九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

Determinants of Matrices over Group Algebras

山口, 尚哉

https://doi.org/10.15017/1806831

出版情報：九州大学, 2016, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

（様式６－２）

氏　　名	山口　尚哉
論　文　名	Determinants of Matrices over Group Algebras （群環の元を成分にもつ行列の行列式に関する研究）
論文調査委員	主　査　　九州大学　　教授　落合啓之 副　査　　九州大学　　准教授　植田好道 副　査　　京都大学　　准教授　梅田　亨 副　査　　鹿児島大学　　准教授　伊藤　稔

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

群の表現に由来する行列の行列式の研究は、Dedekind, Frobenius らの 19 世紀末の研究に端を発する。彼らは群行列式の多変数多項式としての既約分解を理解する過程で、現在で言うところの有限群の表現論を構築した。これらの群行列式は有限群の正則表現に由来する行列の行列式である。

本研究は群行列式の概念を群環に拡張し、群環の元を成分に持つような行列の行列式を考察した。群の表現に由来する行列式を考察する点においては、Dedekind らの研究と同様であるが、彼らの考察した行列の成分同士はそれぞれ可換なものであるのに対し、本研究では行列の成分同士が一般には非可換である。また本研究の対象となる行列は、Dedekind と Frobenius が考察した行列を含む。それゆえに本研究は、彼らの研究対象を非可換な枠組みに広げたものであるといえる。

もちろん、このように非可換な枠組みに広げようとすると、行列式をどのように定義するかという問題が発生する。本論文では、四元数の分野で扱われる Study 行列式や、斜体を成分にもつ行列に対して定義される Dieudonné の行列式の類似物を群環の設定で新しく構成し、列行列式や行行列式、二重行列式を用いて、群環の元を成分にもつ行列の行列式を考察している。

第一章から第三章は、いずれも群行列式の因数分解に関する内容である。一章では、Dedekind と Frobenius が考察した行列を群環の元を成分にもつ行列とみなして、この行列の固有値を考察することにより Dedekind の定理の一般化を得ている。第二章と第三章では、Study 行列式の類似物を構成し、群行列式の一般化を与えることにより、群行列式に関する最も基礎となる定理の１つである Frobenius の定理を相対的な設定に拡張している。Frobenius の定理は群行列式の既約分解を、群の既約表現を用いて表示するものである。本研究は、群行列式の既約とは限らない因数分解と、部分群の既約表現に対応があることを示した。これらの結果は、有限群の既約表現と、この有限群の部分群の既約表現の相対的な情報を与える。

第四章では、Study行列式とDieudonnéの行列式を組み合わせた行列式を用いて、群の移送の自然な解釈を与えた。移送とは、群からその群の指数有限な部分群のアーベル化へのある群準同型写像のことをいう。群論において、移送は重要な役割を担っており、この移送に関連した移送定理とよばれるものが数多くある。梅田亨は、この移送が非可換行列式を用いて構成できることを述べていた。本研究者はこの着想を押し進め、Study行列式とDieudonnéの行列式を組み合わせた行列式を導入することで移送を構成した。そして、この構成により移送のいくつかの性質を、行列式の性質より自然に導けることを示した。

第五章では、列行列式、行行列式、そして、二重行列式を用いて群環上の特殊な中心元を構成した。古典的不変式論において重要な役割を果たすCapelli恒等式は行列式の積公式をWeyl代数上に実現したものである。この恒等式よりCapelli元という一般線型リー環の普遍包絡環の中心の生成元が自然に得られる。一方で、普遍包絡環を群環に置き換えることで、群行列式型Capelli恒等式の研究が梅田亨によって提唱された。これはいわば、有限群の正則表現のCapelli恒等式である。正則表現は既約表現の直和であることから、有限群の既約表現のCapelli恒等式が群行列式型Capelli恒等式の土台にある。本研究は、群の既約表現のCapelli恒等式を考察することによって群環上にCapelli元を与え、このCapelli元が群環の中心の基底を構成することを示した。

以上の結果は、非可換な成分を持つ行列式の研究という未解明の分野に対して、群の表現論と群環の代数としての考察から迫るものであり、新しい着想を含んだ優れた研究である。これらは代数学の分野において価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。