九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

A symmetric subdomain contained in a fiber of the Siegel upper half space

井上, 公人

https://doi.org/10.15017/1806824

出版情報：九州大学, 2016, 博士（機能数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

（様式６－２）

氏　　名	井上 公人
論　文　名	A symmetric subdomain contained in a fiber of the Siegel upper half space (ジーゲル上半空間のファイバーに含まれる部分対称領域)
論文調査委員	主　査　九州大学　教授　若山 正人 副　査　九州大学　教授　小磯 深幸 副　査　九州大学　教授　落合 啓之 副　査　名古屋大学　准教授　伊師 英之

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

本論文は，多変数正規分布の族がなす統計多様体の測地線を対称領域の幾何学の観点から研究したものである．P.S. Eriksen は，1987 年の会議録論文 ”Geodesics connected with the Fisher metric on the multivariate normal manifold”, in Proceedings of the GST Workshop, Lancaster 1987, pp. 225-229 において正規分布の族から定まる統計多様体（正規模型）の測地線をミステリアスではあるが簡潔な方法で与えている．その方法を具体的に述べると，初期値情報から定まるある行列の指数写像をある指定された方法でブロック分けを行ったその一部分にあたる部分行列から測地線が得られるというものである。よく知られているように，リーマン対称空間においては、測地線は接空間のベクトル（Lie 環の元）の指数写像で与えられる．したがって，一次元正規分布族が定める正規模型の場合には，それがポアンカレ計量をもつ複素上半平面に同型なことから, Eriksen の結果は形式的にはその類似であり，さらには幾何学的特徴を捉える自然な拡張であると考えることができる．しかしながら，一般に多変数の場合は，正規模型はもはやリーマン対称空間とはならず，その意味で Eriksen の結果の幾何学的意味（対称空間との関連など）を明らかにすることが必要であった．Eriksen の論文の後 1991 年に, M.Calvo & J.M. Oller は，論文 “An explicit solution of information geodesic equations for the multivariate normal model” Statistics and Decisions, 9, 119-138 において，測地線の微分方程式をかなり力ずくではあるが合理的に拡張した形で一般的に解くことで測地線の具体的表示を与えた．著者らは，その序文において Eriksen の論文では，測地線がパラメータに関し明示的な形で与えられていないことを指摘して，当該研究の位置付けを行っている．斯かる状況下，本研究において，申請者は Eriksen の結果をリーマン対称空間の一つであるジーゲル上半空間の幾何的な性質から説明することに成功した．

ジーゲル上半空間は，有界等質領域の研究を通じて Piatetski-Shapiro が定義したジーゲル領域の一種であり，複素微分幾何学，表現論，多変数保型形式等における重要な研究対象である．そこでまず，本学位論文の議論の核となるジーゲル領域に関しての一般的事実を述べる．D を対称ジーゲル領域とする．このとき D をコンパクト空間に埋め込んだときに定まる境界は境界成分と呼ばれる既約な解析的集合に分解されることが知られている．一つの境界成分 F を与えると, D の点 z に対し, F の点 a が z と測地線で結ばれる点として唯一定まる．この D から F への写像を π とすると π は全射であり，a $\in$F における π のファイバー $\pi^{-1}(a)$ は第 2 種ジーゲル領域となることが知られている．言い替えればこれは、ジーゲル上半空間から与えられた境界成分への射影（π に他ならない）が計量構造を用いて定義されていることになる．本研究では，D としてもっぱらジーゲル上半空間 Hn を扱っている．なお, Hn の場合には，各境界成分はより低い次元のジーゲル上半空

間 Hr (r < n) と解析的に同型である．

本研究の概要について手短に述べる．ジーゲル上半空間における上述の境界成分への射影πに対して，一点の逆像によりファイバーを定めると，その虚部として対象の正規模型が得られることが示される．Eriksen の測地線の獲得における指数行列から部分行列をとる操作も，同様の射影として定められる．そしてこの指数行列はジーゲル上半空間のある部分対称領域の測地線のなかで、射影に関して水平的であるものとして特徴付けられるものとなる．さらに申請者は、Eriksen の結果を本質的に応用する形で，上述の部分対称領域の射影の像がファイバーに一致することを示している．その結果，Eriksen の主張が，この部分境界領域における測地線の記述に他ならないことを示している．

本研究の内容は，Eriksen の研究以来、等質空間の微分幾何学としての理解が待たれていたものであり，それに対する美しい回答といえる．また，上述のようにその研究過程において，申請者は“リーマンしずめ込み”が鍵となることを発見したが，リーマンしずめ込みの例はあまり多く知られていないことからは，本研究の微分幾何的な意義も評価される．実際，より一般のジーゲル領域におけるリーマンの沈め込みの研究なども申請者の研究の発展型として考察されることが期待される．以上により、本申請者は博士（機能数理学）の学位が授与されるに相応しいと判断する．