

Study of exterior powers of representations of finite groups with integer-valued characters

田村, 朋之

<https://doi.org/10.15017/1806829>

出版情報 : 九州大学, 2016, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : 全文ファイル公表済

| | | | | |
|--------|--|------|-----|------|
| 氏 名 | 田村 朋之 | | | |
| 論 文 名 | Study of exterior powers of representations of finite groups with integer-valued characters (整数値指標である有限群の表現の交代テンソル積表現の研究) | | | |
| 論文調査委員 | 主 査 | 九州大学 | 教授 | 落合啓之 |
| | 副 査 | 九州大学 | 教授 | 野村隆昭 |
| | 副 査 | 九州大学 | 教授 | 金子昌信 |
| | 副 査 | 九州大学 | 准教授 | 権 寧魯 |

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

この学位論文は、有限群の複素数体上の有限次元表現の交代テンソル積表現の指標にまつわる2つのテーマを扱った研究である。

有限群の交代テンソル積表現を求める問題は D.Knutson が 1973 年に提起した問題である。彼は、交代テンソル積表現の指標を λ -ring と呼ばれる可換環を用いて計算することが可能であることを導き、交代テンソル積表現に関する問題を、表現環が λ -ring としてどのような構造を持ち得るかという問題へと翻訳した。

本論文の Part I では表現の指標や仮想指標(virtual character)が整数値になる条件に関する研究を行っている。どのような仮想指標に対しても、その交代テンソル積表現の指標の母関数は、ある特定の形の無限積表示が一意的に可能である。本研究ではこの無限積表示において、指標が整数値である場合のみ、交代テンソル積表現の指標が有限積で表されることを示した。特に、この有限積を分解することにより交代テンソル積表現の指標が得られることになる。この主結果の証明の過程で、Knutson の導入した λ -ring と Metropolis-Rota が 1983 年に導入した necklace ring に truncated operation という新たな operation の族を定義した。また、整数値指標であることを λ -ring の Adams operation で特徴づけ、指標に対応した necklace ring の元を truncated operation によって特徴づけている。さらに、整数値指標で特徴づけられた necklace ring の二つの元の積を Metropolis らが導入した Frobenius operation を用いて新しく表示した。この表示は、直積群において整数値指標をもつ表現の交代テンソル積表現の計算に利用でき、Part II への応用を持つ。

Part II では Part I の理論展開を踏まえて、多面体の頂点や辺に対する彩色の問題を扱っている。Metropolis-Rota は、正多角形の頂点の非周期的彩色の個数は色の個数に関する多項式で表されることを発見し、それを necklace polynomial と命名して研究する過程で necklace ring の概念にたどり着いた。本研究はこれを正多角形から多面体に拡張するものであり、対称性を持たない彩色の個数が多項式で表されること、そこに necklace polynomial を拡張した特殊多項式の族が現れることが主結果である。そのためにまず、群の作用する集合に着目し、A-colored N-nested G-set という、有限群の作用を持つ集合を定義した。さらに A-colored N-nested G-set に付随した母関数を Knutson の super character の概念を用いて定義した。

この概念は N を具体的に指定することで、対称テンソル積表現の指標の母関数と多面体上の非周期的な彩色の個数の計算手法を与える。 N として非負整数全体を指定すると、定義した母関数から対称テンソル積表現の指標の母関数を得ることができる。このことから特に、置換表現の指標に対して交代テンソル積表現の母関数を与えることができる。

また、Part II の後半では N として 2 元からなる集合の場合を考察し、多面体上の頂点や辺に対する彩色の個数が **A-colored N-nested G-set** と関係がつくことを示している。そして、対称性を持たない彩色の個数が、部分群に関する包除原理的な公式で得られることを導いた。これを利用して、Metropolis-Rota の **necklace polynomial** をこの設定に拡張したものを得ることができた。最後の節では、以上の一般的な結果を巡回群や二面体群に適用することで、表裏のある正多角形や正多角柱に対して具体的な公式も与えている。偶奇によって結果が変わってくる微妙なものであり、表現論の相違が彩色の対称性に影響を与えていることがこの結果から見て取ることができる。

以上の結果は、有限群の表現論のみならず、組み合わせ論における数え上げの問題へも応用を持つ意義のあるものであり、代数学の分野において価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。