Determinants of Matrices over Group Algebras

山口, 尚哉

https://doi.org/10.15017/1806831

出版情報：九州大学, 2016, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式３）

氏　　名　：山口　尚哉

論 文 名　：Determinants of Matrices over Group Algebras
（群環の元を成分にもつ行列の行列式に関する研究）

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

群環の元を成分にもつ行列の行列式に関して研究を行った。研究対象となる群環の元を成分にもつ行列はどれも、群の表現に由来するものである。本研究者は、このような群環の元を成分にもつ行列の行列式に価値を見出し、以下の５つを成果として挙げた。

（１）Dedekind の定理の一般化を与えた。
（２）Dedekind の定理の更なる拡張と一般化を与えた。
（３）Frobenius の定理の一般化を与えた。
（４）非可換行列式を用いて、群の移送の性質を自然に導いた。
（５）群環上に Capelli 元を与えた。

（１）から（３）は群行列式の因数分解に関する結果で、（４）は非可換行列式を用いて群の移送を構成することにより、この移送のもつ性質を自然に理解できることを示したもの。（５）は有限群の群環上に Capelli 元を実現したもので、すなわち非可換行列式を用いて群環の中心の基底を構成したものである。

群の表現に由来する行列の行列式の研究は、Dedekind と Frobenius に端を発する。Dedekind と Frobenius は、有限群の正則表現に由来する行列の行列式、これは群行列式とよばれるが、この群行列式の既約分解を理解する過程で有限群の表現論を構築した。

本研究も群の表現に由来する行列式を考察する点においては、彼らの研究と同様である。しかしながら、彼らの考察した行列の成分同士はそれぞれ可換なものであるのに対し、本研究では行列の成分同士がそれぞれ可換であることを仮定しない。また本研究の対象となる行列は、Dedekind と Frobenius が考察した行列を含む。それゆえに本研究は、彼らの研究対象を非可換な枠組みに広げたものである。

もちろん、このように非可換な枠組みに広げようとすると、つまりは行列の成分がそれぞれ可換であると仮定しなければ、行列式をどのように定義するかという問題が発生する。本論文では、四元数の分野で扱われる Study 行列式と斜体を成分にもつ行列に対して定義される Dieudonné の行列式の類似物を構成して、また列行列式、行行列式、および二重行列式を用いて、群環の元を成分にもつ行列の行列式を考察した。

一章から三章はいずれも群行列式の因数分解に関する内容である。一章では、Dedekind と Frobenius が考察した行列を群環の元を成分にもつ行列とみなして、この行列の固有値を考察する

ことにより（１）を得た。二章と三章では、Study 行列式の類似物を構成し、群行列式の一般化を与えることにより（２）と（３）を得た。上述したように群行列式とは、有限群の正則表現に由来する行列の行列式であり、これは有限群に対して定まるある同次多項式のことを指す。群行列式に関する最も重要な定理の１つに Frobenius の定理がある。この定理は群行列式の既約分解を、この群行列式に対する群の既約表現を用いて表示するものである。本研究者は、群行列式の既約とは限らない因数分解と、この群行列式に対する群の部分群の既約表現に対応があることを示した。これらに関する研究成果が、（１）から（３）である。これらの結果は、有限群の既約表現と、この有限群の部分群の既約表現の相対的な情報を与える。

四章と五章は、梅田亨の研究に刺激を受けて、そして行列式の値域は代数の中心にあるべきという思想に沿って成されたものである。

四章では、Study 行列式と Dieudonné の行列式を組み合わせた行列式を用いて（４）を得た。群論において、移送は重要な役割を担っており、この移送に関連した移送定理とよばれるものが数多くある。移送とは、群からその群の指数有限な部分群のアーベル化へのある群準同型写像のことをいう。この移送は、あるいくつかの性質をもつことが知られている。梅田亨は、この移送が非可換行列式を用いて構成できることを述べた。本研究者はこの考えを進めて、移送を Study 行列式と Dieudonné の行列式を組み合わせた行列式で構成し、この構成により移送のいくつかの性質を、行列式の性質より自然に導けることを示した。

五章では、列行列式、行行列式、そして二重行列式を用いて（５）を得た。不変式論において重要な役割を担った概念に Capelli 恒等式がある。Capelli 恒等式とは行列式の積公式を Weyl 代数上に実現したものである。この恒等式より Capelli 元という固有多項式が自然に導かれるが、これは一般線型リー環の普遍包絡環の中心の生成元であることが知られている。一方で、群行列式型 Capelli 恒等式の研究が梅田亨によって提唱された。これはいわば、有限群の正則表現の Capelli 恒等式である。正則表現は既約表現の（表現の次数分の重複がある）直和であることから、有限群の既約表現の Capelli 恒等式が群行列式型 Capelli 恒等式の土台にある。本研究者は、群の既約表現の Capelli 恒等式を考察することにより群環上に Capelli 元を与え、この Capelli 元が群環の中心の基底を構成することを示した。