3=[\boldsymbol{D}_\eta\otimes\boldsymbol{I}_\xi]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\left[-\mathrm{diag}\left(\frac{R^2(Z_\xi Z_\eta+R_\xi R_\eta)}{J}\right)\boldsymbol{I}_\eta\otimes\boldsymbol{D}_\xi+\mathrm{diag}\left(\frac{R^2(Z_\xi^2+R_\xi^2)}{J}\right)\boldsymbol{D}_\eta\otimes\boldsymbol{I}_\xi\right] \tag{6.72c}$$

とおいた。NGM においては粒子速度境界条件はベクトル $\boldsymbol{u}_n$，インピーダンス境界条件はマトリクス $\boldsymbol{C}$ として考慮されるため，SCM で行ったような方程式の置き換えなどは必要なく，式 (6.71) をそのまま $\boldsymbol{\phi}_n$ について解けばよい。

6.2 数値計算例

6.2.1 円筒形空洞の固有値問題

ここから提案手法の妥当性と計算精度を検証していく。まず，図 6.3 に示すような半径 1 m，長さ 2 m の円筒形空洞の固有周波数を NGM により計算し，理論値との相対誤差を算出する。壁面における境界条件は剛であるとした。半径 a，高さ L の円筒形空洞の固有周波数 f_{nms} は，

$$f_{nms}=\frac{c}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{u_{nm}}{a}\right)^2+\left(\frac{s\pi}{L}\right)^2} \tag{6.73}$$

により求められる [22]。c は音速，u_{nm} は第一種 n 次ベッセル関数の導関数 $J_n'(x)$ の m 番目の零点である。円周方向のフーリエ級数展開の次数は 0 次から 9 次までとし，それぞれ (r,z) 平面の固有周波数を 20 個，計 200 個の固有周波数の相対誤差を算出した。なお，θ 方向の次数を n，r 方向と z 方向のモードの次数は区別せず (r,z) 平面内のモードの次数を m として，三次元のモードの次数を (n,m) と表記することとする。

図 6.4 にマトリクスの自由度と固有周波数の相対誤差の関係を示す。図 6.4(a)，6.4(b)，6.4(c)，6.4(d) はそれぞれ (0, 1) 次，(0, 20) 次，(9, 1) 次，(9, 20) 次の固有周波数の相対誤差を示しており，図 6.4(e) は 200 個の固有周波数の平均相対誤差を示している。前章までの結果と同様に，FEM は自由度を増やすにつれて相対誤差が緩やかに減少しているのに対して，提案手法は急激に誤差が収束に向かっていることが分かる。それぞれの図において，FEM で自由度を 1000 としたときの精度で比較すると，提案手法ではその 1/10 の 100 程度の自由度で同等の精度を得ることができている。

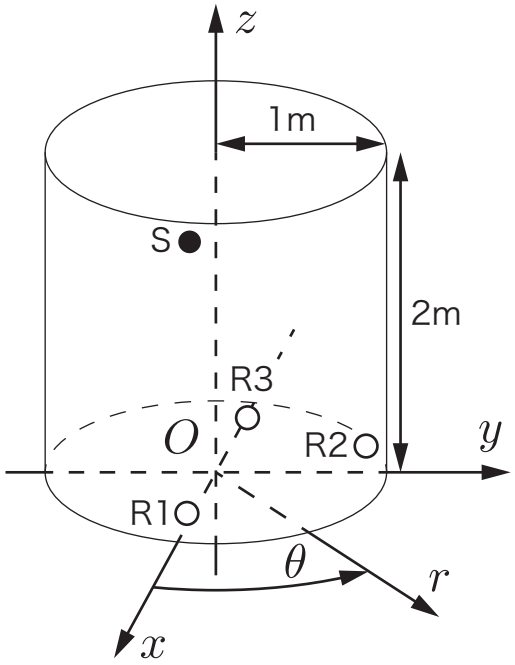


図 6.3: 計算した円筒形空洞

6.2.2 円筒形空洞の強制振動問題

次に，境界条件としてインピーダンス境界をもつ円筒形空洞の音圧分布，および周波数応答関数を提案手法と軸対称 1 次三角形アイソパラメトリック要素を用いた FEM によって計算し，精度を評価する。円筒形空洞の寸法は図 6.3 の通りであるが，すべての壁面の比音響インピーダンスを 15000 $\mathrm{Pa \cdot s/m}$(垂直入射吸音率で約 0.1) とした。音源の位置 S は，$(r_\mathrm{s}, \theta_\mathrm{s}, z_\mathrm{s}) = (0.9, 0, 1.9)$ とし，$\theta = 0$ の (r, z) 平面上で r 方向 51 点，z 方向 101 点，計 5151 点の格子上で音圧を計算し，参照解との L_2 相対誤差を算出した。なお，壁面がインピーダンス境界である場合の円筒形空洞内の音場については理論解析解はないため，最大要素長 0.02 m，1 kHz の波長に対する要素寸法比 0.06，節点数 10585 の十分細かく要素分割した FEM による解を参照解とした。各手法における θ 方向のフーリエ級数展開の打ち切り数は 10 次とした。

自由度の比較

図 6.5 に横軸を未知数の数としたときの各周波数における音圧分布の L_2 相対誤差を示す。第 4 章や第 5 章の結果とは異なり，提案手法と FEM の差が小さく，提案手法は誤差が頭打ちになっているようにも見える。この要因の一つとして，参照解に厳密解ではなく，FEM による数値解を用いているためであると考えられる。500 Hz や 1000 Hz では未知数の数に対する誤差がほぼ変化していないが，提案手法が参照解の精度を上回っている可能性もある。

必要メモリ容量の比較

次に横軸を連立方程式の求解に必要なメモリ容量としたときの L_2 相対誤差の変化を図 6.6 に示す。FEM の係数マトリクスは対称疎行列であるので，非零成分のみを圧縮行格納形式 [44] で格納したときのメモリ容量を示している。一方，提案手法の係数マトリクスは非対称密行列である。直接法で連立方程式を解く場合，方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のように未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して 1 回だけ作用する係数マトリクス $\boldsymbol{A}$ を構築する必要があり，特に二次元や三次元の問題のような大規模なマトリクスはそれを格納するメモリ容量も大きくなる。もう一つの連立方程式の解法である反復法の場合には，近似解 $\boldsymbol{x}^{(i)}$ に対して係数マトリクス $\boldsymbol{A}$ を作用させ，その結果が既知のベクトル $\boldsymbol{b}$ に近づくように近似解 $\boldsymbol{x}^{(i)}$ を更新していく。このとき，係数マトリクス $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3) \tag{6.74}$$

のように分解できれば，マトリクス $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{x}^{(i)}$ の積は

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(i)} = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}^{(i)} + \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}^{(i)}) = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}^{(i)}, \quad \boldsymbol{y}^{(i)} = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}^{(i)} + \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}^{(i)} \tag{6.75}$$

でも演算することができ，分解したマトリクス $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{A}_3$ のそれぞれが疎行列であれば，メモリ容量と演算量を大きく削減することができる。スペクトル法における係数マトリクスもそのような例の一つであり，式 (6.72a) のマトリクス $\boldsymbol{K}_1$ は密行列であるが，それを構成する $\boldsymbol{I}_\eta \otimes \boldsymbol{D}_\xi$ や $\boldsymbol{D}_\eta \otimes \boldsymbol{I}_\xi$ は疎行列となっている。そのため反復法を用いる場合には，一つの密行列ではなく，複数の疎行列の形で格納することで，メモリ容量を大きく削減することが可能である。本研究においては連列方程式の解法に直接法を用い，その結果を図 6.5 には NGM (direct) として示しているが，反復法で直接法と同等の精度が得られると仮定した場合の結果についても NGM (iterative) として同図に示している。

提案手法において連立方程式の解法に直接法を用いる場合には，FEM よりも多くのメモリ容量が必要になり，63 Hz，125 Hz，250 Hz で L_2 相対誤差を 0.01 以下に抑えようとすると FEM の約 100 倍のメモリ容量が必要である。一方，連立方程式の解法に反復法を用いる場合には，FEM と同等，もしくはそれ以下のメモリ容量で同等の精度が得られる。特に 500 Hz や 1000 Hz においては誤差によっては FEM の 1/50 程度に削減することも可能である。ただし，図 6.5 の NGM (iterative) の結果は直接法によって得られたものであり，反復法は得られる解の精度がアルゴリズムや反復回数などのパラメータに依存するため，今後それらを考慮したより詳細な検証が必要である。

音圧分布の比較

L_2 相対誤差は音圧分布の誤差を一つの値として評価できるため，誤差の収束の傾向を調べる際に便利である。しかし，直観的に実際の音圧分布における違いと対応付けることは難しい。そこで，同程度の未知数，および必要メモリ容量を用いる提案手法と FEM によって計算した音圧分布についても示しておく。特に差が顕著であった 500 Hz と 1000 Hz の $\theta = 0$ の (r, z) 平面上における音圧分布を図 6.7 と 6.8 に示す。提案手法における自由度は図 6.5(e) において参照解との誤差がほぼ収束している 288 とし，このとき必要メモリ容量は連立方程式の解法に反復法を用いるとすると約 55 kB であった。FEM の自由度はそれよりも大きい 561 とし，必要メモリ容量は約 65 kB であった。なお，参照解とした FEM の自由度は 10585，必要メモリ容量は約 1.2 MB である。

提案手法は参照解とほぼ差がない音圧分布が得られている。それに対して FEM は提案手法よりも多い自由度，メモリ容量を用いているにもかかわらず，計算された音圧分布は参照解と大きく異なっている。このように実際の音圧分布で比較しても，提案手法が FEM より精度がよいことが分かる。

周波数応答関数の比較

手案手法と FEM により計算した円筒形空洞の周波数応答関数についても示しておく。受音点は図 6.3 に示した R1$(0.9, 0, 0.1)$，R2$(0.9, \pi/2, 0.1)$，R3$(0.9, \pi, 0.1)$ の 3 点とした。計算に用いた提案手法の自由度は 128，必要メモリ容量は約 25 kB，FEM の自由度は 231，必要メモリ容量は約 27 kB である。各手法における θ 方向のフーリエ級数展開の打ち切り数はこれまでと同様に 10 次とした。

図 6.9 から 6.11 に各受音点における周波数応答関数を示す。提案手法により計算した周波数応答関数は参照解と一致している。それに対して必要メモリ容量が提案手法と同程度の FEM は，低い周波数では参照解と合っているが，周波数が高くなるにつれて誤差が生じていることが分かる。

6.2.3 一般的な軸対称空洞の強制振動問題

最後に円筒形以外の軸対称空洞としてティンパニのケトル内部の周波数応答関数と音圧分布を提案手法で計算する。ケトルの形状と音源および周波数応答関数を求めた受音点の位置を図 6.13 に示す。音源の位置 S と受音点の位置 R1，R2，R3 は

- S: $(r(\xi = 0.9, \eta = 0.9), \theta, z(\xi = 0.9, \eta = 0.9)) = (0.27, 0, -0.024)$
- R1: $(r(\xi = 0.1, \eta = -0.9), \theta, z(\xi = 0.1, \eta = -0.9)) = (0.017, 0, -0.43)$
- R2: $(r(\xi = 0.9, \eta = 0.9), \theta, z(\xi = 0.9, \eta = 0.9)) = (0.27, \pi/2, -0.024)$
- R3: $(r(\xi = 0.9, \eta = 0.9), \theta, z(\xi = 0.9, \eta = 0.9)) = (0.27, \pi, -0.024)$

とした。壁面の境界条件は音響的に剛とした。提案手法の自由度は 50，比較する FEM の自由度は 92 とし，このときどちらもメモリ容量は約 10kB であった。フーリエ級数展開の打ち切り次数は 10 とした。また，参照解として 1kHz の波長に対して要素寸法比 0.05，自由度 1470 の FEM でも同様の計算を行った。

提案手法に用いた物理座標系における格子点の分布を図 6.13 に示す。実際には第 4 章の要領で図の x 座標が正の格子点のみを用いて計算している。

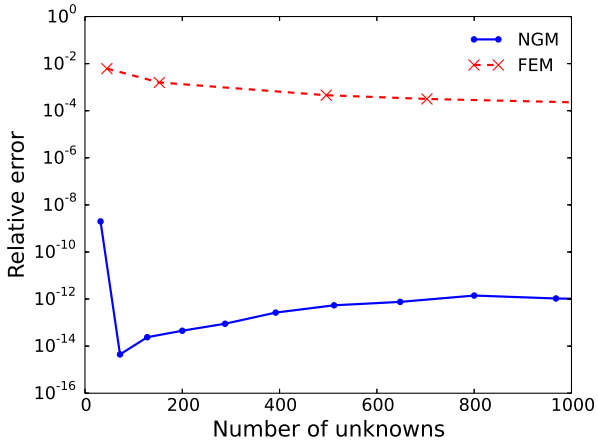
図 6.14 から 6.16 は提案手法と FEM により計算した周波数応答関数を示している。これまでの結果と同様に，提案手法にって計算した周波数応答関数は参照解と一致しているのに対して，それより多い自由度，同程度のメモリ容量を用いた FEM は周波数が高くなるにつれて参照解からずれている。

最後に提案手法と FEM で計算した 1000 Hz の音圧分布を図 6.17 に示す。提案手法は参照解にかなり近い音圧分布が得られている。FEM によって計算した音圧分布も概形は参照解に近い結果が得られているが，音圧レベルが極小となる節の位置に着目してみると，わずかではあるが参照解からずれていることが分かる。このように一般曲線座標系を用いてティンパニのケトルのような一般的な軸対称音場を計算する場合においても，提案手法が有効であるということが分かる。

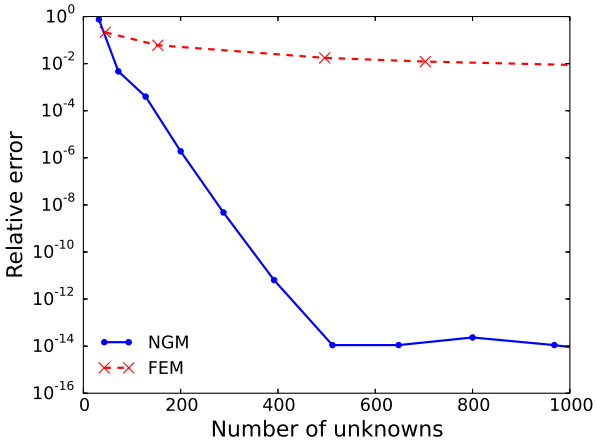
6.3 まとめ

本章では膜鳴楽器の内部音場のような軸対称空洞内の音場解析手法を提案した。ティンパニのケトルのような不整形な軸対称空洞を解析できるように，まず一般曲線座標系 (ξ, θ, η) のヘルムホルツ方程式を導出した。θ 方向はこれまで同様にフーリエ級数展開によって非連成化し，(ξ, η) 平面に SCM と NGM を適用し，定式化した。一般曲線座標系 (ξ, η) から物理座標系 (r, z) への変換を表す関数は Transfinite 補間によって定義できる。

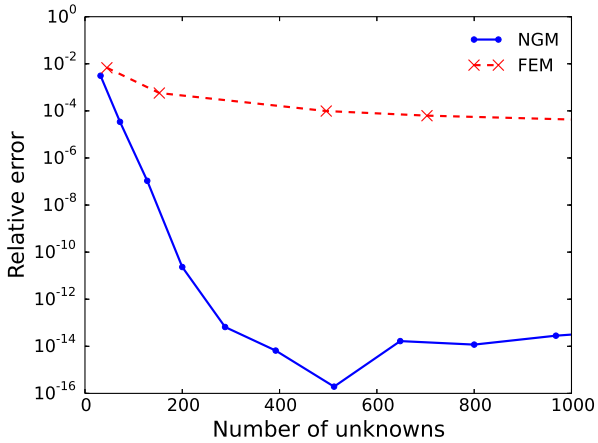
円筒形空洞とティンパニのケトル内部の音場を提案手法によって解析し，提案手法が FEM よりも少ない自由度で高い精度の解を得られるということを確認した。また，連立一次方程式の解法に反復法を用いることでメモリ容量も大きく節約できる可能性を示した。本論文では直接法を用いて解いたが，直接法の場合には一つの大きな密行列を構成する必要があり，FEM よりも多くのメモリ容量を要する。そのため，二次元以上の大規模な問題では反復法の利用が避けられなくなってくる。反復法は共役勾配 (Conjugate Gradient: CG) 法をはじめとして多くのアルゴリズム，および収束性を改善するための様々な前処理が提案されている。しかし収束性や安定性において，どんな問題，数値解析手法に対しても最適なアルゴリズムはない。音響問題と FEM への反復法の適用についてはこれまで多くの研究がされており，COCG(Conjugate Orthogonal Conjugate Gradient) 法 [45] が標準的になっているようであるが [46, 47]，音響問題とスペクトル法という組み合わせに対しても反復法適用の指針を示すことは一つの課題であると考える。



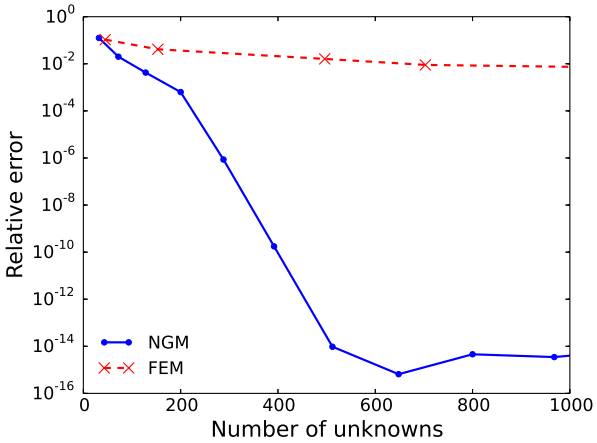
(a) (0, 1) 次



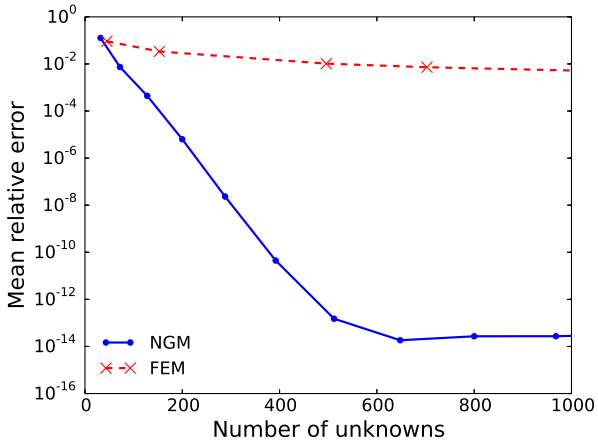
(b) (0, 20) 次



(c) (9, 1) 次

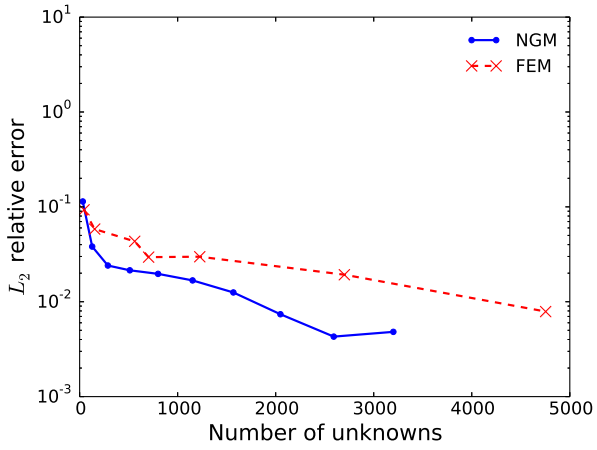


(d) (9, 20) 次

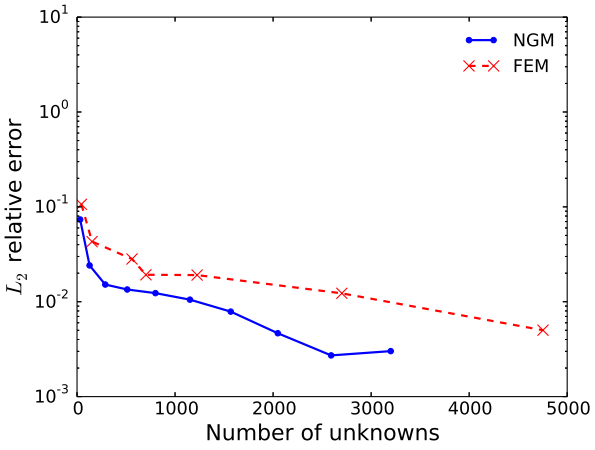


(e) 200 個の固有周波数の平均相対誤差

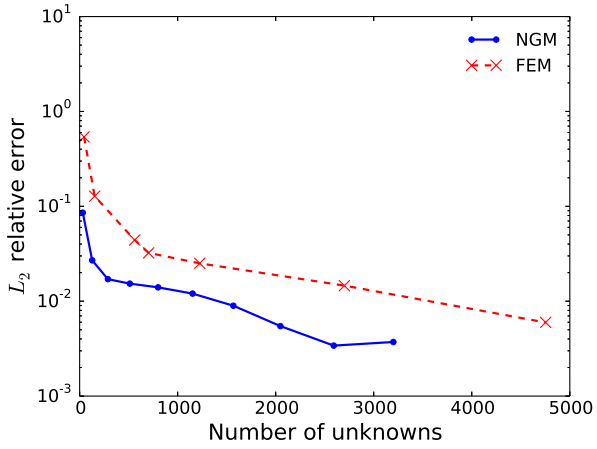
図 6.4: 未知数の数に対する固有周波数の相対誤差



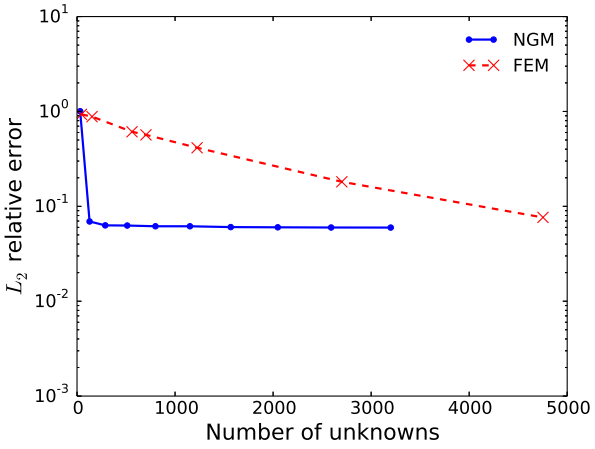
(a) 63 Hz



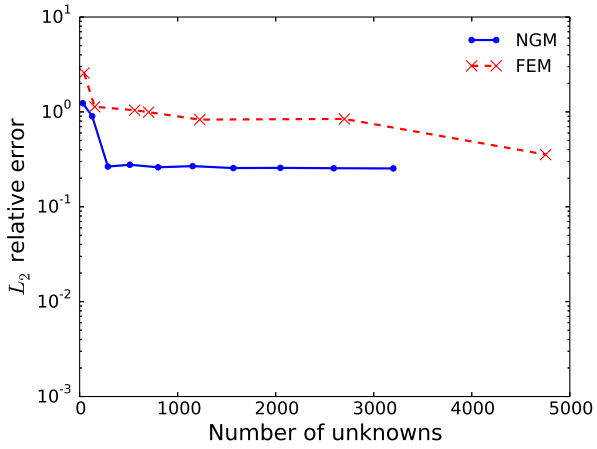
(b) 125 Hz



(c) 250 Hz

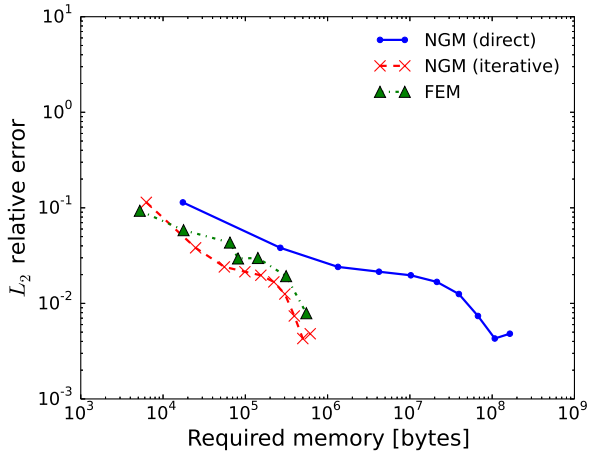


(d) 500 Hz

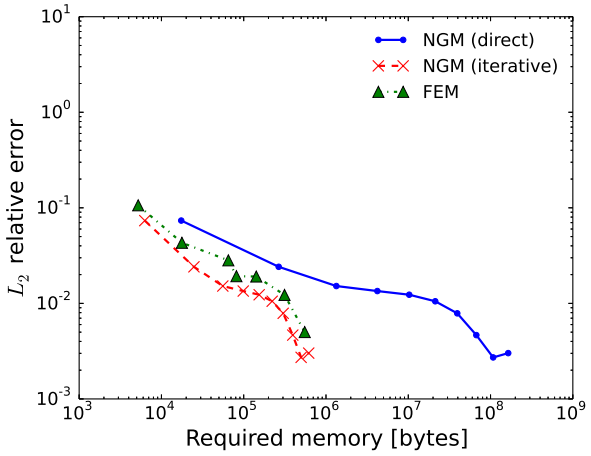


(e) 1000 Hz

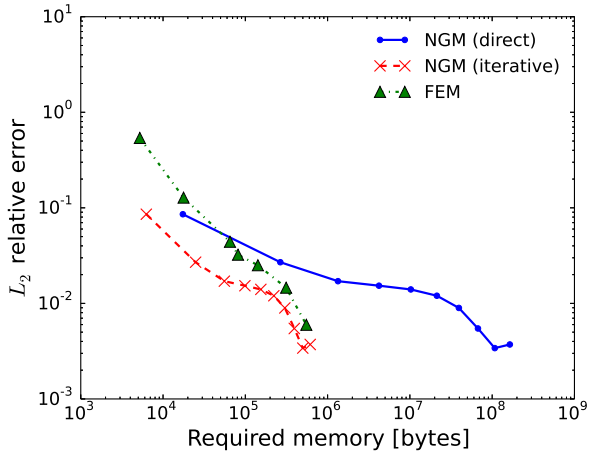
図 6.5: 未知数の数に対する音圧分布の L_2 相対誤差



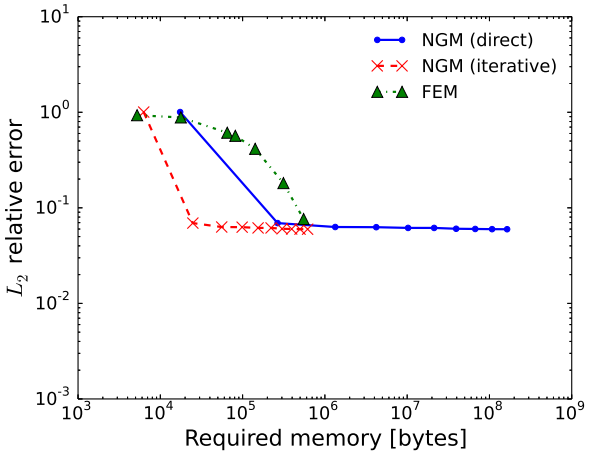
(a) 63 Hz



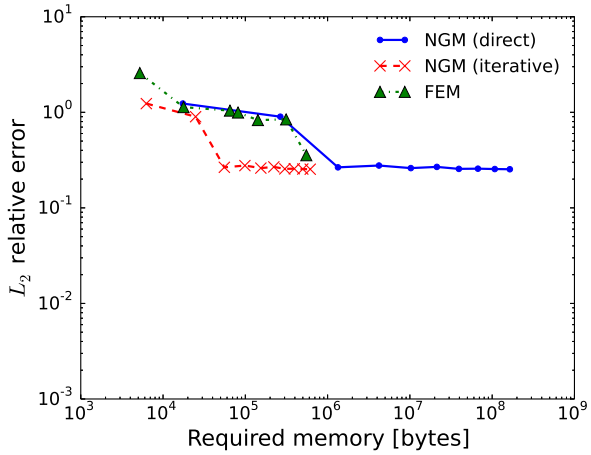
(b) 125 Hz



(c) 250 Hz

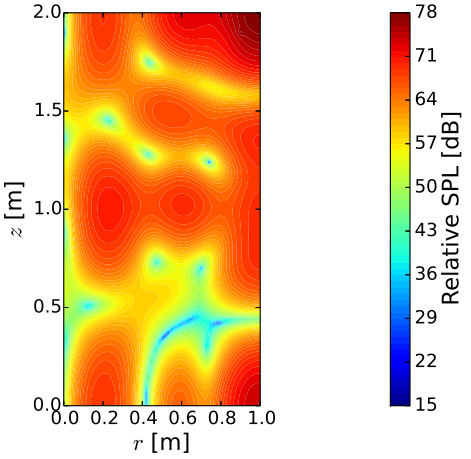


(d) 500 Hz

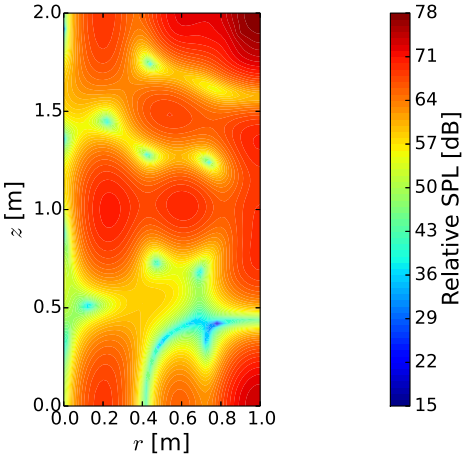


(e) 1000 Hz

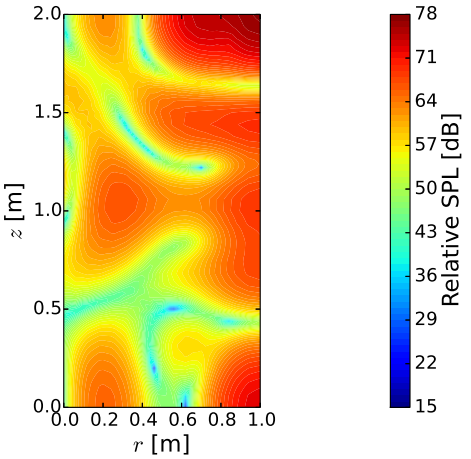
図 6.6: 必要メモリ容量に対する音圧分布の L_2 相対誤差



(a) 参照解 (FEM，自由度 10585)

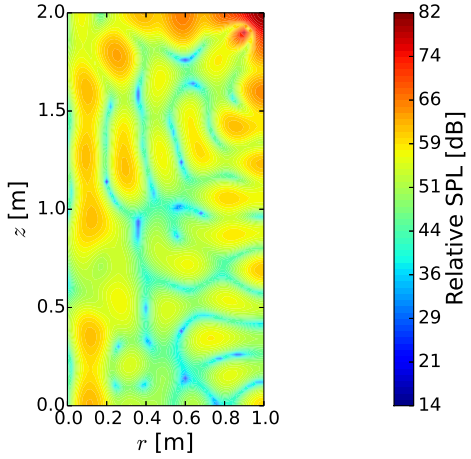


(b) NGM，自由度 288，必要メモリ容量 55 kB

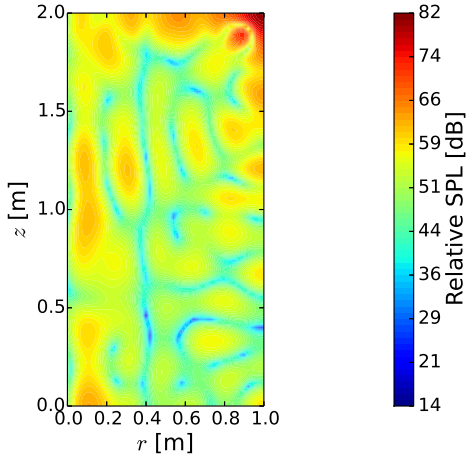


(c) FEM，自由度 561，必要メモリ容量 65 kB

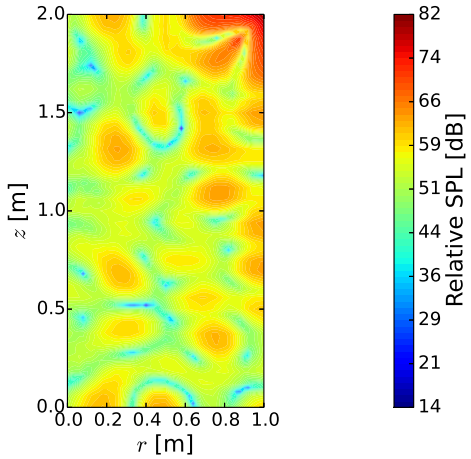
図 6.7: 500 Hz の音圧分布



(a) 参照解 (FEM，自由度 10585)



(b) NGM，自由度 288，必要メモリ容量 55 kB



(c) FEM，自由度 561，必要メモリ容量 65 kB

図 6.8: 1000 Hz の音圧分布

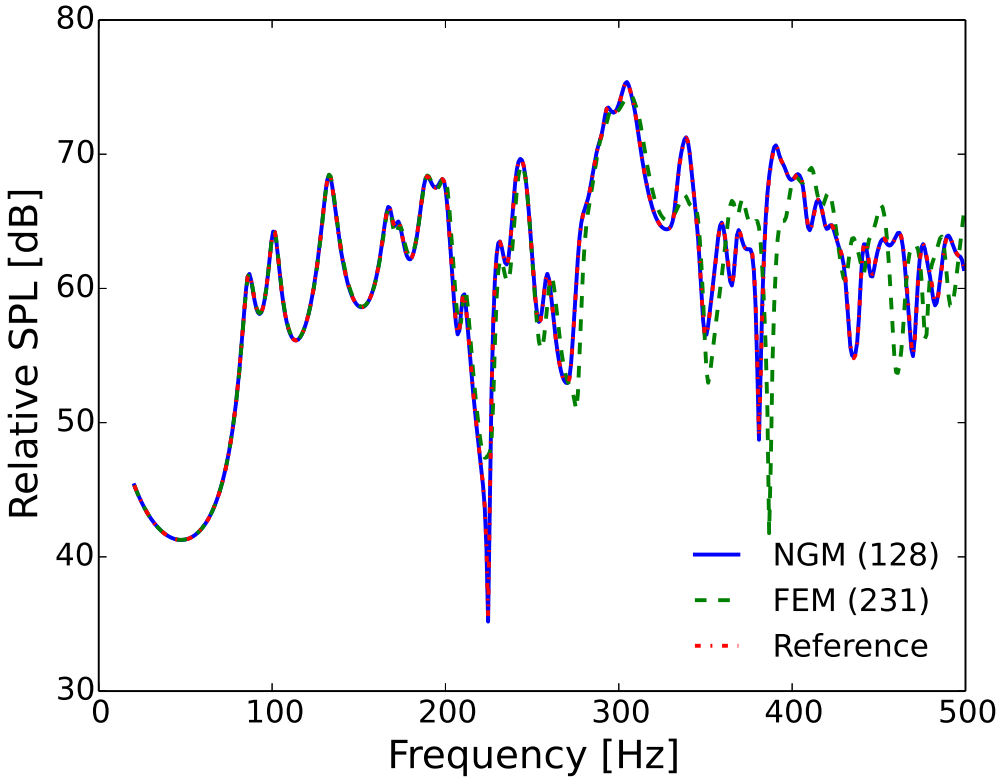


図 6.9: 円筒形空洞の周波数応答関数 (受音点 R1)

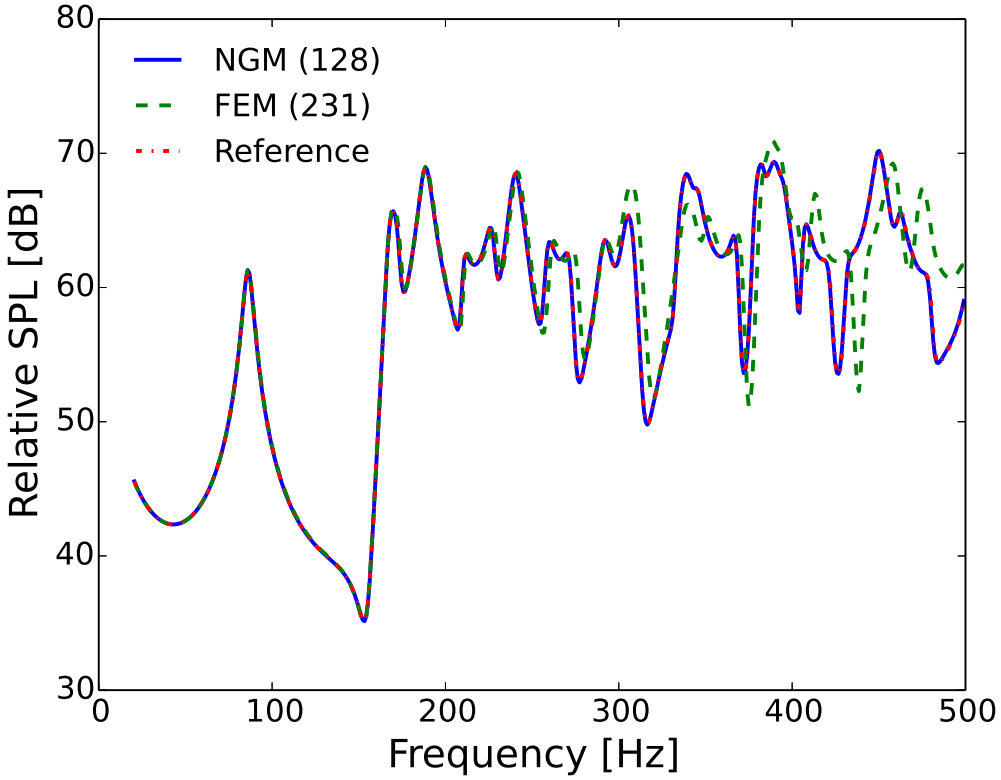


図 6.10: 円筒形空洞の周波数応答関数 (受音点 R2)

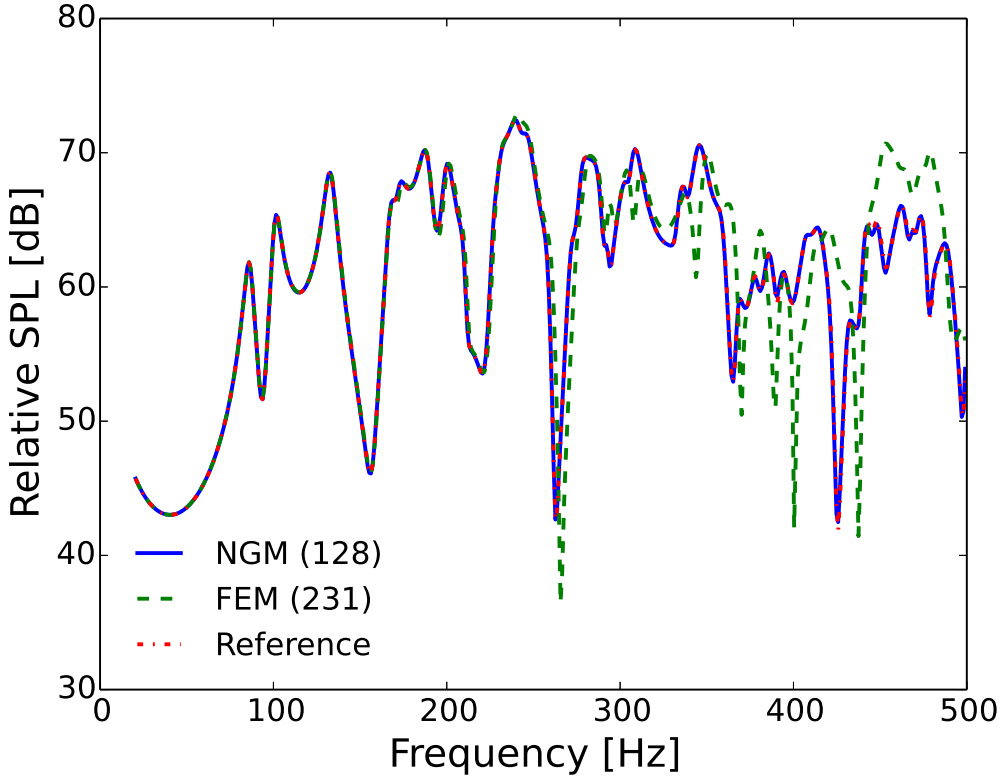


図 6.11: 円筒形空洞の周波数応答関数 (受音点 R3)

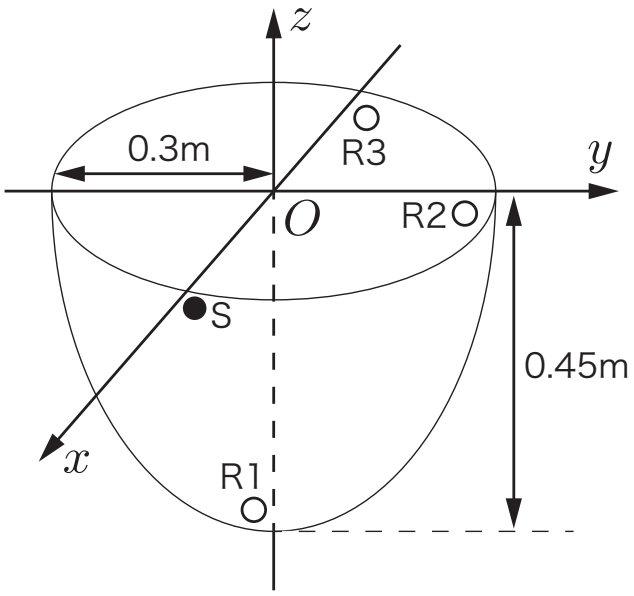


図 6.12: 計算したティンパニのケトル形状と音源および受音点の位置

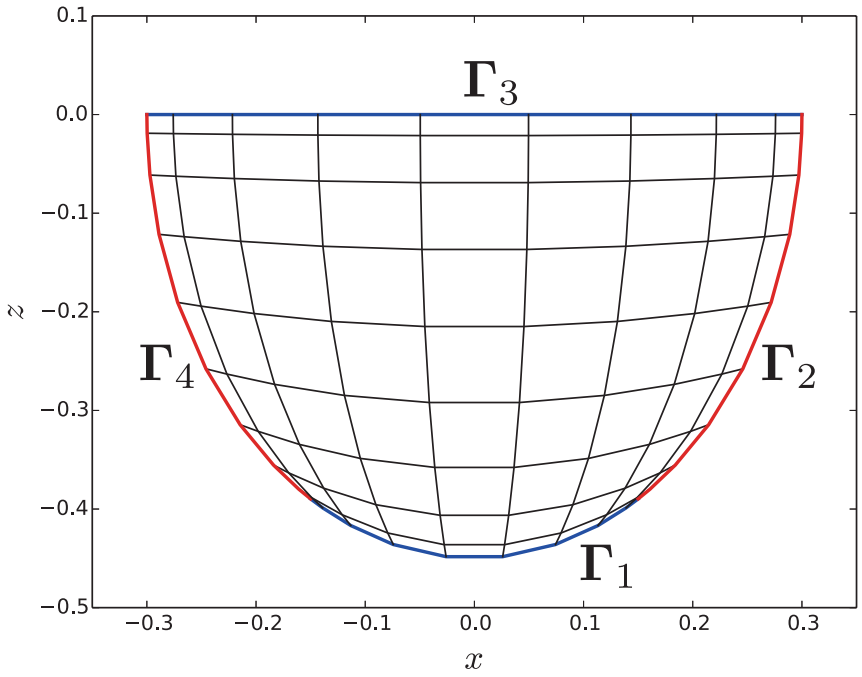


図 6.13: 物理座標系における格子点

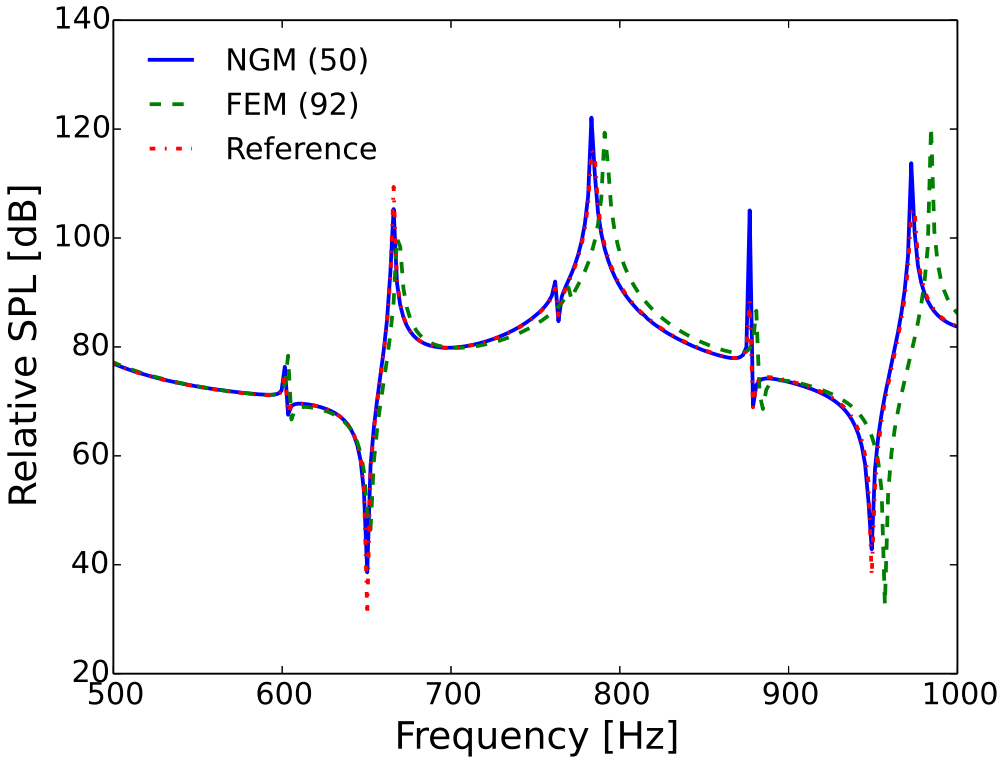


図 6.14: ティンパニの内部音場の周波数応答関数 (受音点 R1)

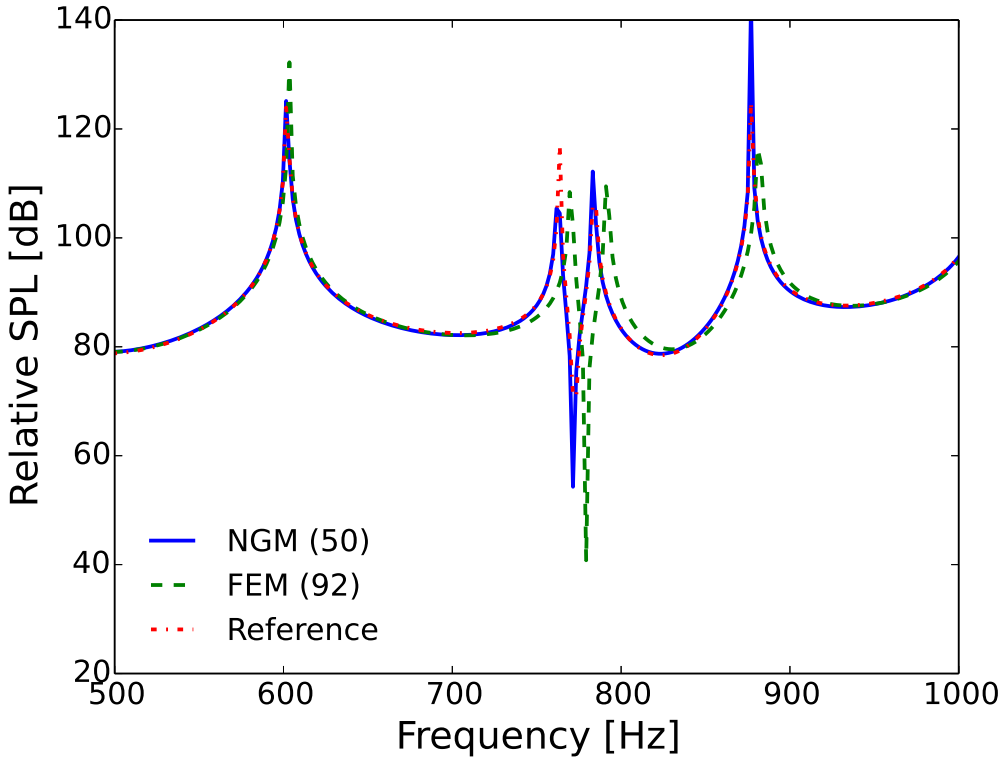


図 6.15: ティンパニの内部音場の周波数応答関数 (受音点 R2)

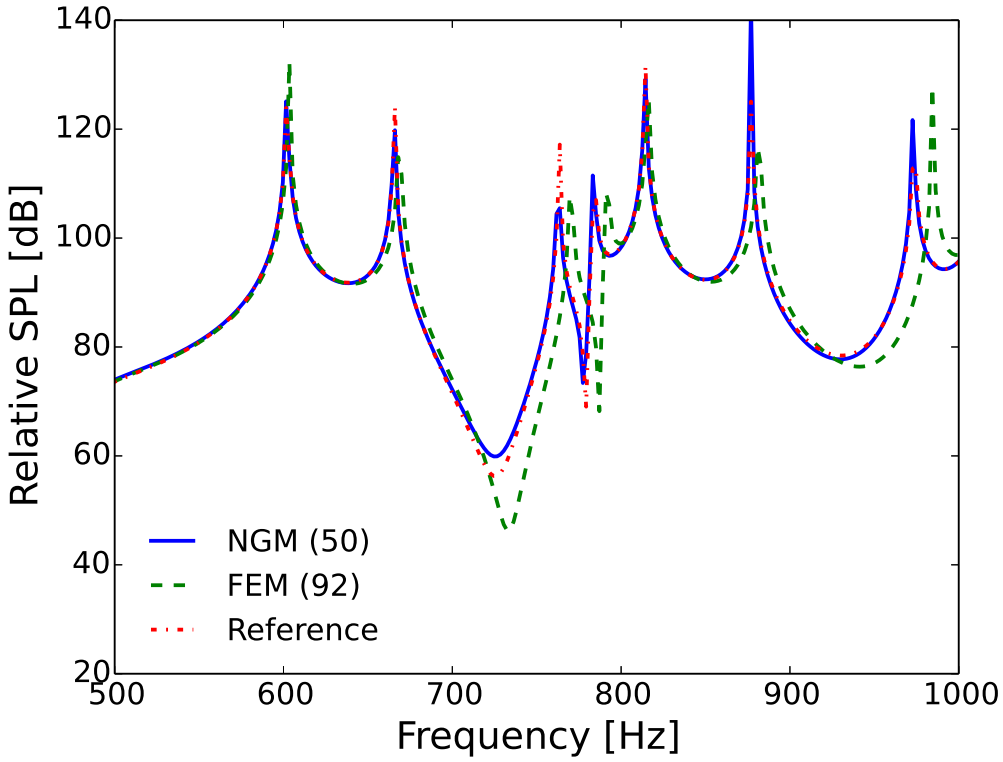
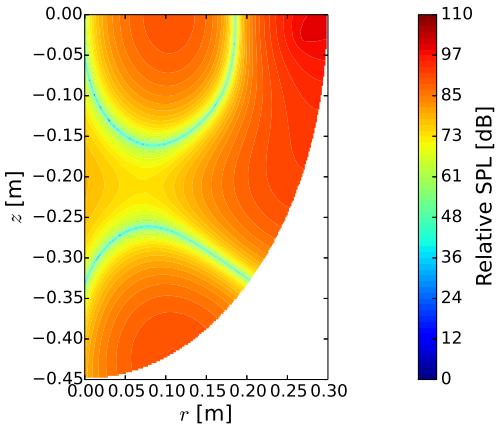
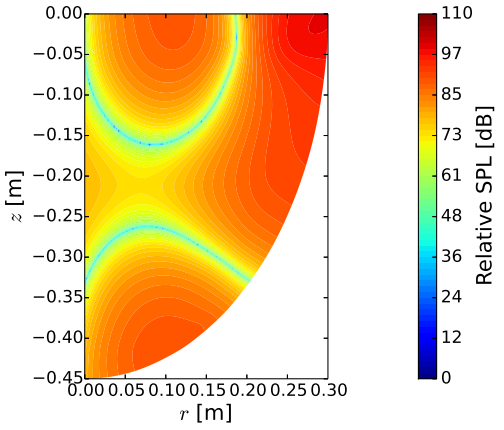


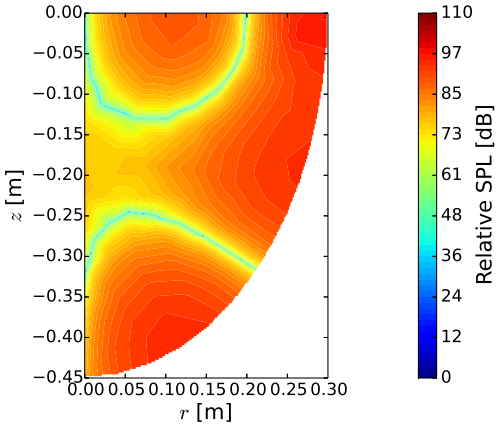
図 6.16: ティンパニの内部音場の周波数応答関数 (受音点 R3)



(a) 参照解 (FEM，自由度 1470)



(b) NGM，自由度 50，必要メモリ容量 10 kB



(c) FEM，自由度 92，必要メモリ容量 10 kB

図 6.17: ケトル内部の音圧分布 (1000 Hz)

第 7 章

スペクトル法による軸対称形状・開領域音場解析

本章では膜鳴楽器の外部音場の解析手法を構築する。室内音場の特性を含まない，楽器のみの音響特性を計算する場合，楽器の周りの音場は開領域音場として扱う必要がある。スペクトル法は FEM や FDM と同じ領域型の解法であるため，開領域音場を解析する場合，有限な領域で打ち切り，何らかの境界条件を適用しなければならない。このとき，ρc 近似などの単純な方法では，本来存在しないはずの疑似反射が生じてしまい，厳密に解析できないという問題がある。

そこで，スペクトル法で開領域音場を厳密に解析するために，Dirichlet-to-Neumann (DtN) 写像 [48] を応用する。DtN 写像は FEM で開領域問題を解く際に用いられる方法である。球面から放射される音場は理論解析解を求められる。そのことを利用して，開領域内に球面状の仮想的な境界を設け，その外側の理論解析解と連成することで開領域を厳密に扱うという手法である。この方法は仮想境界の形状が理論解析解の得られる球面に限定されてしまうという欠点があるが，整形に近い領域の解析に適しているスペクトル法の場合には，むしろ整合性が高い。

前章で導入した一般曲線座標系により，容易に球状の境界を設けることができる。その境界において球面からの放射音場の理論解析解と連成する。具体的なスペクトル法の種類としては，境界条件の取り扱いが容易な Spectral nodal Galerkin method (NGM) を採用することとする。その結果，前章で導いた NGM のマトリクス方程式に，DtN 写像を取り入れた新たなマトリクスが加わる。円周方向についてはこれまで同様，フーリエ級数展開を用いて準理論的に解析する。

理論解析解は無限次の級数展開の形で表されるため，実際の計算においては有限の次数で打ち切る必要がある。この打ち切り次数と計算精度の関係について検証する。

7.1 提案解析手法

7.1.1 Dirichlet-to-Neumann 写像

スペクトル法で外部音場を厳密に扱うために Dirichlet-to-Neumann (DtN) 写像を採用する。球面から放射される音場の理論解析解は求めることができる。そこで開領域内に仮想的な球面状の境界を設置

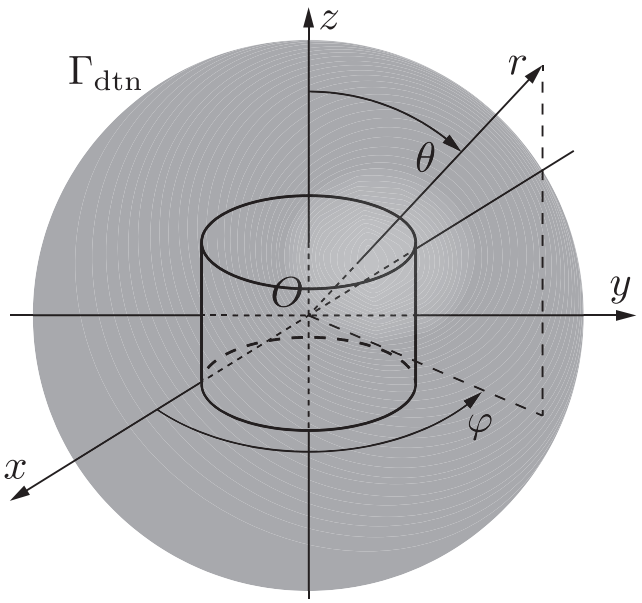


図 7.1: 軸対称形状・開領域音場と仮想境界

し，その内部については数値解析手法で解き，境界において外部の理論解析解と連成するというのが DtN 写像の基本的な考え方である。

まず，図 7.1 のような軸対称形状・開領域音場を考える。球面の仮想境界を扱うため，座標系には球座標系 (r, θ, φ) を用いる。球面から放射される音場の理論解析解は次のように書くことができる [47]。

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \frac{(2n+1)(n-|m|)!}{4\pi R_{\mathrm{d}}^2 (n+|m|)!} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{h_n^{(2)}(kR_{\mathrm{d}})} \times \int_{\Gamma_{\mathrm{dtn}}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\varphi} P_n^{|m|}(\cos\theta') e^{-jm\varphi'} \phi(R_{\mathrm{d}},\theta',\varphi') d\Gamma' \tag{7.1}$$

ここで，R_{d} は仮想境界の半径，$h_n^{(2)}$ は第 2 種球 Hankel 関数，$P_n^{|m|}$ は Legendre 陪関数である。また，

$$d\Gamma' = R_{\mathrm{d}}^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi' \tag{7.2}$$

である。DtN 写像は式 (7.1) を法線方向微分し，受音点 (r, θ, φ) を境界上 $(R_{\mathrm{d}}, \theta', \varphi')$ にもってくることで得られる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}(R_{\mathrm{d}},\theta',\varphi') = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \frac{(2n+1)(n-|m|)!}{4\pi R_{\mathrm{d}}^2 (n+|m|)!} \frac{k h_n^{(2)\prime}(kR_{\mathrm{d}})}{h_n^{(2)}(kR_{\mathrm{d}})} P_n^{|m|}(\cos\theta') e^{jm\varphi'} \times \int_{\Gamma_{\mathrm{dtn}}} P_n^{|m|}(\cos\theta') e^{-jm\varphi'} \phi(R_{\mathrm{d}},\theta',\varphi') d\Gamma' \tag{7.3}$$

ここで，速度ポテンシャル ϕ を φ 方向にフーリエ級数展開する。

$$\phi(R_{\mathrm{d}},\theta,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m(R_{\mathrm{d}},\theta) e^{jm\varphi} \tag{7.4}$$

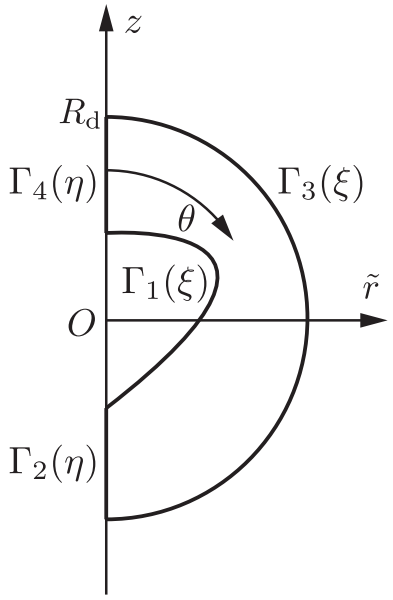


図 7.2: 一般曲線座標系で定義された四つの境界

これを式 (7.3) に代入し，三角関数の直交性を利用すると，

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial \boldsymbol{n}}(R_\mathrm{d},\theta') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(n-|m|)!}{2R_\mathrm{d}^2(n+|m|)!} \frac{kh_n^{(2)'}(kR_\mathrm{d})}{h_n^{(2)}(kR_\mathrm{d})} P_n^{|m|}(\cos\theta') \times \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos\theta')\phi_m(R_\mathrm{d},\theta')R_\mathrm{d}^2\sin\theta' d\theta' \tag{7.5}$$

となる。

次に一般曲線座標系で計算するため，解析領域を図 7.2 に示すような四つの境界 Γ_1，Γ_2，Γ_3，Γ_4 で定義する。図 7.2 は円筒座標系 $(\tilde{r},\varphi,z)$ の $\tilde{r}z$ 平面を表しており，$\tilde{r}$ は図 7.1 に示す球座標系 (r,θ,φ) の動径 r ではなく，xy 平面内を動く円筒座標系の動径であることに注意する。DtN 写像を適用するため，仮想境界に相当する Γ_3 は半円でなければならない。また，今解析対象は軸対称形状なので，Γ_2 と Γ_4 は z 軸上になければならない。振動体や散乱体の形状を規定する Γ_1 は任意の曲線でよい。このように一般曲線座標系 (ξ,η) を用いて解析領域を定義すると，半径 R_d の球面上，つまり図 7.2 における境界 Γ_3 上では，

$$\theta' = \theta(\xi,1) = \frac{\xi+1}{2}\pi, \quad \theta' \in [0,\pi],\ \xi \in [-1,1] \tag{7.6}$$

$$r' = \tilde{r}(\xi,1) = R_\mathrm{d}\sin\theta' \tag{7.7}$$

$$z' = z(\xi,1) = R_\mathrm{d}\cos\theta' \tag{7.8}$$

という関係が成り立つ。なお，ここで用いている r' も球座標系ではなく，円筒座標系で仮想境界の座標を表したときの動径である。これより式 (7.5) の積分における微小線要素は，

$$R_\mathrm{d}^2\sin\theta' d\theta' = R_\mathrm{d} r' \frac{\pi}{2} d\xi' \tag{7.9}$$

となるから，式 (7.5) を一般曲線座標系で表すと，

$$\frac{\partial\phi_m}{\partial\hat{n}^3}(\xi,1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)(n-|m|)!}{2R_{\mathrm{d}}^2(n+|m|)!}\frac{kh_n^{(2)'}(kR_{\mathrm{d}})}{h_n^{(2)}(kR_{\mathrm{d}})}P_n^{|m|}\left(\frac{z'}{R_{\mathrm{d}}}\right)\times\int_{-1}^{1}P_n^{|m|}\left(\frac{z'}{R_{\mathrm{d}}}\right)\phi_m(\xi',1)R_{\mathrm{d}}r'\frac{\pi}{2}d\xi' \tag{7.10}$$

となる。

7.1.2 Spectral Nodal Galerkin Method における特性マトリクス

一般曲線座標系における DtN 写像が得られたので，これをスペクトル法に組み込んでいく。DtN 写像を境界条件として与えることは，インピーダンス境界を与えることに近い。そこで，インピーダンス境界の導入が容易である Spectral Nodal Galerkin Method (NGM) を解析手法として採用することとする。

境界 Γ_3 において，DtN 写像を用いて $\hat{n}_3$ 方向粒子速度 $-\partial\phi/\partial\hat{n}_3$ が与えられるので，前章の式 (6.49) より，

$$\begin{aligned}\Phi_m^3(\xi,1)&=\frac{J}{|J|}\sqrt{R^2(Z_\xi^2+R_\xi^2)}\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}^3}\\&=\frac{J}{|J|}\sqrt{R^2(Z_\xi^2+R_\xi^2)}\sum_{n=0}^{\infty}a_{nm}(k,R_{\mathrm{d}})P_n^{|m|}\left(\frac{z'}{R_{\mathrm{d}}}\right)\int_{-1}^{1}P_n^{|m|}\left(\frac{z'}{R_{\mathrm{d}}}\right)\phi_m(\xi',1)R_{\mathrm{d}}r'\frac{\pi}{2}d\xi'\\&=\frac{J}{|J|}\tilde{r}(\xi,1)R_{\mathrm{d}}\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_{nm}(k,R_{\mathrm{d}})P_n^{|m|}\left(\frac{z'}{R_{\mathrm{d}}}\right)\int_{-1}^{1}P_n^{|m|}\left(\frac{z'}{R_{\mathrm{d}}}\right)\phi_m(\xi',1)R_{\mathrm{d}}r'\frac{\pi}{2}d\xi'\\&=\frac{J}{|J|}\sum_{n=0}^{\infty}a_{nm}(k,R_{\mathrm{d}})P_n^{|m|}\left(\frac{z'}{R_{\mathrm{d}}}\right)\tilde{r}(\xi,1)\frac{\pi R_{\mathrm{d}}}{2}\int_{-1}^{1}P_n^{|m|}\left(\frac{z'}{R_{\mathrm{d}}}\right)r'\frac{\pi R_{\mathrm{d}}}{2}\phi_m(\xi',1)d\xi'\end{aligned} \tag{7.11}$$

となる。ここで，

$$a_{nm}(k,R_{\mathrm{d}})=\frac{(2n+1)(n-|m|)!}{2R_{\mathrm{d}}^2(n+|m|)!}\frac{kh_n^{(2)'}(kR_{\mathrm{d}})}{h_n^{(2)}(kR_{\mathrm{d}})} \tag{7.12}$$

とおいた。さらに，

$$\psi(\xi,1)=P_n^{|m|}\left(\frac{z'}{R_{\mathrm{d}}}\right)\tilde{r}(\xi,1)\frac{\pi R_{\mathrm{d}}}{2} \tag{7.13}$$

とおくと，式 (7.11) は

$$\Phi_m^3(\xi,1)=\frac{J}{|J|}\sum_{n=0}^{\infty}a_{nm}(k,R_{\mathrm{d}})\psi(\xi,1)\int_{-1}^{1}\psi(\xi',1)\phi_m(\xi',1)d\xi' \tag{7.14}$$

と書くことができる。ξ と η 方向を $(M+1)$ 点に離散化し，上式の積分を数値積分で処理すると，

$$\Phi_m^3(\xi_i,1)=\frac{J_{i,M}}{|J_{i,M}|}\sum_{n=0}^{\infty}a_{nm}(k,R_{\mathrm{d}})\psi(\xi_i,1)\sum_{l=0}^{M}\psi(\xi_l,1)\phi_m(\xi_l,1)w_l \tag{7.15}$$

となる。Γ_3 以外の境界条件は粒子速度が 0 であるとすると，式 (6.66) は，

$$-\sum_{l=0}^{M} D_{il}^{(\xi)\mathrm{T}} w_l w_j \Phi_m^1(\xi_l,\eta_j) + m w_i w_j \Phi_m^2(\xi_i,\eta_j) - \sum_{l=0}^{M} D_{jl}^{(\eta)\mathrm{T}} w_i w_l \Phi_m^3(\xi_i,\eta_l) + k^2 J_{i,j} w_i w_j \phi_m(\xi_i,\eta_j)$$
$$+\ell_j(1)\frac{J_{i,M}}{|J_{i,M}|}\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}(k,R_\mathrm{d})\psi(\xi_i,1)w_i \sum_{l=0}^{M}\psi(\xi_l,1)\phi_m(\xi_l,1)w_l = -J_{i,j}w_i w_j q_m(\xi_i,\eta_j) \tag{7.16}$$

と書き換えることができる。上式を $i=0,1,\ldots,M, j=0,1,\ldots,M$ について書き並べると，最終的に次のようなマトリクス方程式を立てることができる。

$$\left[\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2+\boldsymbol{K}_3-\boldsymbol{B}-\frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{diag}\,(J)\,\boldsymbol{W}\right]\boldsymbol{\phi}_n = \mathrm{diag}\,(J)\,\boldsymbol{W}\boldsymbol{q}_n \tag{7.17}$$

新しく導入したマトリクス $\boldsymbol{B}$ が DtN 写像を表しており，その成分は

$$B_{M(M+1)+i,M(M+1)+j} = \frac{J_{i,M}}{|J_{i,M}|}\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}(k,R_\mathrm{d})\psi(\xi_i,1)w_i\psi(\xi_j,1)w_j, \quad i,j=0,1,\ldots,M$$
$$B_{M(M+1)+i,M(M+1)+j} = 0, \quad \text{otherwise} \tag{7.18}$$

と表される。なお，上式は Legendre 陪関数の無限級数であるが，実際の数値計算においては有限の次数で打ち切る必要がある。その他のマトリクスについては前章で導出したものである。

7.2 数値計算例

7.2.1 剛体球の散乱音場

提案手法の妥当性と計算精度を検証するため，音響数値解析ベンチマークプラットフォーム「AIJ-BPCA」[49] の問題 A0-3F を計算した。これは図 7.3 に示すような半径 0.5 m の剛体球の周りの散乱音場を計算する問題となっている。点音源の位置は剛体球の中心から 3 m の位置，受音点は半径 2 m の半円上を 1 度刻みで 181 点と設定されている。

回転軸上における境界条件

まず，この問題において境界条件に注意を要する。図 7.4(a) に理論解析解，図 7.4(b) に NGM によって求めた 250 Hz の音圧分布を示す。なおこのとき，節点としては NGM において通常用いられる Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) ノードを用い，z 軸上で図 7.3 の θ 方向粒子速度が 0 という Neumann 境界条件を与えた。図 7.4(b) を見ると図 7.4(a) と近い音圧分布が得られているようにも見えるが，妥当な解が得られているとは言えない。これは境界条件に起因するものだと考えられる。ここで $\cos\theta=\xi$ とおくと，ξ 方向の支配方程式は Legendre の微分方程式，

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{(1-\xi^2)\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right\}+\lambda\phi=0, \quad -1<\xi<1 \tag{7.19}$$

となる。この微分方程式は特異な Strum-Liouville 問題と呼ばれ，このとき解 ϕ は特定の境界条件を満たす必要がない [6]。つまり，Neumann 境界条件を与えてしまうと図 7.4(b) のように正しい解が得られないものと考えられる。

そこで，ξ 方向の節点として境界に節点をもたない Legendre-Gauss ノード [7] を用いる。これにより，境界条件を与えないということが可能になる。η 方向は境界条件が必要であるため，通常の LGL ノードを用いる。図 7.5 に仮想境界の半径 $R_d = 3.5$，ξ と η 方向の節点数をともに 20 としたときの節点の配置を示す。

Legendre-Gauss ノードを用いた NGM による音圧分布を図 7.4(c) に示す。理論解析解と近い音圧分布が得られていることが分かる。

仮想境界の半径と Legendre 陪関数の打ち切り次数

ここでは DtN 写像の二つのパラメータ，仮想境界の半径と Legendre 陪関数の打ち切り次数を変化させながら計算を行い，それらと計算精度の関係について調べる。仮想境界の半径を 3，3.5，4 m として，それぞれ 500 Hz の波長に少なくとも格子が二つ以上含まれるように離散化し，横軸に Legendre 陪関数の打ち切り次数，縦軸に理論解析解 (打ち切り次数 60) との L_2 相対誤差をとったものを図 7.6 に示す。

仮想境界の半径が大きくなるほど，誤差が大きくなっていることが分かる。仮想境界の半径を大きくとると領域が広くなり，当然必要な節点数も大きくなるため，計算負荷という観点からも好ましくない。よって仮想境界の半径はできるだけ小さくしたほうがよいと言える。

次に Legendre 陪関数の打ち切り次数と誤差の関係を見てみると，打ち切り次数を大きくするにつれていったん誤差は小さくなるが，さらに大きくしていくと高い周波数から順に誤差が大きくなっている。こ

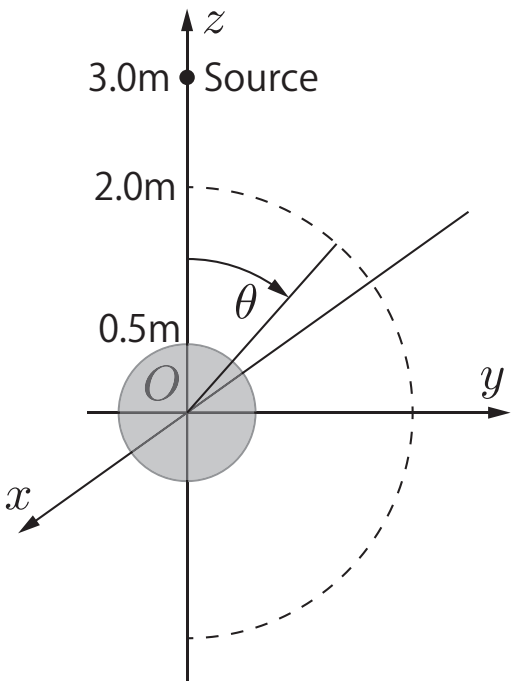
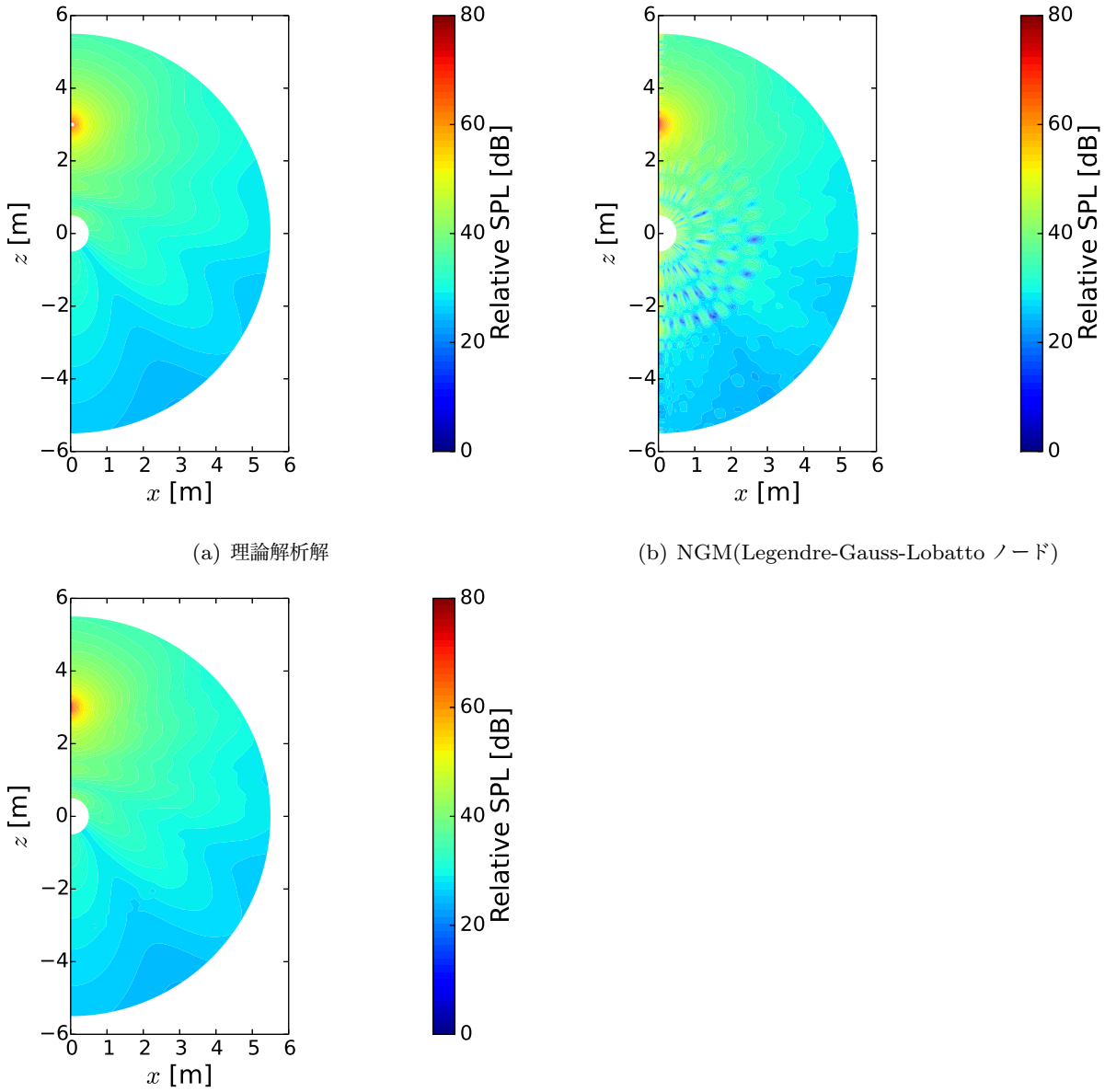


図 7.3: 剛体球と音源の配置



(a) 理論解析解

(b) NGM(Legendre-Gauss-Lobatto ノード)

(c) NGM(Legendre-Gauss ノード)

図 7.4: θ 方向に用いる節点の種類による音圧分布の違い

れは式 (7.14) の積分を数値積分で処理した式 (7.15) の誤差によるものだと考えられる。今，図 7.3 の θ 方向は Legendre-Gauss ノードで離散化しており，用いる数値積分は Legendre-Gauss 求積である。θ 方向の節点数を N_θ とすると，この数値積分は被積分関数が $2N_\theta - 1$ 次の多項式までは厳密に計算できるが，それより高次の多項式の積分は近似となる。式 (7.14) の被積分関数において，ϕ_m は N_θ 個の節点値から内挿される $N_\theta - 1$ 次の多項式，また，$\psi(\xi', 1)$ のうち，一般曲線座標系で表された $r(\xi', 1)$ もまた同様に $N_\theta - 1$ 次の多項式である。Legendre 陪関数 $P_n^{|m|}$ は n 次の多項式であるから，被積分関数全体では $2N_\theta + n - 2$ 次の多項式となっている。つまり，n が 2 以上の積分は近似となり，n が大きくなるにつれて誤差も大きくなる。たとえ被積分関数の次数が $2N_\theta - 1$ より大きくても，その空間的な変化が緩やか

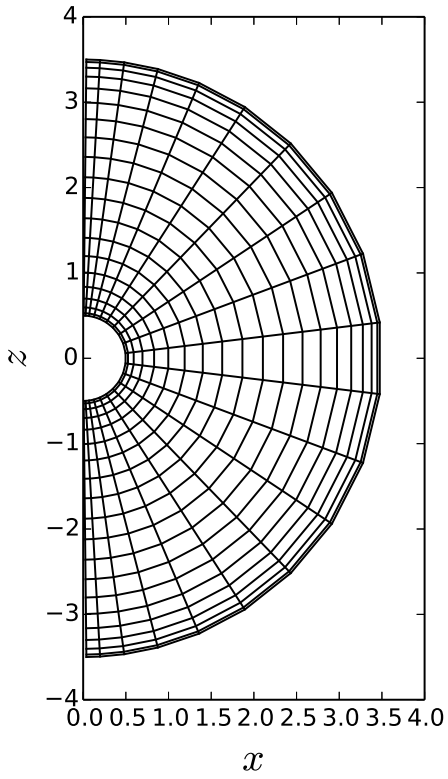
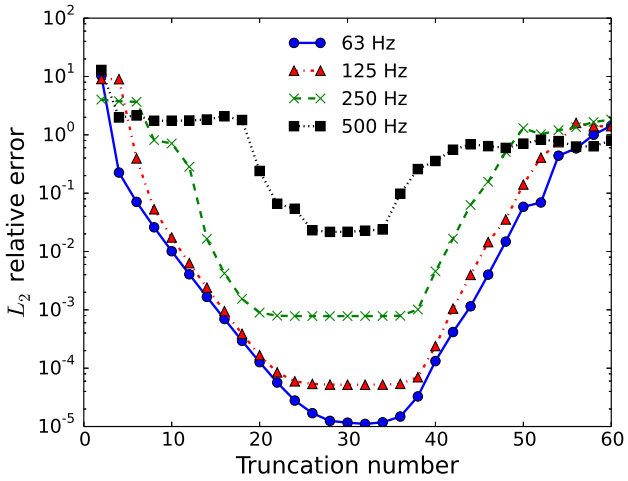


図 7.5: 剛体球の周りの格子点 ($R_d = 3.5$，ξ，η 方向の節点数がともに 20 のとき)

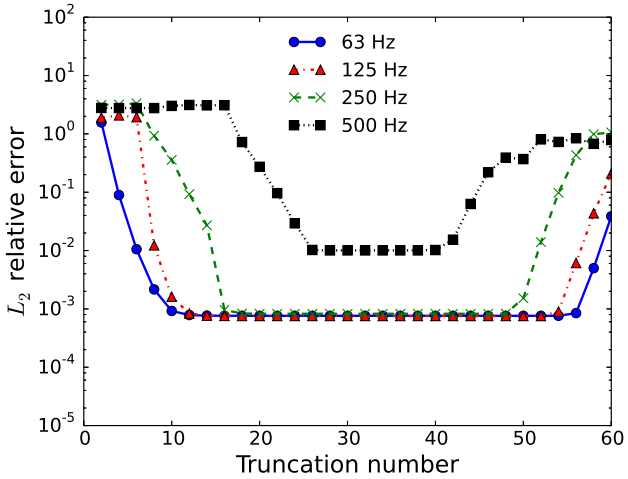
で，$2N_\theta - 1$ 次の多項式で近似できれば誤差は小さい。しかし，波数 k が大きくなると解 ϕ_m の空間的な変化が大きくなり，数値積分の誤差も大きくなると予想される。

このことを確認するために，式 (7.14) の積分を数値積分で計算する際，Legendre 陪関数の次数によって被積分関数がどの程度近似されているのか調べた。図 7.6(a) において，周波数を 125 Hz と 250 Hz としたとき，誤差の減少が横ばいになる前の次数の被積分関数をプロットしたものが図 7.7 である。青の実線は理論解析解から求まる本来積分したい被積分関数，赤の破線はそれを 43 点の Legendre-Gauss ノード上で離散化して Legendre 多項式で内挿したもの，つまり数値積分によって積分される被積分関数を表している。Legendre 陪関数の次数を大きくしていくと，近似する被積分関数の誤差が大きくなっている。また，Legendre 陪関数の次数が同じ 20 次であっても，125 Hz より 250 Hz の被積分関数のほうが誤差が大きい。これらのことから，Legendre 陪関数の次数，もしくは波数が大きくなると数値積分の誤差によって DtN 写像の精度が低下してしまう。つまり，スペクトル法における節点数との関係により，適切な打ち切り次数があるということである。

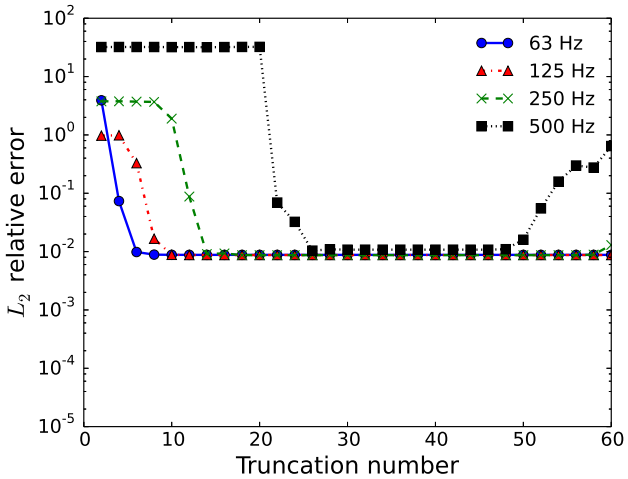
数値積分の精度を上げる単純な方法は積分点を増やすことである。NGM の場合には積分点を節点とするため，すなわち節点を増やすことが積分点を増やすことに相当する。そこで，r 方向と θ 方向の節点数を倍にして図 7.6(a) と同様の計算を行った。図 7.8 にその結果を示す。図 7.6(a) では打ち切り次数を 36 次以上にすると誤差が大きくなる傾向にあったが，図 7.8 ではそれが見られず，改善されている。以上の



(a) 仮想境界の半径 3 m (1849 節点)

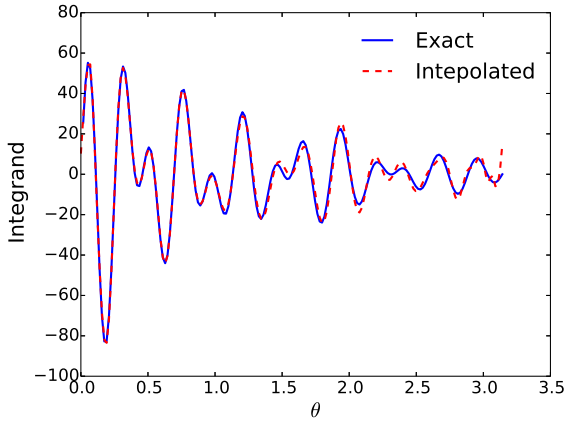


(b) 仮想境界の半径 3.5 m (2500 節点)

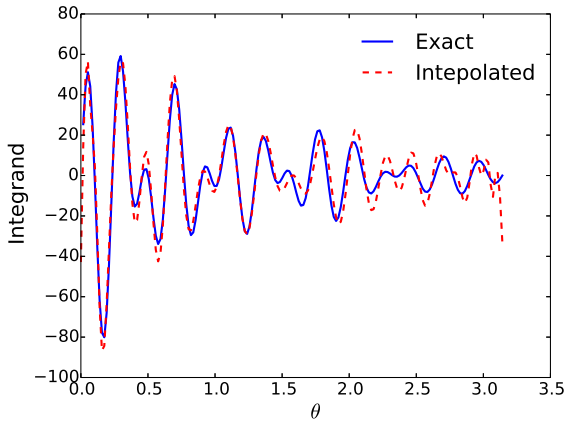


(c) 仮想境界の半径 4 m (3249 節点)

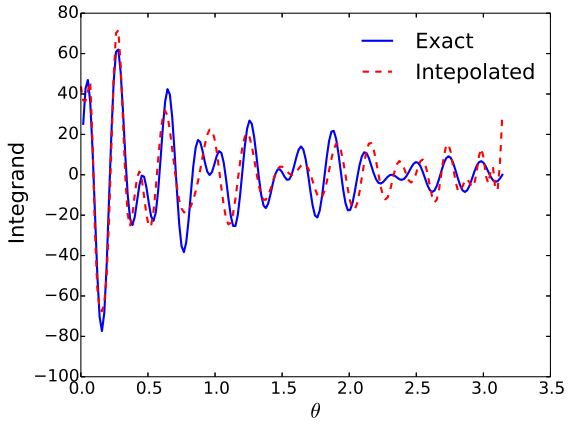
図 7.6: Legendre 陪関数の打ち切り次数と誤差



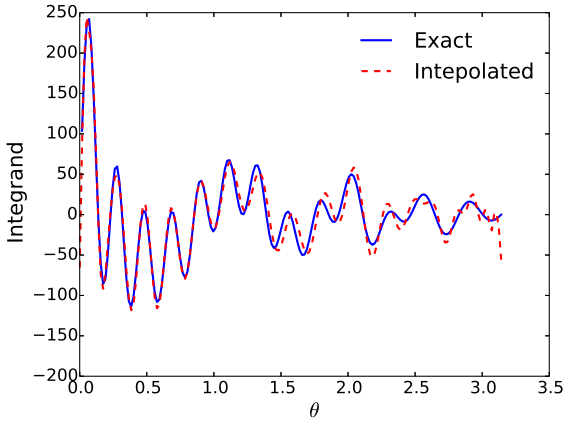
(a) 125 Hz，20 次



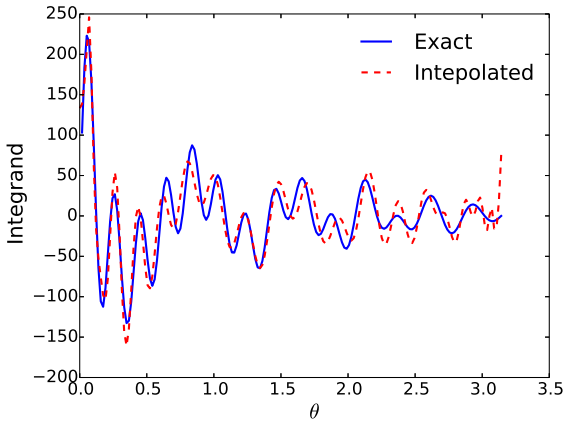
(b) 125 Hz，22 次



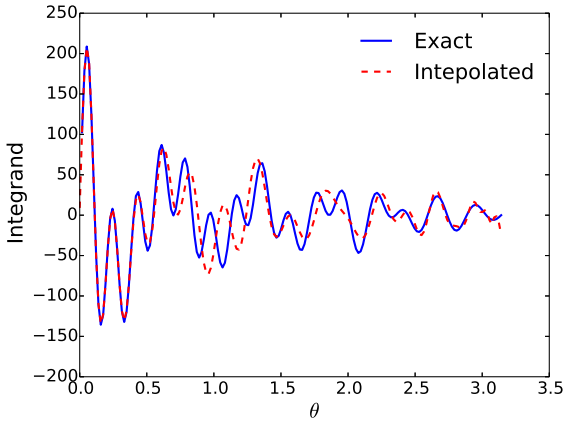
(c) 125 Hz，24 次



(d) 250 Hz，16 次



(e) 250 Hz，18 次



(f) 250 Hz，20 次

図 7.7: DtN 写像における被積分関数の実部

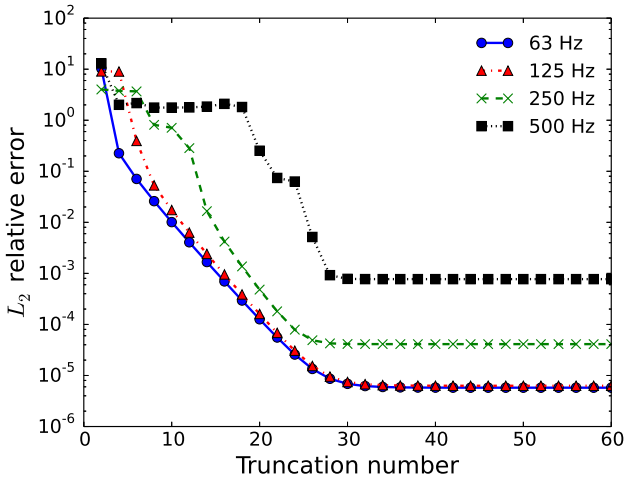


図 7.8: Legendre 陪関数の打ち切り次数と誤差 (仮想境界の半径 3 m，節点数 7396)

結果から，提案手法における Legendre 陪関数の打ち切り次数は，単純に大きくすれば精度が上がるわけではなく，境界上の節点数についても考慮する必要があるということが言える。

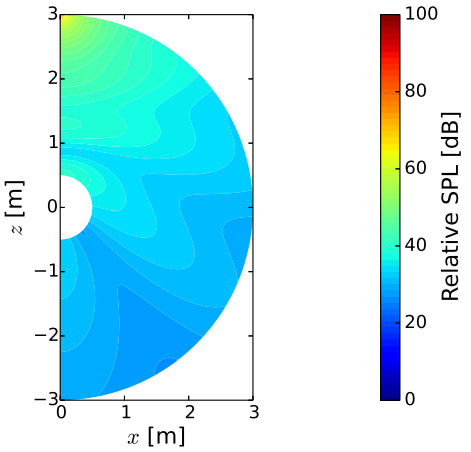
アドミッタンス終端との比較

領域型の解法で開領域音場を解く最も単純な方法はアドミッタンス終端 [50] と呼ばれる方法である。この方法は無限領域を有限領域で打ち切り，境界条件として媒質の特性インピーダンス ρc を与えるものであり，無限遠における Sommerfeld の放射条件を近似的に与えることに相当する。ここでは境界条件としてアドミッタンス終端を適用した場合と提案手法により計算した散乱音場の音圧分布を比較する。

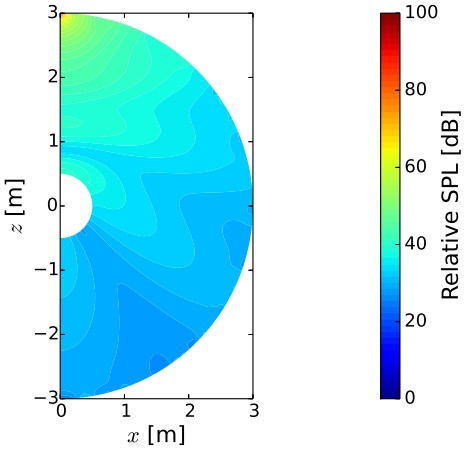
図 7.9 と 7.10 に各手法で求めた 250 Hz と 500 Hz の音圧分布を示す。NGM の節点数は 7396(500 Hz で 1 波長あたりの格子数 4)，DtN 写像の打ち切り次数は 30 とした。アドミッタンス終端では疑似反射の影響によると思われる誤差が生じている。アドミッタンス終端は波面が仮想境界近傍で平面波に近くなる場合に有効な方法である。そのため，仮想境界を音源や散乱体から遠くに設定すれば精度を改善できると予想されるが，NGM による有限領域を広くすることになり，それに応じて節点数も多くする必要がある。それに対して提案手法では理論解析解に近い音圧分布が得られており，アドミッタンス終端に対する優位性を確認できる。提案手法は境界で厳密解である理論解析解と連成しているため，原理的には仮想境界の半径に制約はない。そのため，有限領域を小さく設定することにより，節点数を削減することができる。

7.2.2 一般的な軸対称形状を有する振動体からの放射音場

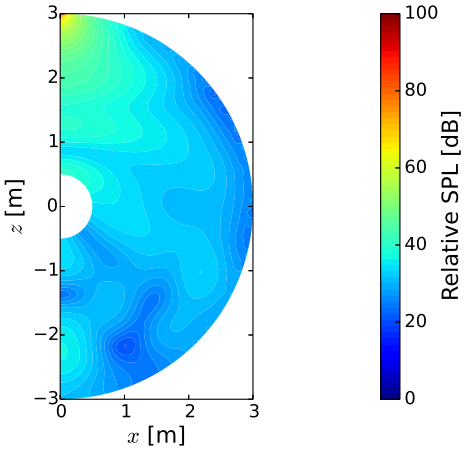
剛体球の散乱音場は理論解析解を求めることができたが，ここでは理論解析解を求めることができない一般的な軸対称形状をもつ振動体からの放射音場を計算する。図 7.11 に示すようなティンパニの形状をした障害物を考え，ティンパニのヘッドにあたる部分が一様に振動するとする。



(a) 理論解析解

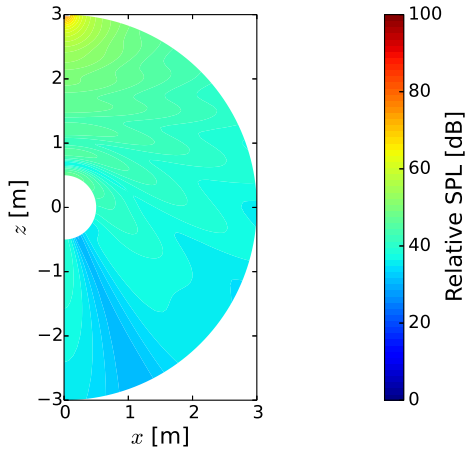


(b) NGM(DtN 写像)

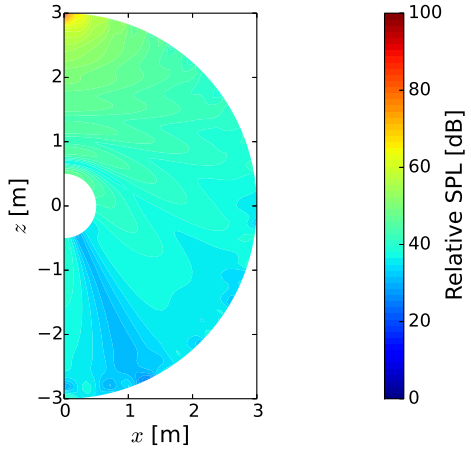


(c) NGM(アドミッタンス終端)

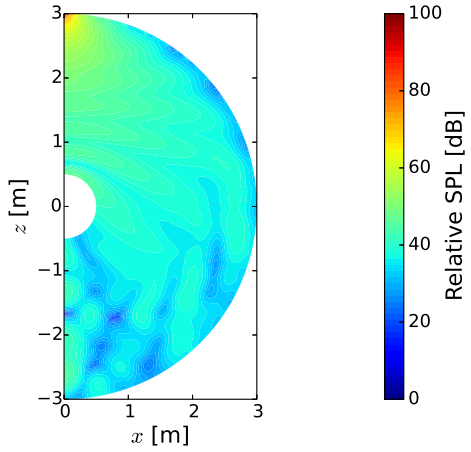
図 7.9: 250 Hz の音圧分布



(a) 理論解析解



(b) NGM(DtN 写像)



(c) NGM(アドミッタンス終端)

図 7.10: 500 Hz の音圧分布

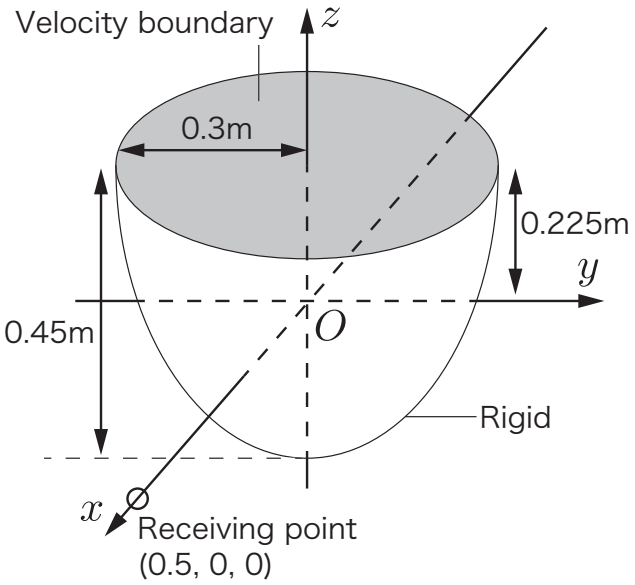


図 7.11: 軸対称形状を有する音源の形状と受音点の配置

境界形状を定義する節点の配置

まず，Transifinite 補間を使って解析領域を定義するために必要な四つの境界のうちの一つを，ティンパニの形状に沿って定義する。このとき，境界が角点を有することになり，注意が必要である。境界の形状 Γ は (ξ, η) の多項式で表されなければならず，この多項式は，所望の境界上に配置した節点の座標から内挿して求められる。そこで，節点を角点に配置しなかった場合と配置した場合で，それによって内挿された多項式が表す境界の形状および計算精度に与える影響について調べた。

角点に節点を配置しなかった場合と配置した場合に内挿された境界の形状を図 7.12 に示す。Nodes 1 は角点に節点を配置しなかった場合 (境界上の節点数 21)，Nodes 2 は角点に節点を配置した場合 (境界上の節点数 22) を表している。角点に節点を配置した場合，境界の形状はその角を通っているがその前後で不自然な振動が見られる。一方，角点に節点を配置しなかった場合，角は通らないものの，角点に節点を配置した場合よりも自然な形状の境界が得られている。

節点配置が計算精度に与える影響について調べるため，0.5 m の仮想境界上の 181 点の誤差を求めた。なお，図 7.11 の放射音場の理論解析解を求めることはできないため，1000 Hz の波長に対する寸法比が約 0.05，要素数 358 の軸対称一定要素を用いた BEM [51] により求めた解を参照解として L_2 相対誤差を算出した。図 7.13 に横軸を未知数の数，図 7.14 に横軸を反復法に必要なメモリ容量とした L_2 相対誤差の変化を示す。これらの結果を見ても，わずかではあるが角点に節点を配置しないほうが精度が良いことが分かる。

また，同図には軸対称一定要素を用いた BEM の誤差の変化も示している。BEM は境界のみを離散化するため，必要な未知数の数は領域型の解法であるスペクトル法よりも少なくなっている。しかし，係数行列は密行列であり，スペクトル法のように複数の疎行列に分解することもできない。そのため，連立方程式の求解に必要なメモリ容量で比較すると，提案手法とほぼ同等になっている。

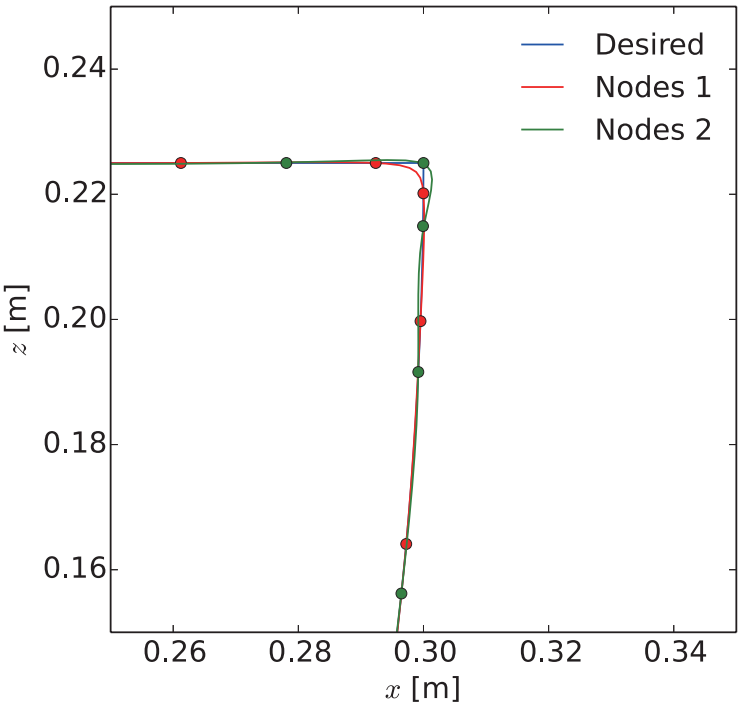


図 7.12: 内挿された境界の形状

開領域音場の周波数応答関数

ここでは図 7.11 の放射音場の周波数応答関数を計算する。提案手法における仮想境界は半径 0.5 m の球面上に設置し，仮想境界上の点 $(x, y, z) = (0.5, 0, 0)$ を受音点とした。1 kHz の波長に少なくとも 4 つの格子が含まれるように，有限領域内を 174 点に離散化した。このときの格子を図 7.15 に示す。また，DtN 写像における Legendre 陪関数の打ち切り次数は 10 とした。

提案手法により求めた周波数応答関数を図 7.16 に示す。参考のために，連立方程式の解法に反復法を用いた場合の提案手法とほぼ同等のメモリ容量 33 kB を要する要素数 45 の軸対称 BEM により求めた周波数応答関数も示している。どちらの手法も同じような周波数応答関数が得られているが，BEM では 670 Hz あたりと 990 Hz あたりに提案手法には見られないピークが生じている。これは開領域問題において特定の周波数で解の一意性が保証されないという，BEM 特有の問題である。この問題を解消するためには特別な処理が必要であり，CHIEF(Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) 法 [52] や Burton-Miller 法 [53] がよく利用されている。CHIEF 法は物体内部に複数の仮想的な点を付加し，その点に関する方程式と連立して階数不足を補うという方法である。この方法は計算量を比較的小さく抑えられるが，付加する点の位置や個数に任意性があり，必ずしも解が保証されるというものではない。Burton-Miller 法は基本型と法線方向微分型の積分方程式を線形結合させた連立方程式を解く方法である。CHIEF 法のように特別な注意は必要ないが，連立方程式の規模が倍増することになる。

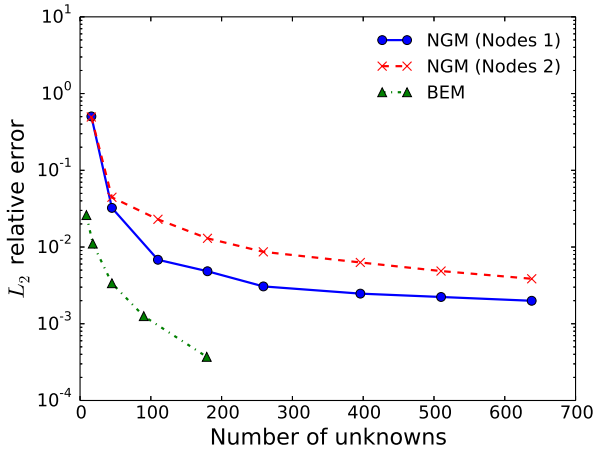
それに対して提案手法は特別な処理を施さずとも，BEM のような現象は生じておらず，滑らかな周波

数応答関数を得られている。

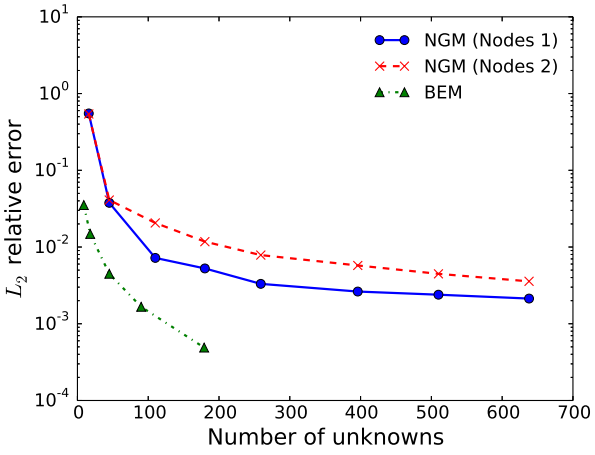
7.3 まとめ

本章では軸対称形状を有する開領域音場解析手法を提案した。領域型の解法であるスペクトル法で開領域音場を厳密に解析するために，球面状の仮想境界を設け，理論解析解と連成する DtN 写像を境界条件として採用した。DtN 写像は NGM において新しい特性マトリクスとしてマトリクス方程式に導入される。

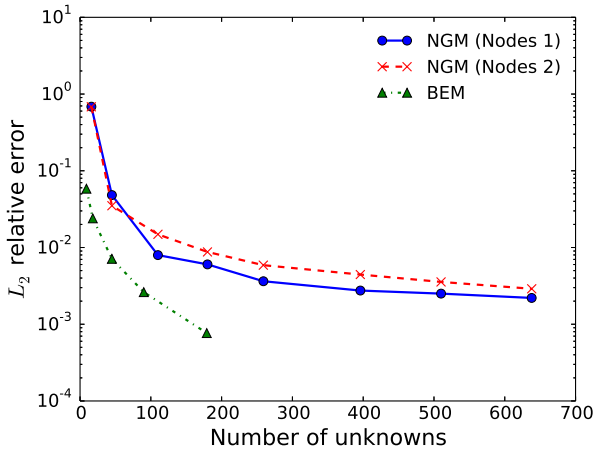
提案手法の計算精度について検証を行ったところ，Legendre 陪関数の打ち切り次数を大きくすると，数値積分の誤差により精度が悪化してしまうことが分かった。そのため，Legendre 陪関数の次数は適切に打ち切る必要がある。解析周波数と仮想境界の半径から最適な打ち切り次数を定められるように公式化することが今後の課題としてあげられる。また，境界条件としてインピーダンス境界を与えるアドミッタンス終端よりも提案手法が精度がいいこと，BEM において生じる解の非一意性の問題が，提案手法では特別な処理を施さずとも起こらないことなどを示した。



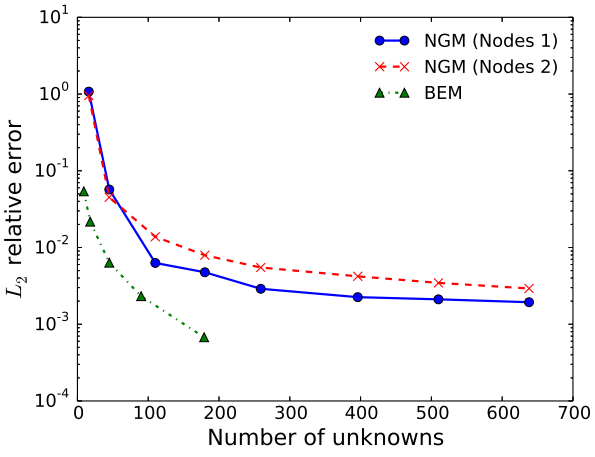
(a) 63 Hz



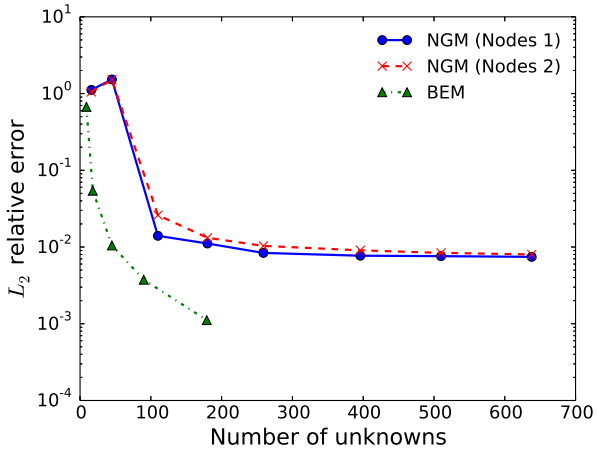
(b) 125 Hz



(c) 250 Hz

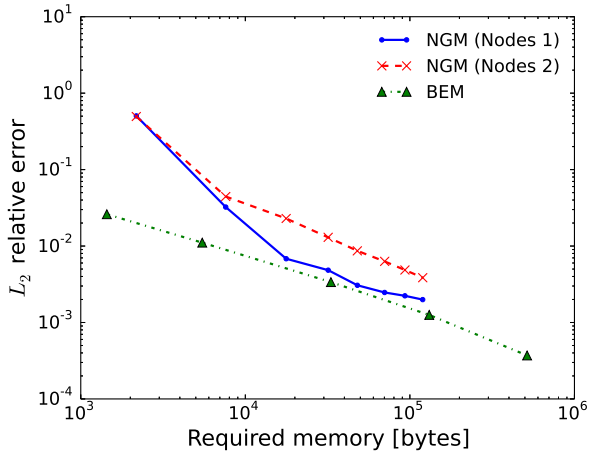


(d) 500 Hz

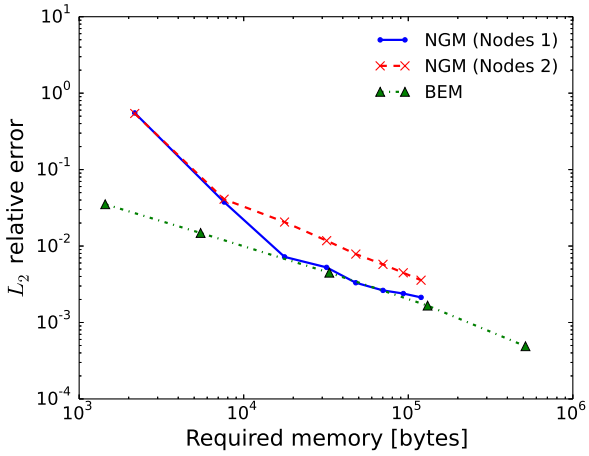


(e) 1000 Hz

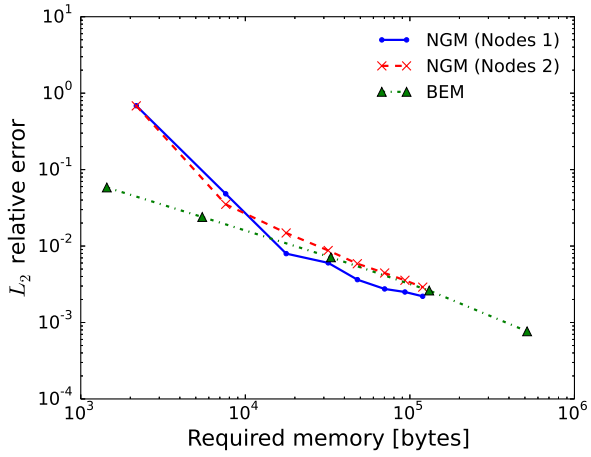
図 7.13: 未知数の数に対する音圧分布の L_2 相対誤差



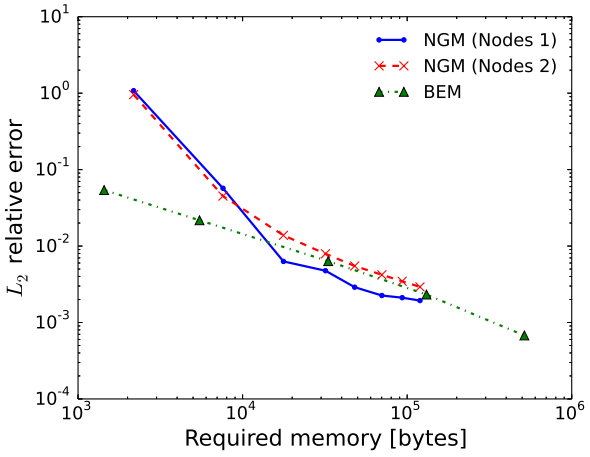
(a) 63 Hz



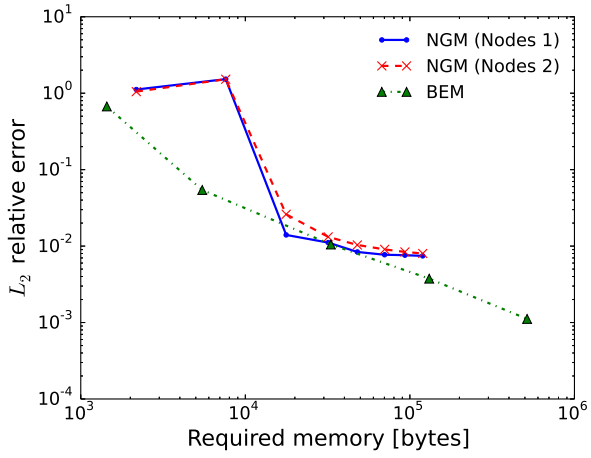
(b) 125 Hz



(c) 250 Hz



(d) 500 Hz



(e) 1000 Hz

図 7.14: 必要メモリ容量に対する音圧分布の L_2 相対誤差

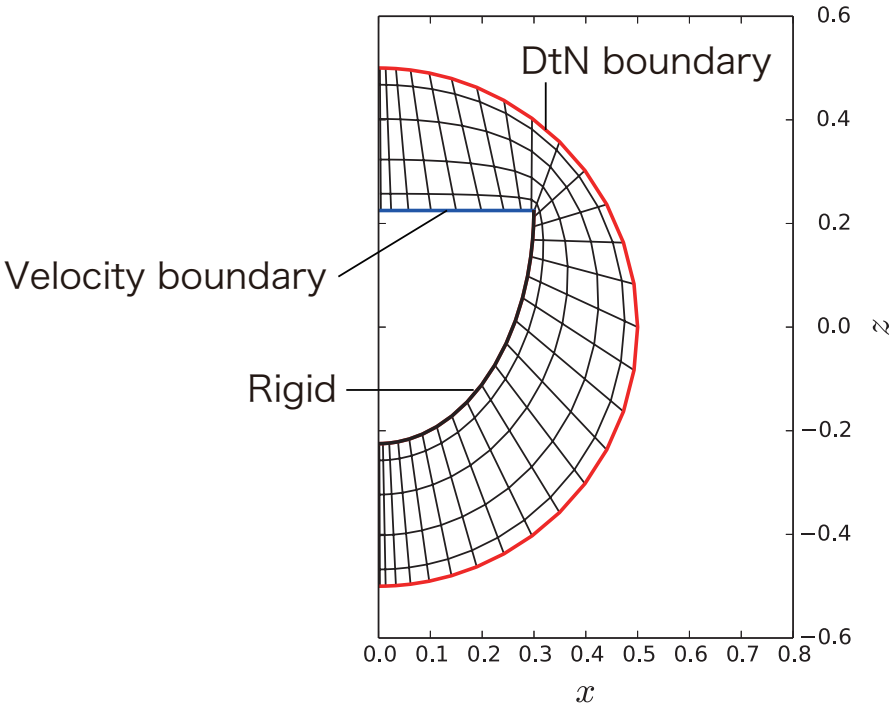


図 7.15: 有限領域内の格子点と境界

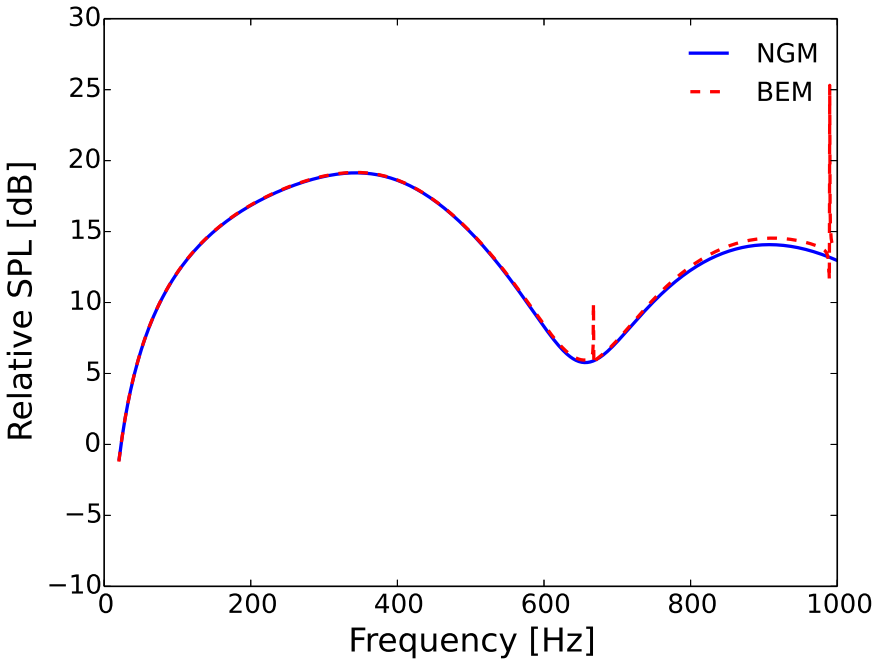


図 7.16: 放射音場の周波数応答関数

第 8 章

スペクトル法による膜鳴楽器の音響振動連成解析

第 4 章から第 7 章において膜鳴楽器を構成する張力を有する円形板，円筒シェル，内部・外部音場の解析手法を構築し，その有効性を検証してきた。本章ではこれらの構成要素を連成し，膜鳴楽器としての解析手法を構築する。

連成を考える際，それぞれの構成要素の節点を共有することが望ましい。そこで薄板振動場および円筒シェル振動場と外部音場の間で節点を共有できるよう，まず外部音場を領域分割することを考える。次に板とシェルの振動速度が音場に振動速度境界として作用し，また音圧が板とシェルの加振圧力として作用するという連成条件により連成し，マトリクス方程式を立てる。最後に提案解析手法によるティンパニの数値計算例を示す。

8.1 提案解析手法

8.1.1 音場の領域分割

膜鳴楽器の解析モデルとして，図 8.1 のような 2 種類のモデルを考える。まず一つは張力を有する円形薄板振動場，内部音場，外部音場からなるモデル，もう一つはそれらに加えて円筒シェル振動場についても考慮したモデルである。それぞれの構成要素は Chebyshev ノードや Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) ノードに離散化され，これらを連成するときその節点を共有することが望ましい。前章において外部音場に角点を有する境界を定義する場合，境界の近似および計算精度の点で角点に節点を配置しないほうがよい結果が得られるということを述べた。しかし，薄板や円筒シェルに境界条件や連成条件を与えるためにはその境界，つまり外部音場における角にも節点を配置する必要があり，それらの間で節点を共有することができなくなってしまう。

そこで図 8.2 のように外部音場を領域分割することで，境界から角を排除することができ，かつ節点を薄板や円筒シェルと簡単に共有することが可能である。本項ではこの領域分割について説明する。領域分割を取り入れたスペクトル法はスペクトル要素法 (Spectral Element Method) とも呼ばれる。

領域分割するとき，領域全体を積分する Spectral Nodal Galerkin Method (NGM) を用いると分割し

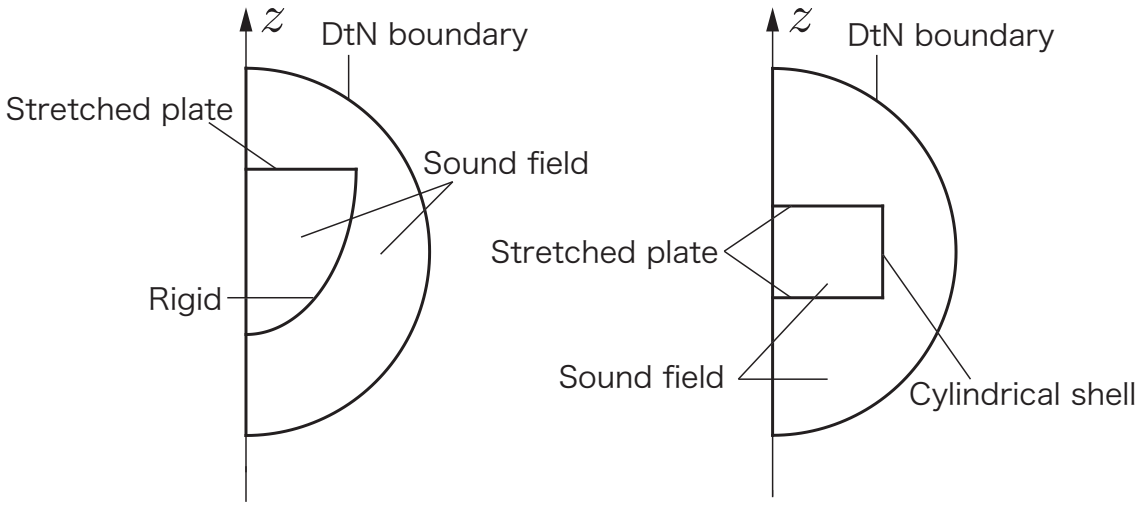


図 8.1: ティンパニとドラムの解析モデルの回転断面

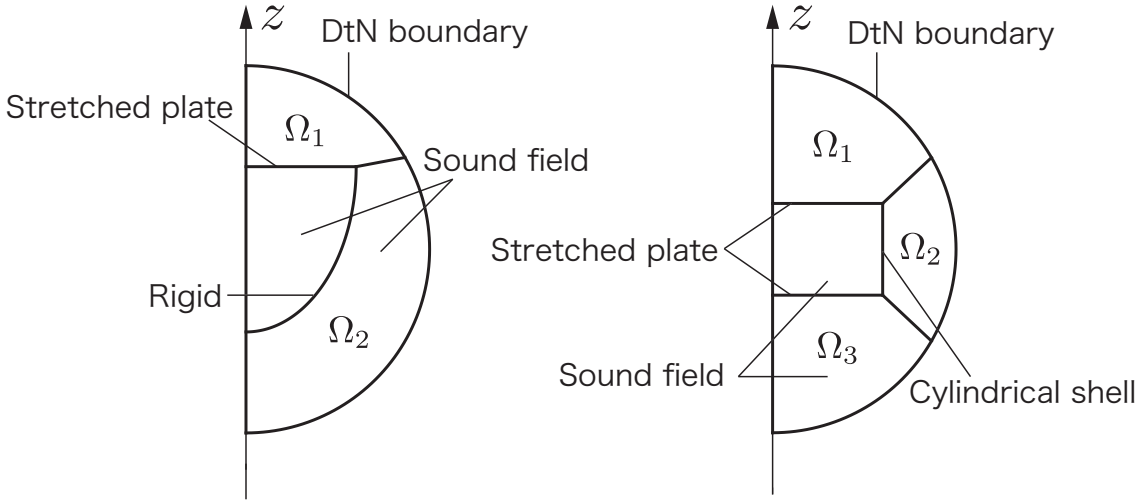


図 8.2: 外部音場の領域分割

た領域間の連成が簡単である。まず，z 軸を軸とする回転方向をフーリエ級数展開したときの m 次の展開係数を ϕ_m とし，ϕ_m に関する Helmholtz 方程式の両辺に重み関数 ψ をかけて領域 Ω 全体で積分した次の方程式を考える。

$$\int_\Omega \left(\nabla_m^2 \phi_m + k^2 \phi_m\right) \psi dS = 0 \tag{8.1}$$

$\int_\Omega dS$ は回転断面の面積積分を表している。Green の定理を用いて上式は，

$$\int_\Omega \nabla_m \phi_m \cdot \nabla_m \psi dS + \int_\Gamma \frac{\partial \phi_m}{\partial \boldsymbol{n}} \psi dl - k^2 \int_\Omega \phi_m \psi dS = 0 \tag{8.2}$$

と変形できる。次に領域 Ω を $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_K$ に分割する。上式の積分は各領域ごとの積分の和で

$$\sum_{e=1}^{K} \int_{\Omega_e} \nabla_m \phi_m \cdot \nabla_m \psi dS + \int_\Gamma \frac{\partial \phi_m}{\partial \boldsymbol{n}} \psi dl - k^2 \sum_{e=1}^{K} \int_{\Omega_e} \phi_m \psi dS = 0 \tag{8.3}$$

と表すことができる。

左辺第 1 項の $\nabla_m\phi_m$ は式 (6.7) より

$$\begin{aligned}\nabla_m\phi_m = \frac{1}{J}\Bigg[&\left\{Y_\theta Z_\eta\frac{\partial\phi_m}{\partial\xi} - m(Y_\eta Z_\xi - Z_\eta Y_\xi)\phi_m - Z_\xi Y_\theta\frac{\partial\phi_m}{\partial\eta}\right\}\hat{x}\\ &+\left\{-X_\theta Z_\eta\frac{\partial\phi_m}{\partial\xi} - m(Z_\eta X_\xi - X_\eta Z_\xi)\phi_m + Z_\xi X_\theta\frac{\partial\phi_m}{\partial\eta}\right\}\hat{y}\\ &+\left\{(X_\theta Y_\eta - Y_\theta X_\eta)\frac{\partial\phi_m}{\partial\xi} - m(X_\eta Y_\xi - Y_\eta X_\xi)\phi_m + (X_\xi Y_\theta - Y_\xi X_\theta)\frac{\partial\phi_m}{\partial\eta}\right\}\hat{z}\Bigg] \quad (8.4)\end{aligned}$$

である。6.1.1 項と同様の定式化を行うと，最終的に被積分関数は

$$\nabla_m\phi_m\cdot\nabla_m\psi = \frac{1}{J}\left(\Phi^1_m\frac{\partial\psi}{\partial\xi} - m\Phi^2_m\psi + \Phi^3_m\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) \quad (8.5)$$

となる。ただし, Φ^1_m, Φ^2_m, Φ^3_m はそれぞれ式 (6.30a), (6.30b), (6.30c) である。重み関数を $\psi = \ell_i(\xi)\ell_j(\eta)$ とし，領域 Ω_e についての積分を一般曲線座標系で表すと

$$\int_{\Omega_e}\nabla_m\phi_m\cdot\nabla_m\psi dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\Phi^1_m\ell'_i\ell_j - m\Phi^2_m\ell_i\ell_j + \Phi^3_m\ell_i\ell'_j\right)d\xi d\eta \quad (8.6)$$

により求めることができる。また，式 (8.3) の左辺第 3 項の積分についても一般曲線座標系を用いて

$$k^2\int_{\Omega_e}\phi_m\psi dS = k^2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_m\ell_i\ell_j d\xi d\eta \quad (8.7)$$

と表すことができる。式 (8.6) と (8.7) はそれぞれ式 (6.58) と (6.59) と同じものである。つまり，分割した領域 $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_K$ ごとに領域内の節点値を用いて式 (6.58) と (6.59) より式 (8.6) と (8.7) を求め，それらの和をとることで式 (8.3) の左辺第 1 項と第 3 項は計算することができる。

次に式 (8.3) の左辺第 2 項について考える。境界 Γ が振動速度 v_n の振動速度境界 Γ_v，インピーダンス z_n のインピーダンス境界 Γ_z，そして DtN 境界 $\Gamma_{\rm dtn}$ から構成されるとすると，式 (8.3) の左辺第 2 項はそれぞれの境界の積分の和で

$$\int_\Gamma\frac{\partial\phi_m}{\partial\boldsymbol{n}}\psi dl = -v_n\int_{\Gamma_v}\psi dl - \frac{j\omega\rho}{z_n}\int_{\Gamma_z}\phi_m\psi dl + \int_{\Gamma_{\rm dtn}}\frac{\partial\phi_m}{\partial\boldsymbol{n}}\psi dl \quad (8.8)$$

と書ける。振動速度境界 Γ_v とインピーダンス境界 Γ_z については 6.1.4 項に示した方法に従って分割した領域ごとに定式化できるが，DtN 境界については注意が必要である。上式の右辺第 3 項の $\partial\phi_m/\partial\boldsymbol{n}$ は式 (7.5) によって求められ，これは DtN 境界全体の積分となっている。つまり DtN 境界上のある 1 点での DtN 写像は DtN 境界全体の積分値で与えられ，領域分割した場合にも着目している領域のみでなく，DtN 境界上のすべての節点値を使って求める必要がある。

8.1.2 音場と振動場の連成

連成条件を立てて張力を有する薄板，円筒シェル，内部・外部音場を連成する。これまで第 4 章から第 7 章で提案してきた各手法におけるマトリクス方程式は，それぞれ次のような形式で表される。

$$\left[\boldsymbol{K}_{\rm p} - \omega^2\boldsymbol{M}_{\rm p}\right]\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_{\rm p} + \boldsymbol{p}_{\rm p} \quad (8.9)$$

$$\left[\boldsymbol{K}_{\mathrm{s}} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}\right] \boldsymbol{d} = \boldsymbol{W}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{W}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{p}_{\mathrm{s}} \tag{8.10}$$

$$\left[\boldsymbol{K}_{\mathrm{in}} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\mathrm{in}}\right] \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{in}} = \boldsymbol{W}_{\mathrm{in}} \boldsymbol{v}_{\mathrm{in}}^{(\mathrm{p})} + \boldsymbol{W}_{\mathrm{in}} \boldsymbol{v}_{\mathrm{in}}^{(\mathrm{s})} \tag{8.11}$$

$$\left[\boldsymbol{K}_{\mathrm{out}} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\mathrm{out}} - \boldsymbol{B}\right] \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{out}} = \boldsymbol{W}_{\mathrm{out}} \boldsymbol{v}_{\mathrm{out}}^{(\mathrm{p})} + \boldsymbol{W}_{\mathrm{out}} \boldsymbol{v}_{\mathrm{out}}^{(\mathrm{s})} \tag{8.12}$$

式 (8.9) は張力を有する円形薄板振動場のマトリクス方程式 (4.42) であり，

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}} = B \boldsymbol{L}_n^{(4)} - T \boldsymbol{L}_n^{(2)} \tag{8.13}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{p}} = \rho h \boldsymbol{I} \tag{8.14}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_n \tag{8.15}$$

$$\boldsymbol{f} = \tilde{\boldsymbol{f}}_n \tag{8.16}$$

とおいた。また，式 (8.9) に新たに加えたベクトル $\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}$ と $\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}}$ はそれぞれ円筒シェルから加わる加振圧力および内部音場と外部音場の音圧差を表しており，この後連成条件を立てて導出するものである。なお，$\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}$ は圧力の単位 $\mathrm{N/m^2}$ をもち，面積積分することで力の単位 N となる項であるが，実際には円形薄板と円筒シェルは線で接しているため半径方向の分布はデルタ関数となっている。

式 (8.10) は円筒シェル振動場のマトリクス方程式 (5.37) である。各マトリクスとベクトルは

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{s}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{13} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} & \boldsymbol{K}_{23} \\ \boldsymbol{K}_{31} & \boldsymbol{K}_{32} & \boldsymbol{K}_{33} \end{bmatrix} \tag{8.17}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{c_{\mathrm{L}}^2} \frac{l}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{W} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{W} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \tilde{\boldsymbol{W}} \end{bmatrix} \tag{8.18}$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{v}_n \\ \boldsymbol{w}_n \end{Bmatrix} \tag{8.19}$$

とおいた。マトリクス $\boldsymbol{W}_{\mathrm{s}}$ は数値積分の重みを対角成分に並べたマトリクス，ベクトル $\boldsymbol{f}_{\mathrm{s}}$ は薄板振動場から加わる加振圧力，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{s}}$ は内部音場と外部音場の音圧差である。なお，$\boldsymbol{f}_{\mathrm{s}}$ は z 軸方向の分布がデルタ関数となる圧力である。

式 (8.11) は内部音場のマトリクス方程式 (6.71) に対応し，各マトリクスとベクトルは

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{in}} = \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2 + \boldsymbol{K}_3 \tag{8.20}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{in}} = \frac{1}{c^2} \mathrm{diag}(J) \boldsymbol{W} \tag{8.21}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{in}} = \boldsymbol{\phi}_n \tag{8.22}$$

である。マトリクス $\boldsymbol{W}_{\mathrm{in}}$ は数値積分の重みを対角成分に並べたマトリクス，ベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathrm{in}}^{(\mathrm{p})}$ と $\boldsymbol{v}_{\mathrm{in}}^{(\mathrm{s})}$ は薄板と円筒シェルの振動速度を表している。

最後の式 (8.12) は外部音場のマトリクス方程式 (7.17) である。各マトリクスとベクトルは

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{out}} = \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2 + \boldsymbol{K}_3 \tag{8.23}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{out}} = \frac{1}{c^2} \mathrm{diag}(J) \boldsymbol{W} \tag{8.24}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{out}} = \boldsymbol{\phi}_n \tag{8.25}$$

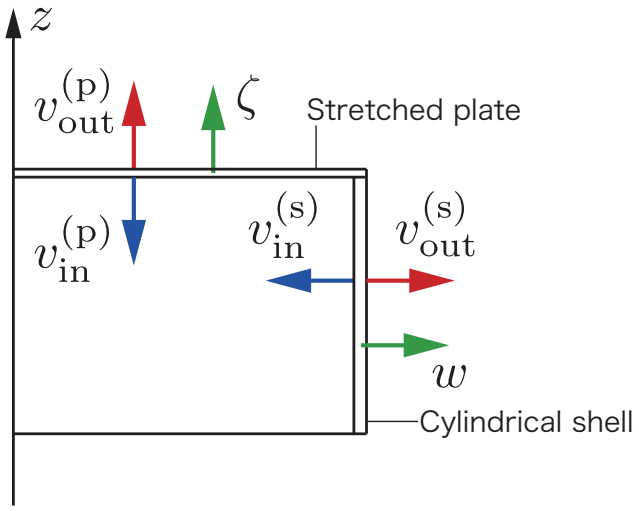


図 8.3: 振動変位と振動速度の正の向き

であり，マトリクス $\boldsymbol{W}_{\mathrm{out}}$ は数値積分の重みを対角成分に並べたマトリクス，ベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathrm{out}}^{(\mathrm{p})}$ と $\boldsymbol{v}_{\mathrm{out}}^{(\mathrm{s})}$ はそれぞれ薄板と円筒シェルの振動速度を表している。

薄板振動場と音場の連成

まず，張力を有する円形薄板振動場と音場の連成について考える。音場から薄板への作用を考えると，内部音場と外部音場の音圧差が薄板への加振圧力 p_{p} となるので，内部音場の速度ポテンシャルを ϕ_{in}，外部音場の音圧を ϕ_{out}，空気の密度を ρ とすると次のような関係が成り立つ。

$$p_{\mathrm{p}} = \rho\frac{\partial\phi_{\mathrm{in}}}{\partial t} - \rho\frac{\partial\phi_{\mathrm{out}}}{\partial t} = j\omega\rho\phi_{\mathrm{in}} - j\omega\rho\phi_{\mathrm{out}} \tag{8.26}$$

これを薄板上のすべての節点についてマトリクス方程式の形で

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{G}_{\mathrm{in}}\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{in}} - \boldsymbol{G}_{\mathrm{out}}\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{out}} \tag{8.27}$$

と表すことができる。ここで薄板の節点数を N_{p}，内部音場の節点数を N_{in}，外部音場の節点数を N_{out} とする。$\boldsymbol{G}_{\mathrm{in}}$ は N_{p} 行 N_{in} 列のマトリクスであり，薄板の i 番目の節点と内部音場の j 番目の節点を共有しているとすると，i 行 j 列に $j\omega\rho$ という成分をもち，それ以外は 0 となるマトリクスである。同じようにして $\boldsymbol{G}_{\mathrm{out}}$ は N_{p} 行 N_{out} 列のマトリクスであり，薄板の i 番目の節点と外部音場の j 番目の節点を共有していれば，i 行 j 列に $j\omega\rho$ という成分がはいる。

次に，薄板は音場に対して振動速度境界として作用すると考えることができる。薄板の振動変位を ζ，境界における法線ベクトルの向きを領域の内向きと定め，内部音場における薄板の振動速度を $v_{\mathrm{in}}^{(\mathrm{p})}$，外部音場における薄板の振動速度を $v_{\mathrm{out}}^{(\mathrm{p})}$ とすると，振動変位と振動速度のベクトルの正の向きは図 8.3 のように定義でき，次の関係が成り立つ。

$$v_{\mathrm{in}}^{(\mathrm{p})} = -\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -j\omega\zeta \tag{8.28a}$$

$$v_{\mathrm{out}}^{(\mathrm{p})} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} = j\omega\zeta \tag{8.28b}$$

これらをベクトルで表すと

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{in}}^{(\mathrm{p})} = -\boldsymbol{P}_{\mathrm{in}}\boldsymbol{\zeta} \tag{8.29a}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{out}}^{(\mathrm{p})} = \boldsymbol{P}_{\mathrm{out}}\boldsymbol{\zeta} \tag{8.29b}$$

と書ける。$\boldsymbol{P}_{\mathrm{in}}$ は N_{in} 行 N_{p} 列のマトリクス，$\boldsymbol{P}_{\mathrm{out}}$ は N_{out} 行 N_{p} 列のマトリクスである。内部音場の i 番目の節点と薄板の j 番目の節点を共有していれば，$\boldsymbol{P}_{\mathrm{in}}$ の i 行 j 列に $j\omega$ という成分がはいる。それ以外の成分は 0 である。同じようにして，外部音場の i 番目の節点と薄板の j 番目の節点を共有していれば，$\boldsymbol{P}_{\mathrm{out}}$ は i 行 j 列に $j\omega$ という成分をもつ。

シェル振動場と音場の連成

次に，薄板振動場と音場の連成と同じような要領でシェル振動場と音場を連成する。音場からシェル振動場への作用を考えると，内部音場と外部音場の音圧差がシェル振動場への加振圧力 p_{s} として働くので，

$$p_{\mathrm{s}} = \rho\frac{\partial\phi_{\mathrm{in}}}{\partial t} - \rho\frac{\partial\phi_{\mathrm{out}}}{\partial t} = j\omega\rho\phi_{\mathrm{in}} - j\omega\rho\phi_{\mathrm{out}} \tag{8.30}$$

という条件が成り立つ。シェル振動場のすべての節点について書き並べると次の形のマトリクス方程式になる。

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{in}}\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{in}} - \boldsymbol{H}_{\mathrm{out}}\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{out}} \tag{8.31}$$

シェル振動場の節点数を N_{s} とすると，シェル振動場の方程式の数は $3N_{\mathrm{s}}+2$ であることに注意して，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{in}}$ は $3N_{\mathrm{s}}+2$ 行 N_{in} 列のマトリクス，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{out}}$ は $3N_{\mathrm{s}}+2$ 行 N_{out} 列のマトリクスである。シェル振動場の i 番目の節点と内部音場の j 番目の節点を共有しているとすると，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{in}}$ は $2N_{\mathrm{s}}+1+i$ 行 j 列の成分が $j\omega\rho$，それ以外の成分は 0 となるマトリクス，同じようにシェル振動場の i 番目の節点と外部音場の j 番目の節点を共有しているとすると，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{out}}$ は $2N_{\mathrm{s}}+1+i$ 行 j 列の成分が $j\omega\rho$，それ以外の成分は 0 となるマトリクスである。

シェル振動場から音場への作用は，シェル振動場が音場に対して振動速度境界として働くと考えられる。シェル振動場の法線方向の変位を w，内部音場と外部音場におけるシェル振動場の振動速度をそれぞれ $v_{\mathrm{in}}^{(\mathrm{s})}$，$v_{\mathrm{out}}^{(\mathrm{s})}$ とすると，

$$v_{\mathrm{in}}^{(\mathrm{s})} = -\frac{\partial w}{\partial t} = -j\omega w \tag{8.32a}$$

$$v_{\mathrm{out}}^{(\mathrm{s})} = \frac{\partial w}{\partial t} = j\omega w \tag{8.32b}$$

という条件が成り立つ。ベクトルを使ってシェル振動場のすべての節点について書き並べると，

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{in}}^{(\mathrm{s})} = -\boldsymbol{Q}_{\mathrm{in}}\boldsymbol{d} \tag{8.33a}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{out}}^{(\mathrm{s})} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{out}}\boldsymbol{d} \tag{8.33b}$$

と書くことができる。ここで $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{in}}$ と $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{out}}$ はそれぞれ N_{in} 行 $3N_{\mathrm{s}}+2$ 列のマトリクスと N_{out} 行 $3N_{\mathrm{s}}+2$ 列のマトリクスであり，内部音場の i 番目の節点とシェル振動場の j 番目の節点を共有していれば $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{in}}$ の i 行 $2N_{\mathrm{s}}+1+j$ 列の成分が $j\omega$，外部音場の i 番目の節点とシェル振動場の j 番目の節点を共有していれば，$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{out}}$ の i 行 $2N_{\mathrm{s}}+1+j$ 列の成分が $j\omega$ となる。それ以外の成分は 0 である。

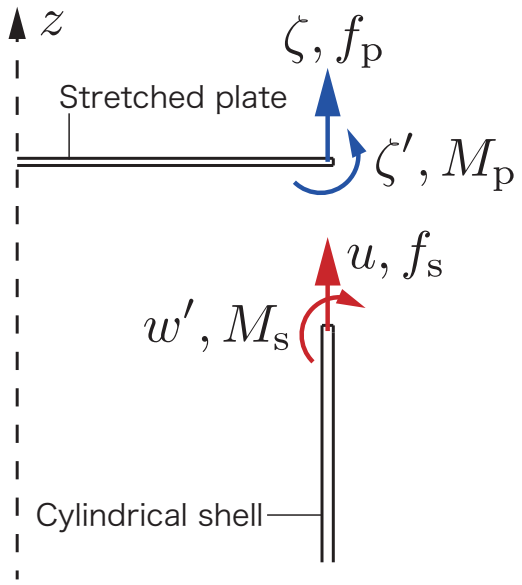


図 8.4: 薄板とシェルの変位，回転，せん断力，曲げモーメントの正の向き

薄板振動場とシェル振動場の連成

最後に薄板振動場とシェル振動場の連成条件を立てる。薄板とシェルの変位，回転，せん断力，曲げモーメントの向きは図 8.4 に示すように定義するものとする。薄板とシェルが連成している節点では，薄板の変位 ζ と円筒シェルの経線方向の変位 u，薄板の回転角 ζ' と円筒シェルの回転角 w' が等しくなるので次の条件が成り立つ。

$$\zeta = u \tag{8.34a}$$
$$\zeta' = -w' \tag{8.34b}$$

上式はベクトルを使って

$$\boldsymbol{T}_\mathrm{p}\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{T}_\mathrm{s}\boldsymbol{d} \tag{8.35}$$

と表すことができる。$\boldsymbol{T}_\mathrm{p}$ と $\boldsymbol{T}_\mathrm{s}$ は薄板と円筒シェルの共有している節点の変位と回転角を取り出すマトリクスである。

また，シェルから薄板に加わる力 f_p と薄板からシェルに加わる力 f_s，およびシェルから薄板に加わる曲げモーメント M_p と薄板からシェルに加わる曲げモーメント M_s の間には作用反作用の関係があるため，

$$f_\mathrm{p} + f_\mathrm{s} = 0 \tag{8.36a}$$
$$M_\mathrm{p} - M_\mathrm{s} = 0 \tag{8.36b}$$

が成り立つ。これより薄板とシェルへの加振圧力ベクトル $\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}$ と $\boldsymbol{f}_{\mathrm{s}}$ は $\boldsymbol{T}_{\mathrm{p}}$ と $\boldsymbol{T}_{\mathrm{s}}$ を用いて

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}} = -\boldsymbol{T}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} f_{\mathrm{s}} \\ M_{\mathrm{s}} \end{Bmatrix} = -\boldsymbol{T}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} \tag{8.37a}$$

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} f_{\mathrm{s}} \\ M_{\mathrm{s}} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} \tag{8.37b}$$

と表される。ここで，$\boldsymbol{\lambda} = \{f_{\mathrm{s}}\ M_{\mathrm{s}}\}^{\mathrm{T}}$ とおいた。

薄板振動場，シェル振動場，音場の連立方程式

ここまで立ててきた連成条件 (8.27)，(8.29a)，(8.29b)，(8.31)，(8.33a)，(8.33b)，(8.37a)，(8.37b) を式 (8.9)，(8.10)，(8.11)，(8.12) に代入し，薄板とシェルの束縛条件式 (8.35) とともに書き並べると，

$$\left[\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\mathrm{p}}\right] \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{T}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{G}_{\mathrm{in}} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{in}} - \boldsymbol{G}_{\mathrm{out}} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{out}} \tag{8.38}$$

$$\left[\boldsymbol{K}_{\mathrm{s}} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}\right] \boldsymbol{d} = \boldsymbol{W}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{T}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{W}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{H}_{\mathrm{in}} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{in}} - \boldsymbol{W}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{H}_{\mathrm{out}} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{out}} \tag{8.39}$$

$$\left[\boldsymbol{K}_{\mathrm{in}} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\mathrm{in}}\right] \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{in}} = -\boldsymbol{W}_{\mathrm{in}} \boldsymbol{P}_{\mathrm{in}} \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{W}_{\mathrm{in}} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{in}} \boldsymbol{d} \tag{8.40}$$

$$\left[\boldsymbol{K}_{\mathrm{out}} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\mathrm{out}} - \boldsymbol{B}\right] \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{out}} = \boldsymbol{W}_{\mathrm{out}} \boldsymbol{P}_{\mathrm{out}} \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{W}_{\mathrm{out}} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{out}} \boldsymbol{d} \tag{8.41}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{d} \tag{8.42}$$

となり，さらに未知数を左辺に移項し，すべての方程式をマトリクス方程式の形で書くと，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\mathrm{p}} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\mathrm{p}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{T}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{G}_{\mathrm{in}} & \boldsymbol{G}_{\mathrm{out}} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{s}} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}} & -\boldsymbol{W}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{T}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{W}_{\mathrm{in}} \boldsymbol{H}_{\mathrm{in}} & \boldsymbol{W}_{\mathrm{out}} \boldsymbol{H}_{\mathrm{out}} \\ \boldsymbol{T}_{\mathrm{p}} & -\boldsymbol{T}_{\mathrm{s}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{W}_{\mathrm{in}} \boldsymbol{P}_{\mathrm{in}} & \boldsymbol{W}_{\mathrm{in}} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{in}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{in}} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\mathrm{in}} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{W}_{\mathrm{out}} \boldsymbol{P}_{\mathrm{out}} & -\boldsymbol{W}_{\mathrm{out}} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{out}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{out}} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\mathrm{out}} - \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\zeta} \\ \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{in}} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{out}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{8.43}$$

が得られる。これが薄板振動場，シェル振動場，内部および外部音場を連成した方程式である。薄板振動場への加振圧力 $\boldsymbol{f}$ を与えて上式を解けば，薄板振動場，シェル振動場の振動変位，そして内部，外部音場の速度ポテンシャルが同時に得られる。

8.2 数値計算例

8.2.1 ティンパニの計算例

ここでは前節で提案した連成解析手法の妥当性を検証する。まず，図 8.5 に示すようなティンパニのヘッドの点 S を加振したときの受音点 R1，R2，R3 における周波数応答関数を，本章で提案した手法と第 3 章で提案した手法により計算し，比較する。本論文で提案した二つの連成解析手法を区別するため，以下では本章で提案した手法を Coupled NGM，第 3 章で提案した手法を Coupled BEM と呼ぶこととする。膜振動場の張力は 6200 N/m，面密度は 0.26 kg/m^2 とし，Coupled BEM と条件を合わせるため，曲げ剛性については 0 とした。Coupled BEM における理論解析解の打ち切り次数はフーリエ級数，ベッセル級数ともに 10 次，Coupled NGM における外部音場の仮想境界の半径は 0.5 m とし，フーリエ級

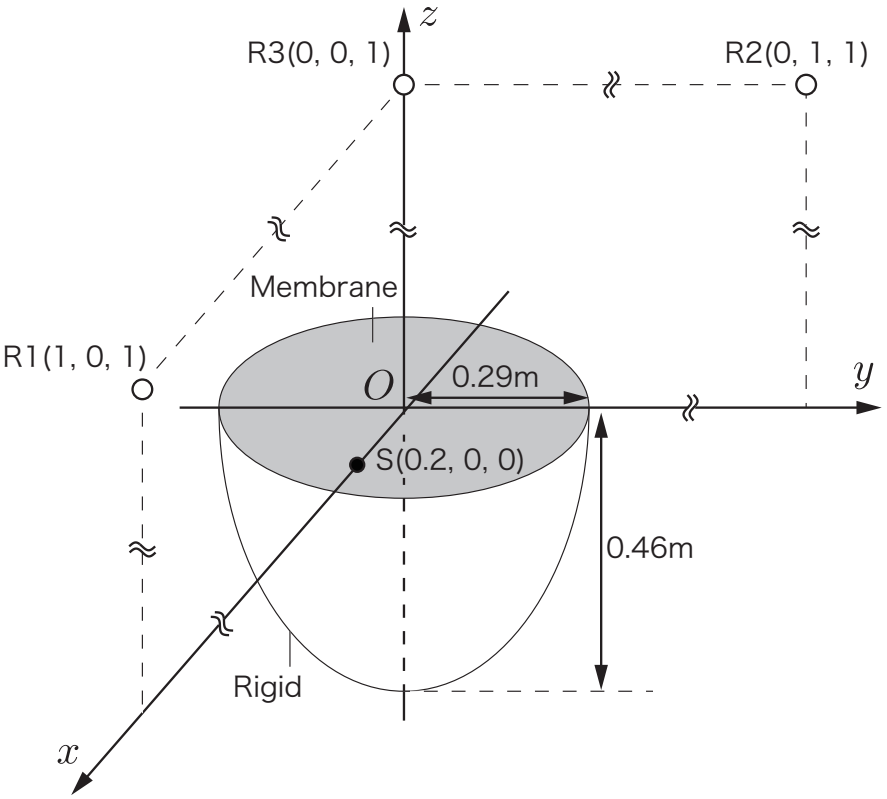


図 8.5: 計算したティンパニの加振点と受音点の配置

数，ルジャンドル級数の打ち切り次数はともに 10 次とした。Coupled NGM の自由度は 310 とし，このときの格子点を図 8.6 に示しておく。Coupled BEM は膜振動場の 500 Hz の波長に対して要素寸法比が約 0.2 となるように 576 個の要素に分割した。BEM は要素寸法比が波長の 1/5 以下となるように設定することが推奨されており [47]，それより高い周波数では十分な精度は保てないものと予想される。なお，参照解には膜振動場の 1000 Hz の波長に対して要素寸法比が約 0.2 となるように 2226 個の要素に分割した Coupled BEM を用いた。

二つの手法で計算した各受音点における周波数応答関数を図 8.7 から 8.9 に示す。Coupled BEM は波長に対する要素寸法比が 1/5 より大きくなる 500 Hz あたりから参照解との誤差を生じていることが分かる。それに対して Coupled NGM はそれよりも少ない自由度でありながら高い周波数まで参照解との一致が見られる。

受音点ごとに見ていくと，Coupled BEM には見られるが Coupled NGM には見られないピークがいくつかあることが分かる。例えば，受音点 R2 における 432 Hz に二つの Coupled BEM では小さなピークがあるが，Coupled NGM ではそれがない。膜の円周方向のモードの次数を n，半径方向のモードの次数を m として，それらの組み合わせを (n, m) と書くとすると，この 432 Hz は (3, 1) モードに相当し，図 8.5 の y 軸を節線の一つとして線対称な振動モードである。そのため，この節線上にある受音点 R2 では振動変位や音圧が極小となる。これは (1, 1) モードについても同様であり，受音点 R1 の 219 Hz にあるピークが受音点 R2 ではいずれの計算結果においても見られない。Coupled BEM は非対称に分割され

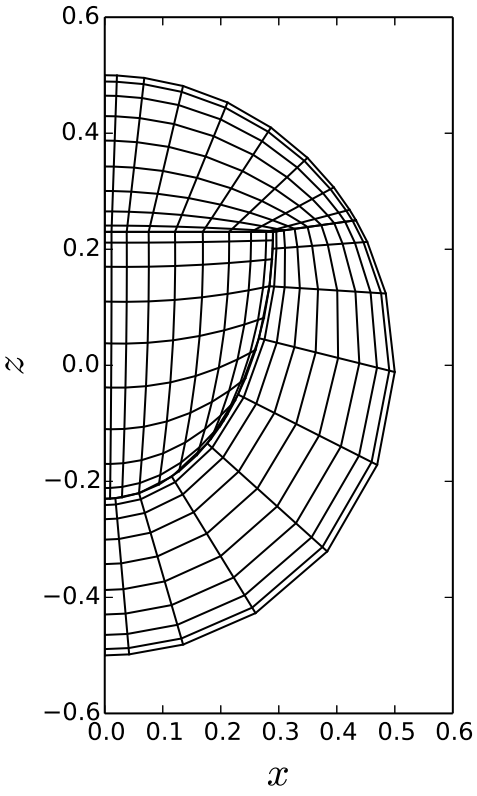


図 8.6: Coupled NGM に用いた解析領域内の格子点

た要素を用いており，(1, 1) モードでは波長が十分に長く，影響しなかったが，(3, 1) モードはこの非対称に分割された要素によって厳密に対称な振動にならず，音圧が極小になっていないと考えられる。それに対して，Coupled NGM は円周方向をフーリエ級数展開しているため，この節線上では理論的に振動変位や音圧が 0 となる。また，受音点 R3 は軸上の点であり，この点では軸対称モードしか観測されないはずである。実際に受音点 R1 や R2 で観測されているほとんどの非軸対称モードのピークが受音点 R3 では見られない。しかし，R3 において Coupled BEM のみ (4, 1) モードに相当する 533Hz にピークが見られる。これについても BEM の非対称な要素分割が影響しているものと考えられる。

これらのピークが非対称な要素分割による影響であるとすれば，より細かく要素分割して計算精度を改善することでこれらのピークは各モードの節において観測されなくなると予想される。そこで，このことについてより詳細に調べるため，Coupled BEM の要素数を変化させながら周波数応答関数を計算した。図 8.10 は Coupled BEM の要素数を 576，2226，4746 と変化させたときの受音点 R3 における 533 Hz 付近の周波数応答関数を示している。要素数を増やしていくとピークの大きさと幅が小さくなっていくことが分かる。つまり，このピークは要素分割の影響によって生じたものであると言える。

次に，周波数応答関数の計算に要した計算コストを表 8.1 にまとめる。計算時間は 1000/512 Hz おきに 512 taps の計算に要した時間を表している。計算環境と連立一次方程式の求解に用いた関数は次の通りである。

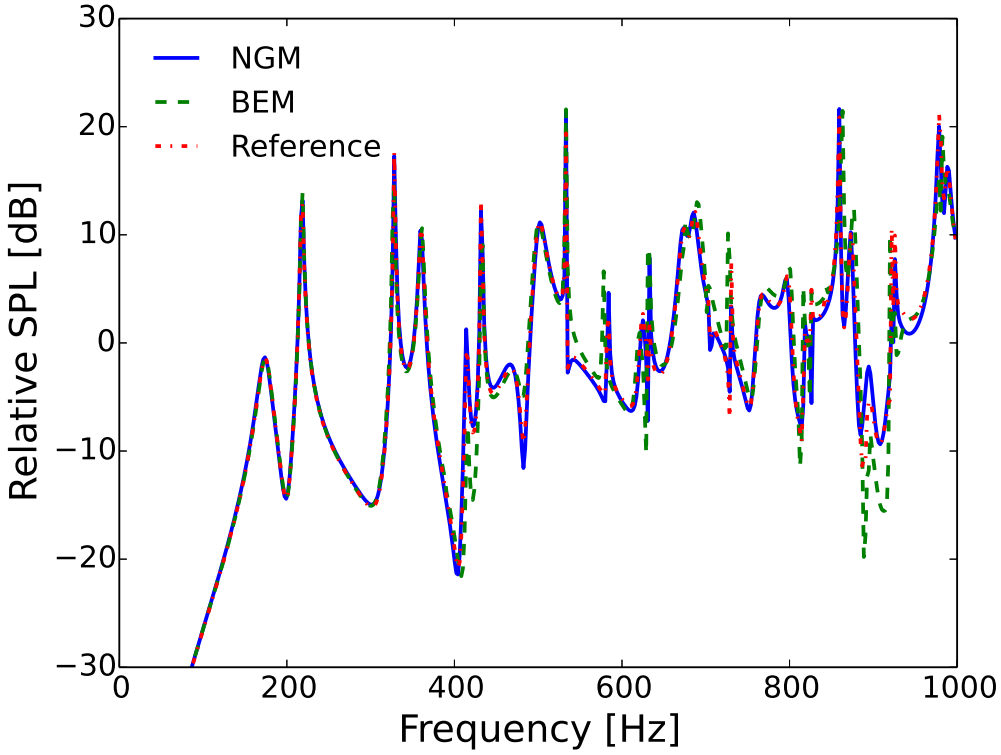


図 8.7: Coupled NGM と Coupled BEM により計算したティンパニの周波数応答関数 (受音点 R1)

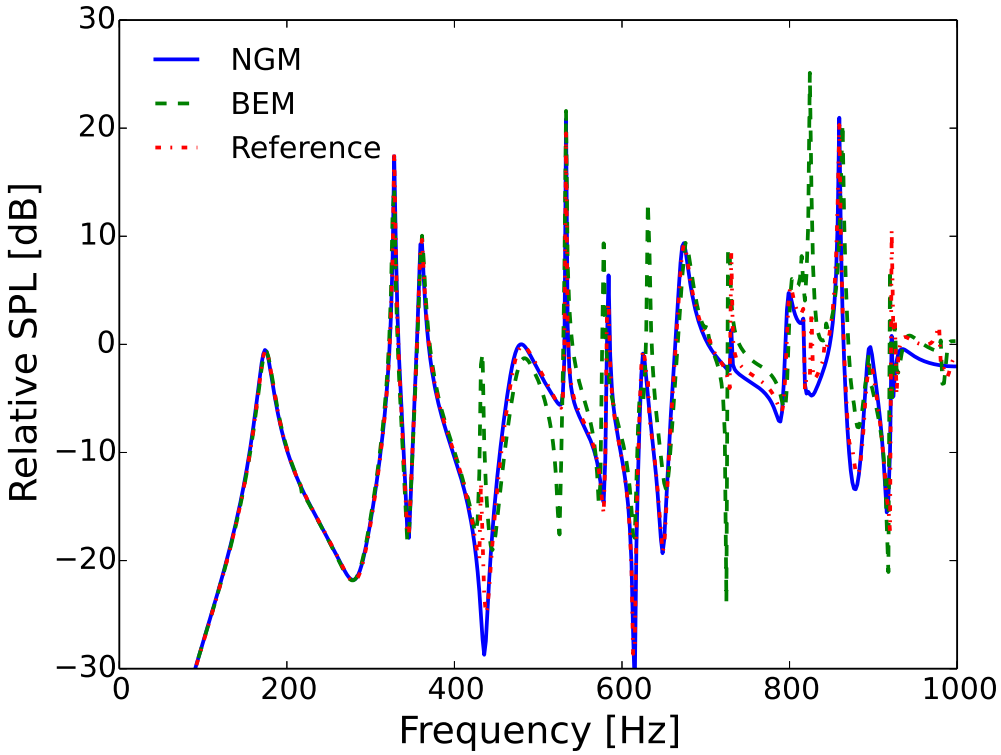


図 8.8: Coupled NGM と Coupled BEM により計算したティンパニの周波数応答関数 (受音点 R2)

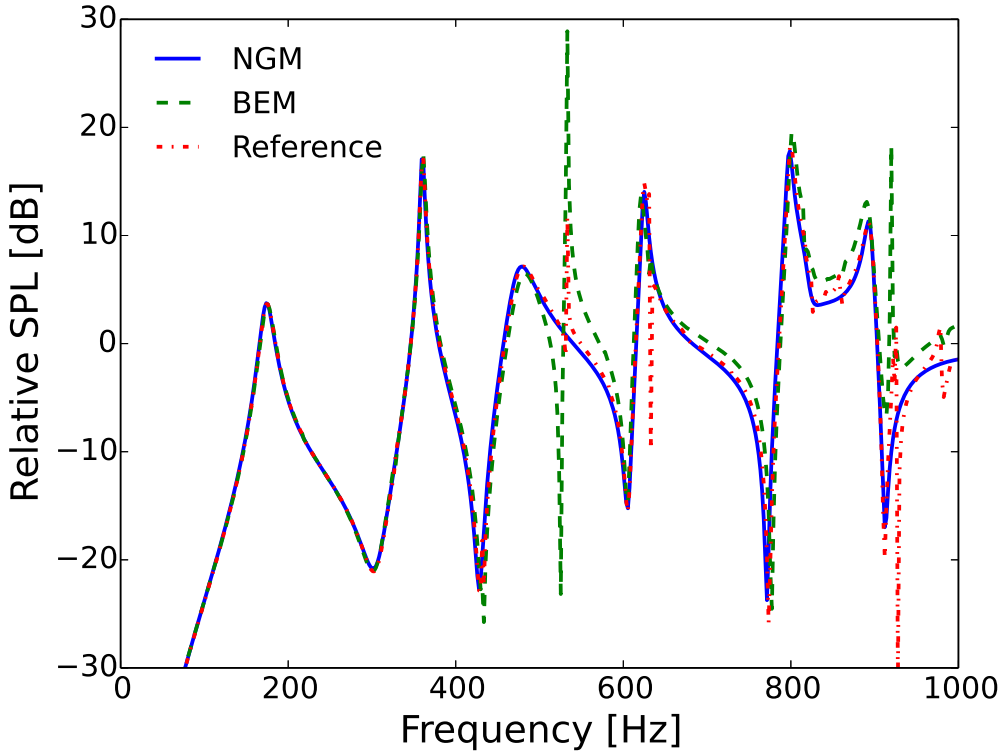


図 8.9: Coupled NGM と Coupled BEM により計算したティンパニの周波数応答関数 (受音点 R3)

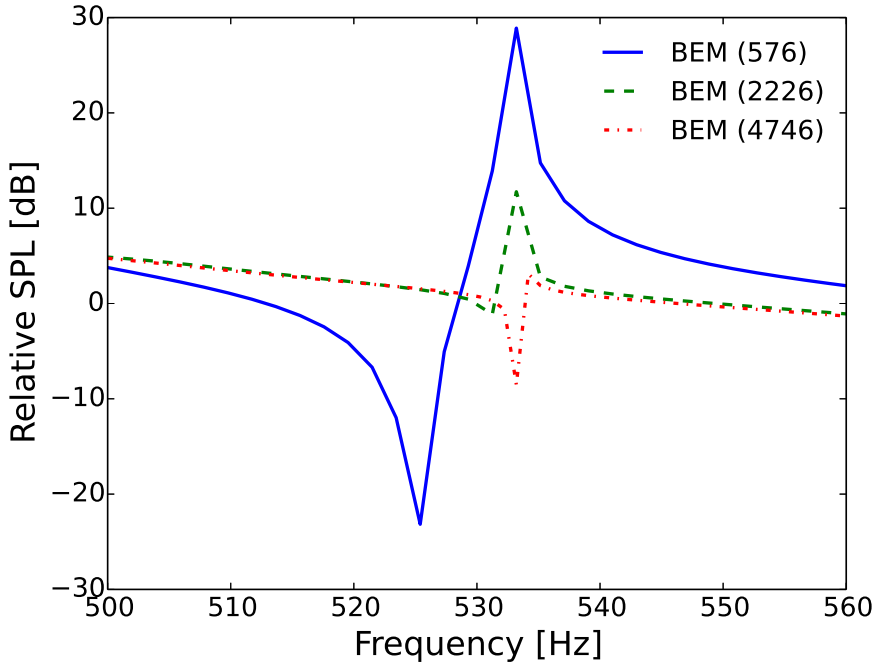


図 8.10: Coupled BEM の要素数を変化させて計算したティンパニの周波数応答関数 (受音点 R3)

表 8.1: 周波数応答関数の計算に要した各手法の計算コスト

	自由度	必要メモリ容量 [MB]	計算時間 [sec]
Coupled NGM	310	1.5	61
Coupled BEM	576	5.3	593
Coupled BEM with OpenMP	576	5.3	242

- CPU: Intel Xeon 3.30 GHz
- Memory: 64 GB
- Library: NAG C Library Mark 23
- Subroutine: nag_complex_gen_lin_solve

図 8.7 から 8.9 の周波数応答関数から分かるように Coupled BEM は高い周波数での精度を犠牲にしているにもかかわらず，Coupled NGM はその約 1/10 の時間で計算できている。同等の精度で比較すれば，より顕著な差があらわれる可能性もある。Coupled NGM は一度係数マトリクスを構築してしまえば，そのほとんどの成分を異なる周波数の係数マトリクスにも流用することができる。一方，Coupled BEM は周波数が変わるたびに要素内の積分の計算が必要となり，係数マトリクスの構築に計算時間がかかっている。この計算は並列計算プラットフォームである OpenMP を用いて簡単に並列化が可能であり，表 8.1 には OpenMP を用いて並列化した Coupled BEM の計算時間も記している。計算時間を並列化していない場合の半分以下に短縮できているが，Coupled NGM のほうが高速である。なお，Coupled NGM のマトリクス方程式 (8.43) の係数マトリクスのうち，連成の過程で構築したマトリクスの成分はほぼ 0 であり，係数マトリクス全体も疎行列と見なすことができる。従って，連立一次方程式の解法に疎行列向けの直接法や反復法を用いることでさらに高速化できる可能性がある。

8.3 まとめ

本章では，膜鳴楽器を構成する円形薄板振動場，円筒シェル振動場，内部および外部音場の連成解析手法を提案した。まず，薄板振動場および円筒シェル振動場と外部音場の間で節点を共有できるように，外部音場に領域分割を導入した。これにより構成要素間で節点を共有できるだけでなく，より複雑な形状の取り扱いも可能となった。次に各構成要素間の速度や力の関係から連成条件を立て，すべての要素を連成したマトリクス方程式を導出した。

本章で提案した手法 (Coupled NGM) と第 3 章で提案した手法 (Coupled BEM) でティンパニの周波数応答関数を計算したところ，Coupled NGM のほうが少ないメモリと計算時間で高精度の解を得られることが分かった。よって Coupled NGM の有効性を示すことができた。今回は Coupled BEM に有利な計算条件での比較であったため，厳密な比較を行うことで Coupled NGM がより優位になることも考えられる。

第 9 章

音響振動連成解析と計算知能による楽器の設計と創生への応用

本論文では膜鳴楽器を対象とし，その音響振動連成解析手法を構築してきた。本章では楽器の音響振動連成解析の応用として，進化計算などの計算知能と組み合わせた楽器の最適設計について述べる。これまで行われている楽器の最適設計に関する研究の課題について述べた後，その課題を解消する楽器の新たな設計フレームワークを提案する。

9.1 数値解析手法と計算知能による最適設計

現状の楽器の設計過程は形状や材質を変えながら試作，実験を繰り返し，人の主観や経験に基づいて試行錯誤的に最適化するというものである [54]。この実際の最適化の過程を計算知能 (Computational Intelligence: CI) と音響振動連成解析によって計算機上で自動化する試みも研究されている [54–58]。計算知能とは人工知能 (Artificial Intelligence: AI) の一種に分類され，複雑な最適化問題を解くためのアルゴリズムや手法が含まれる。代表的な手法としては進化計算やニューラルネットワークがあげられる。

数値解析手法と計算知能が積極的に応用されている例として建築における構造最適化問題がある [59]。その主なフローチャートは図 9.1 に示す通りである。まず初期形状を与えそれを有限要素解析する。次にその形状における目的関数を評価する。これは例えば構造体にかかる応力がどれくらい一様に分布しているかを定量的に評価する関数などである。そしてこの目的関数を小さくするように形状を変化させる。このときどのような手順で形状を変化させるかは利用するアルゴリズムによって異なる。変化させた形状に対して再び有限要素解析し，目的関数を評価する。目的関数を小さくするようにこれらの手順を繰り返し，目的関数が設定した目標値より小さくなれば終了し，その形状を最適な形状とする，という流れである。

数値解析手法と計算知能を用いた最適設計を楽器に応用する研究もされている。基本的な最適化のフローチャートは図 9.1 と同じであるが，楽器の場合にはピッチ感を特に重要視するため，目的関数として固有周波数比の誤差を選択することが多い。Henrique らはビブラフォンやマリンバのような音板打楽器の音板と共鳴管の固有周波数が最適な比となる形状を，FEM による固有値解析と進化計算のアルゴリズムの一つである焼きなまし法を用いて探索し，その有効性を示した [54–56]。さらに計算知能による最適

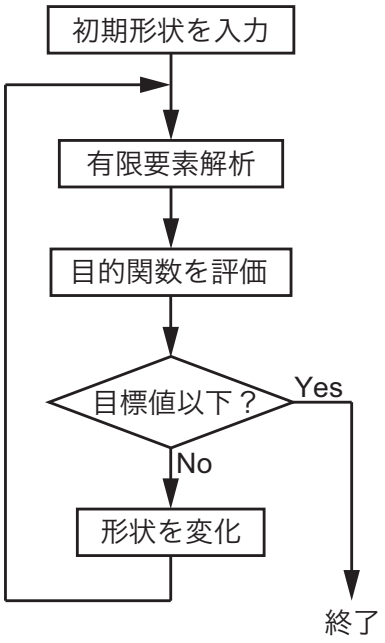


図 9.1: 計算知能による構造最適化のフローチャート

設計の利点は，従来とは異なる，新しい音色をもった楽器を開発できる可能性を秘めているということだと強調している。また，Petrolito and Legge も同じく音板の最適形状を求めた [57, 58]。彼らは問題を制約付き最適化問題と見なし，固有周波数を目的関数ではなく，より拘束の強い制約に組み込んで最適化した。その結果，従来の形状からは思いつかないような形状も得られている。

9.2　対話型進化計算による楽器の最適設計フレームワークの提案

前節で述べた計算知能による楽器の最適設計における目的関数は，固有周波数のみに着目して設定されている。固有周波数は楽器のピッチを決める重要な特徴量ではあるが，限定的な情報しか含んでおらず，より詳細な楽器の振動特性まで説明することはできない。楽器の音色という観点で最適化するためには，周波数応答や時間応答，楽器の本質とも言われる非線形性などより詳細な情報に基づく最適化が必要になる。また，これまでの先行研究は音場との連成についても考慮されていない。音板打楽器の場合には音源となる音板は固く，音場との連成による影響は小さいと考えられるが，膜鳴楽器の場合には音場との連成によってヘッドの固有周波数が大きく変化する。そのため，構造体の固有周波数のみの最適化では十分ではないと言える。しかし，放射音の周波数応答や時間応答は，計算負荷が大きい連立一次方程式の求解を周波数応答や時間応答のタップ数だけ必要とするため，固有周波数の数百倍から数万倍の計算時間がかかる。そのため，反復計算が必要な最適設計においては現実的ではなかった。

この点について，本論文では計算時間とメモリともに効率的な膜鳴楽器の音響振動連成解析手法を構築してきた。本論文では周波数領域で定式化してきたが，スペクトル法は時間方向の微分を差分で置き換え，変数を逐次更新していく時間積分法を用いることにより，計算時間をさらに大きく短縮できると見込んでいる。時間積分法の中でも連立方程式の求解が不要な方法は陽解法と呼ばれ，質量マトリクスが対角

マトリクスであれば陽解法での定式化が可能である。スペクトル法における質量マトリクスは時間の 2 階微分に関する項，つまり ω^2 がかかるマトリクスであり，これまでの定式化を見ると分かる通り，質量マトリクスは対角マトリクスとなっている。そのため，時間領域陽解法で定式化することで計算時間を大きく短縮することができ，評価に時間応答や周波数応答を用いた最適設計もより現実的なものになると考えられる。

また，計算知能のみによる最適設計には，人間による従来の設計方法のような主観評価が含まれていない。最終的に完成した楽器を実際に演奏しその音色を聴くのは計算知能ではなく人間であるため，計算知能のみによる設計プロセスは合理的であるとは言えない。人間の要求する音色に近づけるためには，目的関数を定量的に評価するのではなく，人間による主観評価が必要である。

このような人間の主観評価を取り入れた計算知能の手法として対話型進化計算が提案されており，CG の画像生成やライティング，工業製品のデザイン，音楽のメロディー生成，音声処理，聴覚補償など，デザインや工学をはじめとした様々な分野で応用されている [60]。対話型進化計算は従来の進化計算における目的関数の評価を人間による主観評価で置き換えた手法である。そのため，目的関数として定量的に表しにくい人間の感性を取り入れることが可能である。

この方法は楽器の設計にももちろん応用できる。主観評価の際には楽器の音を数値計算によって合成し，再生することになる。将来的に楽器の音響合成がリアルタイム実行できることを見据えて，本論文の最後に対話型進化計算を用いた楽器の最適設計を提案したい。

対話型進化計算のアルゴリズムとしては，Takagi and Pallez によって提案された対比較ベース対話型差分進化 [61] を用いるのがよいと考える。対話型進化計算は反復を苦にしない計算機ではなく，ユーザーに何度も評価を要求するため，ユーザーの疲労が一番の問題として指摘されている。この問題を軽減する手法として提案されたのが対比較ベース対話型差分進化である。また，最適解への収束が速いことと一試行の比較対象が二つだけであることから，特に音や映像のように同時評価が困難な対象に有効であるとされている。

対比較ベース対話型差分進化を用いた場合の楽器設計は次のような流れで行う。ここで，楽器の形状を表す長さや曲率，また張力やヤング率といった物性値などのパラメータをならべたものを差分進化におけるベクトルとする。

1. 初期形状，物性値を設定し，目標ベクトルとする。
2. 目標ベクトルをもとに比較参照ベクトルを生成する。
3. 数値計算により，目標ベクトルと比較参照ベクトルをパラメータとしてもつ楽器の音を合成する。
4. 合成された音色をユーザーが一対比較する。
5. 良いと判断されたベクトルを新たな目標ベクトルとする。
6. 2. から 5. を所望の音色が得られる，もしくは指定した回数まで繰り返す。

ユーザーは提示された二つの音のどちらが良いかを判断するだけで，楽器の形状や材質は差分進化のアルゴリズムに沿って最適化されていくことになる。

9.3 まとめ

計算知能を応用した設計のメリットは，実際に楽器を試作せずとも所望の特性を実現するために最適な形状や材質を計算機上で探索することが可能であるということである。人間による従来の設計では，実際に楽器を作り，試奏して初めてその楽器の音色が分かった。つまり，楽器の形状や材質が音色に先行するものであったとも言える。本章で提案した設計プロセスによる楽器の設計が可能になれば，人間は純粋に音色だけを評価し，計算知能が形状や材質を最適化していくことになる。その結果完成した楽器はこれまで想像できなかったような形状や材質になっていたり，さらには既成概念にとらわれない全く新しい楽器の創生にもつながると考えられる。

第 10 章

総括

楽器の音響振動場解析は，楽器のメカニズムの解明という音響学的研究，それを活かした設計，また電子音楽などに用いられる音響合成といったシーンにおいて重要な技術であり，解析手法の高精度化，効率化はそれらの発展に大きく寄与するものである。本論文は膜鳴楽器を対象とし，その厳密，高精度かつ効率的な解析手法の提案，そして提案手法による膜鳴楽器の設計を目的とし，それらの有効性について論じてきた。最後にそれらの成果についてまとめ，今後の課題および展望について述べる。

10.1 本論文のまとめ

各章の成果について以下にまとめる。

第 3 章

第 3 章では膜振動場の理論解析解と音場の法線方向微分型境界要素法 (BEM) を用いた解析手法を提案した。膜鳴楽器は薄い構造体から構成されるため，法線方向微分型 BEM を用いることで要素数を大きく削減することができ，外部音場についても多くの先行研究のように近似することなく厳密に取り扱うことができる。膜振動場については理論解析解を用いることによって，BEM のマトリクス方程式に新たに未知数を加えることなく膜振動場と音場の連成解析を可能にした。提案手法によって計算したティンパニの周波数応答関数は実測した周波数応答関数とよく一致し，膜鳴楽器の解析手法としての妥当性を確認した。

また，提案手法によるティンパニの設計例を示した。固有周波数比と整数比の誤差を評価関数として定義し，それを小さくするヘッドの張力，面密度，ケトルの形状，容積について調べた。その結果，それらのパラメータは独立に最適値があるわけではなく，相互依存性があると考えられるという重要な知見をはじめとして，いくつかの設計指針を得ることができた。このことより，音響振動連成解析に基づく楽器設計の可能性を示すことができたとも言える。

第 4 章

第 3 章で提案した解析手法はヘッドの曲げ剛性を考慮しておらず，しなやかな膜として扱ったが，膜鳴楽器に実際に張られているヘッドは曲げに対する剛性を有している。しかし，曲げ剛性を有する円形膜，もしくは張力を有する円形薄板は，第 3 章で用いたような理論解析解を導出することができない。そこで第 4 章では高精度な数値解析手法であるスペクトル法による張力を有する円形薄板振動場の解析手法を提案した。円周方向については周期性を利用し，フーリエ級数展開することで離散化することなく解析することを可能にした。円形薄板振動場の支配方程式は 4 階微分方程式であるため，境界の節点において二つの境界条件を同時に満たすように内挿関数の形を工夫した。このとき，フーリエ級数展開の次数によって内挿関数の形に注意を要することについても述べた。

固有値問題や強制振動問題を解いて提案手法の妥当性を示すとともに，有限要素法 (FEM) よりも少ない自由度で高精度の数値解を得られることを示した。また，円周方向にも離散化する従来のスペクトル法に対しても，提案手法が演算量で優れていることを示した。

第 5 章

第 5 章ではドラムに見られるような円筒シェル振動場の解析手法を提案した。用いた解析手法としては第 4 章と同じくスペクトル法とフーリエ級数展開である。シェル振動場の支配方程式も薄板振動場と同じく 4 階微分方程式であるため，境界において二つの境界条件が必要となる。第 4 章で用いた方法では解くことができる境界条件が限られてしまうため，第 5 章では汎用的な方法として Hermite 補間型微分マトリクスを用いる方法を提案した。また，スペクトル法の種類としては Spectral Collocation Method (SCM) と併せて Spectral Nodal Galerkin Method (NGM) についても定式化した。NGM の利点としては係数マトリクスが対称となることや自然境界条件を複雑な操作なく与えられるといった点があげられる。

数値実験を通して，提案した SCM と NGM ともに FEM よりも高精度，高速，省メモリであることを確認した。また，SCM と NGM を比較すると，SCM は自由度が大きくなると正しい解が得られなくなるが，NGM のほうはより安定して正しい解を得ることができた。

第 6 章

膜鳴楽器の内部音場に相当する軸対称空洞内の音場解析手法を提案した。スペクトル法を軸対称空洞の解析に適用した場合，そのままでは整形な円筒形空洞しか解析できないが，ティンパニの内部音場のようなより一般的な軸対称空洞についても解析できるよう，一般曲線座標系を導入した。四つの境界を一般曲線座標系を用いて定義し，領域内の物理座標や解析に必要なメトリックについては Transfinite 補間により求めた。

提案手法は FEM よりも自由度を少なくすることはできた。しかし，第 4 章，第 5 章と違い，二次元の問題であるため，連立一次方程式の解法に直接法を用いた場合，係数マトリクスを格納するのに必要なメモリ容量は疎行列を係数マトリクスとする FEM よりも多くなってしまった。この問題に対する解決策は

連立一次方程式の解法に反復法を用いることである。スペクトル法の係数マトリクスは疎行列に分解することができ，マトリクスとベクトルの積を繰り返して解を求める反復法は，スペクトル法のこの特性を活かすことができる。反復法で直接法と同等の精度の解を得られると仮定した場合のメモリ容量は，FEM よりも少なくできることを示した。スペクトル法に反復法を適用した場合の各種アルゴリズムの収束性や安定性については今後検証が必要である。

第 7 章

膜鳴楽器の外部音場である軸対称形状・開領域音場の解析手法を提案した。スペクトル法は領域型の解法であるため，開領域に適用する場合，有限な領域で打ち切って何らかの境界条件を与えなければならない。このとき不適当な境界条件を与えてしまうと，仮想境界からの疑似反射を生じてしまう。そこで球面からの放射音場の理論解析解と連成する DtN 写像を境界条件として適用することで，開領域を厳密に解析できるようにした。

DtN 写像は無限級数の形で表されるが，数値計算上は有限な次数で打ち切らなければならない。この打ち切り次数と精度について検証したところ，打ち切り次数を大きくしていくと誤差はいったん収束するが，大きくしすぎると精度が悪化するということが分かった。これは数値積分の誤差に起因するものであり，節点数を大きくすることで改善できた。このことから打ち切り次数は節点数を考慮した上で決める必要がある。最適な打ち切り次数の算出が今後の課題である。

開領域音場解析を得意とする BEM と比較したところ，マトリクスの自由度については境界のみの離散化でよい BEM に及ばなかった。しかし，係数マトリクスの格納に必要なメモリ容量については，反復法を用いることで密行列を係数マトリクスとする BEM とほぼ同等に削減することができることを示した。また，BEM では特定の周波数において解の非一意性の問題を生じるが，提案手法ではそれが生じないことを確認した。

第 8 章

第 4 章から第 7 章で提案してきた各振動場および音場の連成解析手法を提案した。連成の過程で円形薄板振動場および円筒シェル振動場と外部音場の間で節点を共有できるように，外部音場に領域分割を導入した。構成要素間に速度と力に関する連成条件を立て，音響振動連成場としてのマトリクス方程式を導出した。

新たに提案した連成解析手法は，第 3 章で提案した膜振動場の理論解析解と音場の法線方向微分型境界要素法を用いた連成解析手法よりも少ないメモリと計算時間で高精度の計算が可能であることを示した。

第 9 章

楽器の音響振動連成解析の応用として，進化計算などに代表される計算知能と組み合わせた設計および創生への展望について述べた。現状の楽器設計はまだトライアンドエラーによるところが大きい。一方で計算知能を用いた楽器の最適設計も試みられてきているが，その設計指針に人間の主観評価は含まれていない。そこで対話型進化計算を用いた楽器の最適設計フレームワークを提案した。対話型進化計算により

表 10.1: (再掲) 理論解析解，スペクトル法，FEM の比較 (◎:非常に有効，○:有効，△:有効ではない，×:適用不可)

	理論解析解	スペクトル法		FEM
		Modal	Nodal	
計算精度	◎	○	○	△
計算負荷	◎	○	○	△
複雑な支配方程式	×	△	◎	◎
複雑な境界条件	×	△	○	◎
複雑な形状	×	×	△	◎

評価に人間の主観評価を取り入れることができ，最適化自体は進化計算のアルゴリズムに則って行われる。その結果，これまで想像もできなかった新しい形の楽器を設計，創生できる可能性もある。

本論文では，スペクトル法という数値解析手法を一本の大きな柱とし，その一つの応用として膜鳴楽器の解析手法を構築した。スペクトル法とその他の解析手法との比較については第 1 章でも述べたが，各手法の性質をまとめた表を表 10.1 に再掲しておく。

膜鳴楽器に限らず，音響振動場解析において広く用いられている FEM などの数値解析手法は，形状や境界条件に対する汎用性は高い。しかし，大規模な問題や高い周波数において十分な精度の数値解を得るためには，大きい計算負荷が要求される。この欠点については膨大な計算機資源や高級なハードウェアを投入することである程度カバーされてはいるが，現時点ではそれでもなお広範囲の周波数帯域やリアルタイムでの計算は現実的ではない。また，たとえ計算機の性能がさらに向上しても表 10.1 の相対的な関係は変わるものではなく，それぞれの計算手法の欠点を他の手法と同等に近付ける，もしくはそれ以上に向上させる試みも音響振動場解析という一分野の発展には重要であると考える。実際に，高次の内挿関数を用いた FDM や FEM の高精度化，効率化に関する研究も行われており [6,31]，スペクトル法の思想がその他の数値解析手法に反映されているとも言える。

一方，スペクトル法は FEM などに比べて形状や境界条件に対する制約はあるものの，小さい計算負荷で高精度の数値解を得られる。そこで本論文ではスペクトル法の利点を保持しながら，形状や境界条件に対する汎用性を向上させるというアプローチをとった。表 10.1 でいえば，現状○となっている部分を◎に，△となっている部分を○，可能ならば◎にしようという試みである。具体的には，高階の微分方程式において複数の境界条件を与えるための Hermite 補間型微分マトリクス，不整形な領域を解析するための一般曲線座標系，開領域問題を厳密に解析するための DtN 写像，より複雑な形状を解析するための領域分割法といった技法の導入である。本論文では膜鳴楽器を対象としたが，これらの技法は同じような問題を有する様々な音響振動問題に応用可能である。今後，本論文を端緒として，多くの音響振動場解析にスペクトル法が応用されていくことを期待しつつ，著者自身スペクトル法のさらなる発展に努めたい。

10.2　今後の課題と展望

連立一次方程式の解法についての検討

本論文では連立一次方程式の解法に直接法を用いてきた。しかし，第 6 章でも示したように二次元以上の問題にスペクトル法を適用し，連立一次方程式の解法に直接法を用いた場合，係数マトリクスとして一つのマトリクスを構成しなければならないため，必要なメモリ容量および演算量が大きくなってしまう。この問題に対して有効なのが連立方程式の解法に反復法を用いることである。反復法では係数マトリクスと未知ベクトルの積さえ計算することができれば，係数マトリクスはどのような形で構成されていてもよい。二次元以上の問題にスペクトル法を適用した場合，係数マトリクスは疎行列に分解することができるため，反復法を利用することでメモリ容量と演算量を大きく削減することができる。

反復法は反復計算により近似解の誤差を小さくしていく解法であり，解の収束性や安定性はアルゴリズムや前処理，マトリクスの条件数に依存する。とくにスペクトル法における係数マトリクスの条件数は自由度とともに急激に増加する傾向にあるため，アルゴリズムと前処理の選択には十分な検討が必要である。

時間積分の適用

本論文では周波数領域で定式化し，単一周波数ごとに計算してきたが，時間微分を差分で置き換え，時間発展させていくことで時間領域での計算も可能である。このような手法は時間積分と呼ばれる。時間積分には連立方程式の求解が不要な陽解法と必要な陰解法があり，陽解法を用いることができれば演算量を大きく削減することができる。どちらの解法で定式化できるかは質量マトリクスの形によって決まり，質量マトリクスが対角マトリクスであれば陽解法での定式化が可能である。スペクトル法における質量マトリクスは周波数領域で ω^2 がかかるマトリクスであり，対角マトリクスとなっているため，陽解法で定式化することで連立方程式の求解が不要となる。

ただし，陽解法には安定性の問題があり，離散化の条件によっては時間発展とともに解が発散してしまう。これはマトリクスの最大固有値と時間ステップに関係し，一般的にマトリクスの最大固有値が大きいほど時間ステップを小さくしなければならない。スペクトル法における固有値は低次のものは高精度だが，高次になるにつれて急激に誤差が大きくなり，物理的な固有値とは対応しなくなる。これはスペクトル法で用いる不等間隔な節点に起因するものであり，節点間隔を調整し，高次の固有値を小さくすることで時間ステップを大きく設定することが可能である [32]。

計算知能と組み合わせた最適設計

第 3 章で提案解析手法を用いてティンパニの設計を試みたが，固有周波数比と整数比との誤差を小さくするパラメータについてほぼ網羅的に変化させながら評価関数の値を調べたため非効率であった。第 9 章でも述べたが，進化計算などの計算知能を用いた楽器の最適設計も近年研究されてきており，第 3 章で扱ったような最適化問題もより効率的に解ける可能性もある。しかしながら，最適化アルゴリズムによっ

て評価関数を計算する回数を減らすことはできても，一般的に最適設計には多くの反復計算が要求され，最適解に収束するまでの時間は一回の試行にかかる計算時間に大きく依存する。そこで本論文で提案した解析手法を採用し，一試行あたりの計算時間を短縮することにより，最適化全体にかかる計算時間の大きな短縮も見込める。その結果，これまでの設計方法からは想像できなかった形状や材質をもつ，全く新しい種類の楽器の設計，創生も可能になるかもしれない。

付録 A

一般曲線座標系における微分作用素

デカルト座標系で表された微分方程式の微分作用素を一般曲線座標系に変換するとき，一般曲線座標系 (ξ, η) の導関数 $\partial\xi/\partial x$ や $\partial\xi/\partial y$ が必要になる。一般的に，一般曲線座標系から物理座標系への変換関数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(\xi, \eta)$ が定義されていても，その逆関数が陽に得られるとは限らない。そのため，通常は変換行列の逆行列によって間接的にこれらの項を求める。

ここではこれらの項を求めるのではなく，文献 [7] を参考に微分幾何学的観点から一般曲線座標系における各種微分作用素を導出する。この方法であれば，先に述べた行列による方法よりも三次元空間の扱いが煩雑にならないという利点がある。

A.1　共変基底ベクトルと反変基底ベクトル

まず，一般曲線座標系を便宜上 $(\xi, \eta, \zeta) = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ と表記することとする。一般曲線座標系では，図 A.1 に示すように 2 種類の基底ベクトルを選ぶことができる。一つ目は座標軸に沿った接線ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ であり，これは共変基底ベクトルである。もう一つは座標軸に直交する法線ベクトル $\boldsymbol{a}^i$ であり，これは反変基底ベクトルと呼ばれる。直交座標系では共変基底ベクトルと反変基底ベクトルは同じものであるが，一般曲線座標系ではこれらが異なるため，ベクトルを 2 種類の方法で表すことができる。

共変基底ベクトルは座標軸に接するので，次のように定義される。

$$\boldsymbol{a}_i = \lim_{\Delta\xi^i \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta \xi^i} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^i}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{A.1}$$

一方，反変基底ベクトルは座標軸に直交するベクトルである。一般曲線座標系の座標が一定となる線を等高線として見ると，反変基底ベクトルは座標の変化率が最大となるベクトル，つまり勾配に相当するので，

$$\boldsymbol{a}^i = \nabla \xi^i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{A.2}$$

と定義される。物理座標系から一般曲線座標系への変換関数，つまり一般曲線座標系から物理座標系への変換関数の逆関数が必要になるため，通常，反変基底ベクトルを直接求めることはできない。

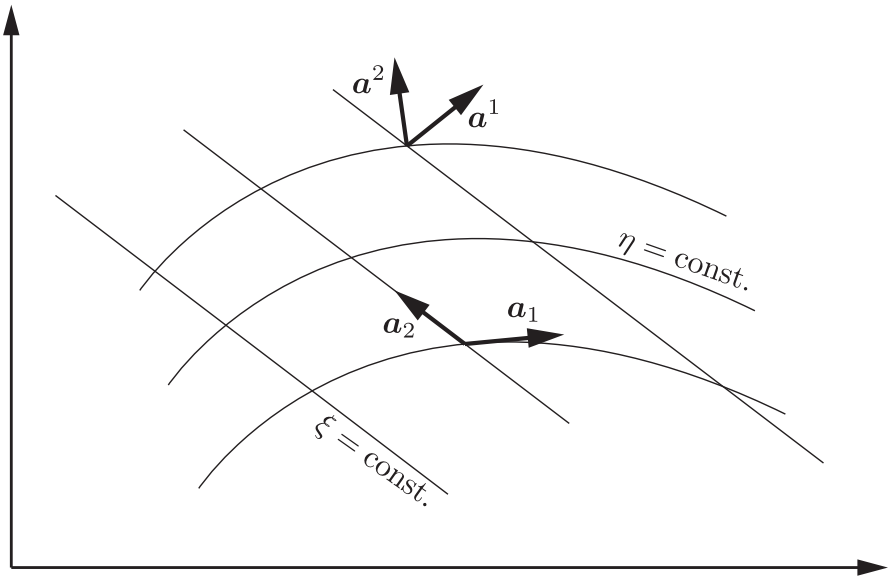


図 A.1: 共変基底ベクトルと反変基底ベクトル

A.2　微小要素

次に，空間の微小要素を一般曲線座標系で表していく。まず，微小線要素はチェーンルールと式 (A.1) より，

$$d\boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \zeta} d\zeta = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{a}_i d\xi^i \tag{A.3}$$

と表される。次に一般曲線座標系における微小面要素は，外積を使って次のように表される。

$$d\boldsymbol{S}^i = \boldsymbol{a}_j d\xi^j \times \boldsymbol{a}_k d\xi^k = (\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k) d\xi^j d\xi^k \tag{A.4}$$

ここで，添字の i，j，k は巡回的であるとする。最後に微小体積要素はスカラー三重積,

$$dV = \boldsymbol{a}_i \cdot (\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k) d\xi^i d\xi^j d\xi^k \tag{A.5}$$

によって求められる。また，スカラー三重積は行列式の形で,

$$\boldsymbol{a}_i \cdot (\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k) = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = J \tag{A.6}$$

と表すことができ [62]，つまりこれはヤコビアン J に相当する。これを使って式 (A.5) を表すと，

$$dV = J d\xi^i d\xi^j d\xi^k \tag{A.7}$$

となる。

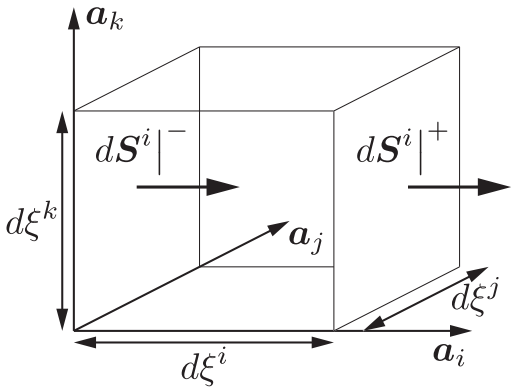


図 A.2: 微小体積要素を横切る流束

A.3　発散・勾配・ラプラシアン

ここから，各微分作用素を一般曲線座標系で表していく。まず，流束 $\boldsymbol{F}$ の発散は定義より，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\partial\Delta V}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.8}$$

微小体積要素を図 A.2 のような平行六面体とすると，式 (A.4) より面積分は，

$$\int_{\partial\Delta V}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\sum_{i=1}^{3}\left\{\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k)d\xi^j d\xi^k\big|^+-\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k)d\xi^j d\xi^k\big|^-\right\} \tag{A.9}$$

であり，さらに式 (A.7) を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta V}\int_{\partial\Delta V}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}&=\frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k)d\xi^j d\xi^k\big|^+-\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k)d\xi^j d\xi^k\big|^-}{d\xi^i d\xi^j d\xi^k}\right\}\\&=\frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k)|^+-\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k)|^-}{d\xi^i}\right\}\end{aligned} \tag{A.10}$$

となる。極限 $\Delta V\to 0$ をとると，発散は，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\left\{\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k)\right\} \tag{A.11}$$

で与えられる。これは発散の保存形表示である。勾配の導出のために発散の非保存形を導出しておく。流束 $\boldsymbol{F}$ が場所に依存せず，任意の定数 $\boldsymbol{c}$ であると仮定する。このとき，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\left\{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k)\right\}=0 \tag{A.12}$$

となるはずである。$\boldsymbol{c}$ は任意であるので，上式が成り立つためには，

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\xi^i}(\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k)=0 \tag{A.13}$$

でなければならない。これはメトリック恒等式と呼ばれる。この関係が成り立てば，式 (A.11) は，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \xi^i} \tag{A.14}$$

と書くことができる。これが発散の非保存形である。

次に一般曲線座標系における勾配を導出する。流束 $\boldsymbol{F}$ をデカルト座標系の単位基底ベクトル $\hat{x}$，$\hat{y}$，$\hat{z}$ を使って，$\boldsymbol{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$ と書き，式 (A.14) を展開すると，

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k)\cdot\left(\frac{\partial F_x}{\partial \xi^i}\hat{x} + \frac{\partial F_y}{\partial \xi^i}\hat{y} + \frac{\partial F_z}{\partial \xi^i}\hat{z}\right) \tag{A.15}$$

となり，左辺と右辺の各項を比べると，

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \nabla F_x \cdot \hat{x} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k)\cdot\frac{\partial F_x}{\partial \xi^i}\hat{x} \tag{A.16a}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} = \nabla F_y \cdot \hat{y} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k)\cdot\frac{\partial F_y}{\partial \xi^i}\hat{y} \tag{A.16b}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla F_z \cdot \hat{z} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k)\cdot\frac{\partial F_z}{\partial \xi^i}\hat{z} \tag{A.16c}$$

となる。これらの関係からスカラー関数 f の勾配は，

$$\nabla f = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k)\frac{\partial f}{\partial \xi^i} \tag{A.17}$$

と表せる。さらに式 (A.13) の関係を使うと，勾配の保存形は次のように導ける。

$$\nabla f = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left\{(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k)f\right\} \tag{A.18}$$

式 (A.11)，(A.14)，(A.17)，(A.18) は，発散と勾配が共変基底ベクトルによって表されるということを意味している。つまり，陽に与えられる変換関数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(\xi, \eta, \zeta)$ の導関数によって，これらの微分作用素を構成できるということである。

勾配を用いると，反変基底ベクトルを共変基底ベクトルで表すことができる。式 (A.17) において $f = \xi^i$ とおくと，

$$\nabla \xi^i = \frac{1}{J}\sum_{l=1}^{3}(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k)\frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^l} \tag{A.19}$$

であり，$\partial \xi^i / \partial \xi^l = \delta_{il}$ と式 (A.2) より，

$$\nabla \xi^i = \boldsymbol{a}^i = \frac{1}{J}(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k) \tag{A.20}$$

もしくは，

$$J\boldsymbol{a}^i = \boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k \tag{A.21}$$

とも書ける。Neumann 境界条件を与えるときに境界に垂直な単位法線ベクトルが必要になる。単位法線ベクトル $\hat{n}^i$ は反変基底ベクトル $\boldsymbol{a}^i$ をそのノルムで割ればよく，

$$\hat{n}^i = \frac{|J|}{J} \frac{\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k}{\|\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k\|} \tag{A.22}$$

で求めることができる。式 (A.21) を用いると，発散と勾配は反変基底ベクトルでも表すことができ，それぞれ式 (A.11) と (A.17) より，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J \boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{F}) \tag{A.23}$$

$$\nabla f = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^{3} J \boldsymbol{a}^i \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \tag{A.24}$$

となる。

最後に一般曲線座標系におけるラプラシアンは上の二つの式より，

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\boldsymbol{a}^i \cdot \sum_{j=1}^{3} J \boldsymbol{a}^j \frac{\partial f}{\partial \xi^j} \right) \tag{A.25}$$

と表すことができる。

参考文献

[1] S. Bilbao. *Numerical sound synthesis: Finite difference schemes and simulation in musical acoustics*. Wiley Online Library, 2009.

[2] F. Pfeifle and R. Bader. Real-time finite-difference method physical modeling of musical instruments using field-programmable gate array hardware. *Journal of the Audio Engineering Society*, Vol. 63, No. 12, pp. 1001–1016, 2016.

[3] S. Bilbao and C. J. Webb. Timpani drum synthesis in 3d on gpgpus. In *Proc. 15th Int. Conf. Digital Audio Effects (DAFx-12)*, 2012.

[4] S. Bilbao and C. J. Webb. Physical modeling of timpani drums in 3d on gpgpus. *Journal of the Audio Engineering Society*, Vol. 61, No. 10, pp. 737–748, 2013.

[5] L. N. Trefethen. *Spectral methods in MATLAB*, Vol. 10. Siam, 2000.

[6] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral methods: fundamentals in single domains*. Springer Science & Business Media, 2006.

[7] D. A. Kopriva. *Implementing spectral methods for partial differential equations: Algorithms for scientists and engineers*. Springer Science & Business Media, 2009.

[8] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics*. Springer Science & Business Media, 2007.

[9] N. H. Fletcher and T. D. Rossing. *The physics of musical instruments*. Springer Science & Business Media, 2012.

[10] R. S. Christian, R. E. Davis, A. Tubis, C. A. Anderson, R. I. Mills, and T. D. Rossing. Effects of air loading on timpani membrane vibrations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 76, No. 5, pp. 1336–1345, 1984.

[11] T. D. Rossing, I. Bork, H. Zhao, and D. O. Fystrom. Acoustics of snare drums. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 92, No. 1, pp. 84–94, 1992.

[12] T. D. Rossing. Acoustics of percussion instruments: Recent progress. *Acoustical Science and Technology*, Vol. 22, No. 3, pp. 177–188, 2001.

[13] L. Rhaouti, A. Chaigne, and P. Joly. Time-domain modeling and numerical simulation of a kettledrum. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 105, No. 6, pp. 3545–3562, 1999.

[14] G. Sathej and R. Adhikari. The eigenspectra of indian musical drums. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 125, No. 2, pp. 831–838, 2009.

[15] S. Bilbao. Time domain simulation and sound synthesis for the snare drum. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 131, No. 1, pp. 914–925, 2012.

[16] A. Torin and S. Bilbao. Numerical experiments with non-linear double membrane drums. In *Proc. 4th Stockholm Musical Acoustics Conference (SMAC 2013), Stockholm, Sweden*, 2013.

[17] A. Torin and M. Newton. Nonlinear effects in drum membranes. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, 2014.

[18] モード解析ハンドブック編集委員会（編）. モード解析ハンドブック. コロナ社, 2000.

[19] 安田仁彦. 振動工学 基礎編. コロナ社, 2000.

[20] 加川幸雄. 有限要素法による振動・音響工学/基礎と応用. 培風館, 1981.

[21] Y. Yasuda, A. Ushiyama, S. Sakamoto, and T. Sakuma. Numerical and experimental studies on the effects of stage risers. *Applied Acoustics*, Vol. 70, No. 4, pp. 588–594, 2009.

[22] 伊藤毅. 音響工学原論 (上巻). コロナ社, 1955.

[23] T. Terai. On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 69, No. 1, pp. 71–100, 1980.

[24] T. Wah. Vibration of circular plates. *the Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 34, No. 3, pp. 275–281, 1962.

[25] H. Suzuki, N. Yamaguchi, and H. Izumi. Theoretical and experimental studies on the resonance frequencies of a stretched circular plate: Application to japanese drum diaphragms. *Acoustical science and technology*, Vol. 30, No. 5, pp. 348–354, 2009.

[26] J. Lee and W. W. Schultz. Eigenvalue analysis of timoshenko beams and axisymmetric mindlin plates by the pseudospectral method. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 269, No. 3, pp. 609–621, 2004.

[27] A. J. M. Ferreira and G. E. Fasshauer. Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an rbf-pseudospectral method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 1, pp. 134–146, 2006.

[28] A. J. M. Ferreira and G. E. Fasshauer. Analysis of natural frequencies of composite plates by an rbf-pseudospectral method. *Composite Structures*, Vol. 79, No. 2, pp. 202–210, 2007.

[29] W. Huang and D. M. Sloan. The pseudospectral method for solving differential eigenvalue problems. *Journal of Computational Physics*, Vol. 111, No. 2, pp. 399–409, 1994.

[30] B. Fornberg. *A practical guide to pseudospectral methods*, Vol. 1. Cambridge university press, 1998.

[31] J. P. Boyd. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Corporation, 2001.

[32] D. Kosloff and H. Tal-Ezer. A modified chebyshev pseudospectral method with an o (n-1) time step restriction. *Journal of Computational Physics*, Vol. 104, No. 2, pp. 457–469, 1993.

[33] J. A. Weideman and S. C. Reddy. A matlab differentiation matrix suite. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, Vol. 26, No. 4, pp. 465–519, 2000.

[34] C. I. Gheorghiu. *Spectral Methods for Non-Standard Eigenvalue Problems: Fluid and Structural Mechanics and Beyond*. Springer Science & Business, 2014.

[35] B. Fornberg. A pseudospectral fictitious point method for high order initial-boundary value problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 28, No. 5, pp. 1716–1729, 2006.

[36] N. Mai-Duy. An effective spectral collocation method for the direct solution of high-order odes. *Communications in numerical methods in engineering*, Vol. 22, No. 6, pp. 627–642, 2006.

[37] N. Mai-Duy and R. I. Tanner. A spectral collocation method based on integrated chebyshev polynomials for two-dimensional biharmonic boundary-value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 201, No. 1, pp. 30–47, 2007.

[38] V. A. Chirikalov. Computation of the differentiation matrix for the hermite interpolating polynomials. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 68, No. 6, pp. 766–770, 1994.

[39] A. W. Leissa. *Vibration of shells*. Acoustical Society of America, 1993.

[40] 鈴木勝義, 山田元, 成田吉弘, 齊藤俊. シェルの振動入門. コロナ社, 1996.

[41] 鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦. 有限要素法ハンドブック I 基礎編. 培風館, 1981.

[42] C. R. Fuller, S. Elliott, and P. A. Nelson. *Active control of vibration*. Academic Press, 1996.

[43] M. Benzi, R. Kouhia, and M. Tuma. An assessment of some preconditioning techniques in shell problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 897–906, 1998.

[44] R. Barrett, M. W. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. A. van der Vorst. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*, Vol. 43. Siam, 1994.

[45] H. A. van der Vorst and J. B. M. Melissen. A petrov-galerkin type method for solving ax k= b, where a is symmetric complex. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, No. 2, pp. 706–708, 1990.

[46] 岡本則子, 大鶴徹, 富来礼次, 藤野清次. 有限要素法による室内音場解析における cocg 法の収束性. 日本計算工学会論文集 No. 20050027, 2005.

[47] 日本建築学会（編）. 音環境の数値シミュレーション—波動音響解析の技法と応用—. 日本建築学会, 2011.

[48] D. Givoli. *Numerical methods for problems in infinite domains*, Vol. 33. Elsevier, 1992.

[49] http://gacoust.hwe.oita-u.ac.jp/aij-bpca/.

[50] 加川幸雄. 開領域問題のための有限/境界要素法. サイエンス社, 1983.

[51] A. F. Seybert, B. Soenarko, F. J. Rizzo, and D. J. Shippy. A special integral equation formulation for acoustic radiation and scattering for axisymmetric bodies and boundary conditions. *The journal of the acoustical society of America*, Vol. 80, No. 4, pp. 1241–1247, 1986.

[52] H. A. Schenck. Improved integral formulation for acoustic radiation problems. *The journal of the acoustical society of America*, Vol. 44, No. 1, pp. 41–58, 1968.

[53] A. J. Burton and G. F. Miller. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems. In *Proceedings of the Royal Society of*

London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 323, pp. 201–210. The Royal Society, 1971.

[54] L. L. Henrique and J. Antunes. Optimal design and physical modelling of mallet percussion instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, Vol. 89, No. 6, pp. 948–963, 2003.

[55] L. L. Henrique, J. Antunes, O. Inácio, and J. Paulino. Application of optimization techniques for acoustical resonators. In *Twelfth International Congress on Sound and Vibration (ICSV12), Lisbon, Portugal, July*, pp. 11–14, 2005.

[56] L. L. Henrique, O. Inácio, J. Paulino, and J. Antunes. Optimization of vibratory and acoustical components of percussion instruments: Theoretical and experimental results. In *Proceedings of Forum Acusticum, Budapest*, pp. 485–490, 2005.

[57] J. Petrolito and K. A. Legge. Designing musical structures using a constrained optimization approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 117, No. 1, pp. 384–390, 2005.

[58] K. A. Legge and J. Petrolito. Designing idiophones with tuned overtones. *Acoustics Australia*, Vol. 35, No. 2, p. 47, 2007.

[59] 大森博司, 本間俊雄. 構造形態の解析から創生へ. 建築雑誌, Vol. 118, No. 1507, pp. 20–23, 2003.

[60] H. Takagi. Interactive evolutionary computation: Fusion of the capabilities of ec optimization and human evaluation. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 89, No. 9, pp. 1275–1296, 2001.

[61] H. Takagi and D. Pallez. Paired comparison-based interactive differential evolution. In *Nature & Biologically Inspired Computing, 2009. NaBIC 2009. World Congress on*, pp. 475–480. IEEE, 2009.

[62] 宮崎保光. 応用ベクトル解析. コロナ社, 1981.

謝辞

本研究を進めるにあたり，九州大学大学院芸術工学研究院の鮫島俊哉准教授からは大変熱心なご指導，ご助言をいただきました。また，本論文だけでなく，学会発表や原著論文の投稿においても丁寧なご指導をいただき，研究の面白さ，研究に取り組む姿勢，心構えなど多くのことを学ばせていただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

同研究院の尾本章教授，鏑木時彦教授には本論文をご精読いただき，大変有益なご指摘，コメントをいただきました。お二方のお力添えにより，博士論文としての質を高めることができました。ここに深く感謝いたします。

鮫島・尾本・河原研究室の皆様とは日頃から研究について活発に議論し，理解を深め，また研究室生活のみならず私生活においてもとても楽しい充実した時間を過ごすことができました。心より感謝いたします。

最後になりましたが，家族，友人をはじめ，多くの方々の理解と支えがあって本論文を書き上げることができました。本当にありがとうございました。