

整数値指標である有限群の表現の交代テンソル積表現の研究

田村, 朋之

<https://doi.org/10.15017/1806829>

出版情報 : Kyushu University, 2016, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : Fulltext available.



氏 名 : 田村 朋之

論 文 名 : Study of exterior powers of representations of finite groups with integer-valued characters(整数値指標である有限群の表現の交代テンソル積表現の研究)

区 分 : 甲

論 文 内 容 の 要 旨

有限群の複素数体上有限次元表現が与えられたとき、任意の非負整数 i に対し、 i 階交代テンソル積表現が与えられる。本論文ではこの表現の指標を計算することを目的とし、論文内で **part I**、**part II** と表される二つの項目において二通りの結果を得た。

有限群の交代テンソル積表現を求める問題は **D.Knutson** が 1973 年に提起した問題である。彼は同文献[**Knu**]において、交代テンソル積表現の指標を λ -ring と呼ばれる可換環を用いて計算することが可能であることを述べた。さらに **Knutson** は交代テンソル積表現の計算に関する問題を、有限群の表現環は λ -ring としてどのような構造を持ち得るかという問題へと移した。以降、**Boorman**[**Boo**]らにより対称群といった特定の有限群に対し、 λ -ring としての生成元を発見する等の成果が得られているが、本問題に対する統一的な結果はいまだに得られていないとされる。

一方、有限群の表現環の λ -ring としての構造を調べる問題は、その指標を用いることで、交代テンソル積表現の指標をどのように計算するかという問題と等価である。本論文では **part I**、**part II** のいずれにおいても、交代テンソル積表現の指標を計算するためにその指標の母関数に着目する。

筆者は整数値指標と呼ばれる指標に関する結果を **Part I** で記した。どのような有限群の指標に対しても、その交代テンソル積表現の指標の母関数はとある無限積表示が可能である。この無限積表示において、筆者は指標が整数値である場合のみ、交代テンソル積表現の指標が有限積で表されることを示した。特に、この有限積を分解することにより交代テンソル積表現の指標が得られる。手法は λ -ring と **Knutson** の[**Knu**]の結果を用いる。さらに **N.Metropolis** と **G.C.Rota** が 1983 年に文献[**Met**]にて導入した necklace ring の概念に truncated operation という新たな operation の族を定義することで行う。最初に、交代テンソル積表現の指標の母関数を necklace ring の元と結びつける。次に、整数値指標であることを λ -ring の Adams operation で特徴づけ、対応した necklace ring の元を truncated operation で特徴づけることで示した。

さらに、筆者は整数値指標で特徴づけられる necklace ring の二つの元の積について **N.Metropolis** らが導入した Frobenius operation を用いた新たな形を示した。これは直積群において整数値指標をもつ表現の交代テンソル積表現を計算するために導入した。

Part II では有限群の作用に着目した。そして **A-colored N-nested G-set** という、有限群の作用を備えた集合を定義した。これは有限集合 A とその一つの元、非負整数全体の部分集合 N 、そしてあらかじめ与えられた有限群の作用を持つ集合に依存して定義される。さらに **A-colored N-nested G-set** に付随した母関数を **Knutson** の super character の概念を用いて定義した。

この概念は N を具体的に指定することで、対称テンソル積表現の指標の母関数と多面体上の非周

期的な色塗りの計算手法を与える。筆者は N として非負整数全体そのものを指定すると、定義した母関数から対称テンソル積表現の指標の母関数を得ることができることを示した。 λ -ring に定義される各 operation の概念から、交代テンソル積表現の指標の母関数を求めることと対称テンソル積表現の指標の母関数を求めることは等価である。このことから特に、置換表現の指標において交代テンソル積表現の母関数を計算することができる。

さらに筆者は N として $0, 1$ だけからなる集合の場合に次のことを考察した。このとき A -colored N -nested G -set は、多面体上の、例えば辺全体や頂点全体などのオブジェクトとその回転対称系から定義される場合、 A の元を用いたオブジェクト上への着色の方法全体であることを示した。さらに A -colored N -nested G -set の軌道がその非周期的な色塗り、即ち恒等変換以外で自身と同一となるような色塗り方が存在しないような塗り方の総数を表していることを示した。また、軌道に関する母関数が、非周期的な色塗りのうち、最初に指定した A の元を指定した数だけ含む場合の数の母関数になることも示した。

多面体上の非周期的な色塗り方については N .Metropolis と G -C.Rota が円周上の正多角形を構成する頂点の上に色付きビーズを置いたときの非周期的なものの総数を necklace polynomial として求めている。本論文 part II の結果は多角形のみならず任意の多面体に対し求めることができる。Part II では多面体における計算結果を用い、さらに N .Metropolis らが示した necklace polynomial に関する necklace ring の乗法と Frobenius operation の定義の元となった二つの等式を、一般化した。

[Boo] Evelyn Huntterer Boorman, S -operations in representation theory, Trans. Amer. Math. Soc. **205** (1975)

[Knu] Donald Knutson, λ -Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1973

[MR] N .Metropolis and Gian-Carlo Rota, Witt Vectors and the Algebra of Necklaces, Adv. in Math. **50** (1983), no. 2, 95–125.