

## Zeros of certain weakly holomorphic modular forms and their transcendence

花元, 誠一

<https://doi.org/10.15017/1806823>

---

出版情報 : 九州大学, 2016, 博士 (数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名	花元 誠一			
論 文 名	Zeros of certain weakly holomorphic modular forms and their transcendence (ある弱正則モジュラー形式の零点の配置, 及びその超越性の研究)			
論文調査委員	主 査	九州大学	准教授	権 寧魯
	副 査	九州大学	教授	金子 昌信
	副 査	九州大学	准教授	今野 拓也
	副 査	東京理科大学	准教授	青木 宏樹

### 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

モジュラー形式の零点配置についての古典的結果として、1970年に Rankin と Swinnerton-Dyer により、モジュラー群に対する基本領域内の Eisenstein 級数の零点がすべて、基本領域の円弧上に存在することが証明されている。

花元誠一氏は本論文において、弱正則モジュラー形式の零点配置に関して研究を行い大きな成果を挙げた。弱正則モジュラー形式とは、カスプにおいて極を許し、他では正則な保型形式であり、その代表的な例としては  $j$  関数がある。弱正則モジュラー形式はこの  $j$  関数の一般化と考えられ、整数論において重要な研究対象である。

一方、その重要性にも関わらず、弱正則モジュラー形式のなす線形空間は重さを固定しても無限次元であるため、あまり研究されていなかった。2008年に Duke と Jenkins がモジュラー群に対する弱正則モジュラー形式のなす線形空間の標準的な基底を構成して以来、その基底のフーリエ係数の性質や零点分布などに関する研究が盛んに行われるようになった。特に、弱正則モジュラー形式の零点分布については、Duke と Jenkins がモジュラー群に対する標準的な基底を構成したのと同時に、その標準的な基底のうちほとんど全てのものが任意の零点を基本領域の円弧上にもつことを証明した。その後、モジュラー群だけでなく、レベルが付いた合同部分群の場合にも標準基底が構成されて、その零点分布に関する類似した結果が証明されている。しかしながら、現在までに知られている弱正則モジュラー形式の零点配置の研究は、レベル付きの場合でもほとんどすべて標準基底に関する零点配置の研究であった。

本論文において、花元氏はある線型結合で定義される一般の形をした弱正則モジュラー形式の零点分布を得ることに初めて成功した。零点分布を証明するためには弱正則モジュラー形式の絶対値の評価を行う必要がある。そのためにモジュラー形式のフーリエ展開を主要項と、主要項に比べ十分小さくなるような末尾項に分けてその評価を行う必要がある。先行研究では主要項の最大値の評価を自明な評価で行っているため、非常に粗いものとなっている。花元氏は主要項の導関数の評価と膨大な有限個の点について主要項の計算を行うことで、より精度の高い評価を得ることに成功している。

今日まで行われている弱正則モジュラー形式の研究は、多くがその基底に関するものである。本論文では上述のように、より一般的な弱正則モジュラー形式について考察を行った点が新しく評価できる点である。また、フーリエ係数がすべて整数となるような弱正則保型形式で、零点がすべて円弧上に乗るものが沢山構成できたことになるので、そのフーリエ係数の数論的性質にも非常に興

味が持たれるところである。さらにモジュラー群だけではなくレベル 2 の合同部分群でも類似の結果を得ている。他の群に対する一般の弱正則モジュラー形式を考察する際にも、本論文で得られた結果は非常に役に立つことが期待される。

以上の結果は、モジュラー形式や弱正則モジュラー形式の理論において既に知られている深い結果に立脚しながら、さらにそれを深めた大変優れたものであり、保型形式の整数論の分野において大変価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。