ある弱正則モジュラー形式の零点の配置，及びその超越性の研究

花元，誠一

https://doi.org/10.15017/1806823

出版情報：Kyushu University, 2016, 博士（数理学），課程博士
バージョン：

（様式３）

氏　　名　: 花元誠一

論 文 名　: Zeros of certain weakly holomorphic modular forms and their transcendence
（ある弱正則モジュラー形式の零点の配置，及びその超越性の研究）

区　　分　: 甲

論　文　内　容　の　要　旨

弱正則モジュラー形式とは，カスプにおいて極を許し，他で正則な保型形式である．その代表的な例としては j 関数がある．j 関数はモジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対するウェイト 0 の弱正則モジュラー形式であり，カスプ ∞ で 1 位の極をもつ．j 関数については今日まで様々な研究が行われてきている．弱正則モジュラー形式はこの j 関数の一般化であり，整数論において重要な研究対象である．

正則なモジュラー形式の零点については以前から研究されている．モジュラー形式の最も代表的な例である Eisenstein 級数の零点については，1970 年に Rankin と Swinnerton-Dyer により，モジュラー群に対する基本領域内の零点の全てがその円弧上に存在することが証明されている．また 2004 年に Getz により，Eisenstein 級数に関連する線形結合からなるモジュラー形式についても，ある条件下では零点の全てが基本領域の円弧上に存在することが示されている．

それに対して弱正則モジュラー形式に関する研究が行われるようになったのは近年になってからである．その理由として弱正則モジュラー形式のなす線形空間は無限次元であるため，その基底のとりかたが問題であったことが挙げられるが，2008 年に Duke と Jenkins がモジュラー群に対する弱正則モジュラー形式のなす空間の標準的な基底を構成することにより，その問題は解決された．この基底はウェイト k と 2-k のフーリエ係数において相互法則が成り立つなど重要な性質をもっており，それ以降の弱正則モジュラー形式の研究に大きな進展を与えた．基底のフーリエ係数の性質や零点分布などに関する研究が近年盛んに行われている．

弱正則モジュラー形式の零点分布については，2008 年に Duke と Jenkins がモジュラー群に対する標準的な基底を構成したのと同時に，その標準的な基底のうちほとんど全てのものが任意の零点を円弧上にもつことを証明した．モジュラー群だけではなく他の群に対する零点分布の研究も行われている．代表的なものとして合同部分群に関する結果がある．N を自然数としたとき，ウェイト k でレベル N の弱正則モジュラー形式のなす線形空間を $M_k^!(N)$ とし，無限遠点でのみ極を許すレベル N の弱正則モジュラー形式からなる $M_k^!(N)$ の部分空間を $M_k^\#(N)$ によって定義する．2013 年に Garthwaite と Jenkins は，N =2,3 に対して，$M_k^\#(N)$ の基底が無限遠点での極の位数がウェイトに比べて十分大きいとき零点の大部分が円弧上に存在することを示した．2014 年に Haddock と Jenkins がレベル 4 について類似の結果を証明した．$M_k^\#(N)$ の基底についてはこのような結果が得られているが，$M_k^\#(N)$ の一般の元の零点分布については今までに研究されていなかった．本論文では次の主定理により， レベル 1 においてある線形結合によって定義される $M_k^\#(1)$ の一般の元の零点分布を得ることに初めて成功した．

（主定理）$f_{k,m}$を $M_k^!(1)$ の基底とする．Δ を Ramanujan Δ 関数すなわちウェイト 12 でレベルが 1 のカスプ形式とする．a_j を実数としたとき，ウェイトが k でレベルが 1 の弱正則モジュラー形式 $g_{k,m}$を $g_{k,m} := f_{k,m} + \sum_{j=1}^{l+m} a_j f_{k-12j,m}\Delta^j$ (ただし $k=12l+k'$, $k' = 0,4,6,8,10,14$)によって定義する． a_j があるを仮定を満たすとき，$g_{k,m}$ の任意の零点は基本領域の円弧上に存在する．

また $g_{k,m}$ が有理数 a_j をもつとき，その零点の超越性について結果を得た．零点分布に関してはレベル 2 についても類似の結果を証明することができた．

零点分布を証明するためにはモジュラー形式の絶対値の評価を行う必要がある．そのためにモジュラー形式の q 展開を主要項と，主要項に比べ十分小さくなるような末尾項に分けてその評価を行う．先行研究では主要項の最大値の評価を自明な評価で行っているため，粗いものとなっている．本論文では主要項の導関数の評価と膨大な有限個の点について主要項の計算を行うことで，非常に厳密な評価となっている．一般的に弱正則モジュラー形式が零点を基本領域の円弧上にもつのに，カスプでの極の位数がウェイトに比べ十分大きいという仮定が必要になる傾向がある．本論文の手法で厳密な評価が可能になったため，カスプでの極の位数とウェイトの間に必要な仮定の条件を改良することに成功した．

本論文の構成は以下の通りである．最初に第 2.1 節で弱正則モジュラーの定義を復習し，第 2.2 節で弱正則モジュラー形式の基底の母関数とそれに関連する積分表示を述べる．第 2.3 節でレベル 1 における主定理の証明の概略を述べ，第 2.4 節で弱正則モジュラー形式の評価の詳細な証明を与える．次に第 3 節では，まず j 関数に関連する超越性や虚二次体に関する補題を確認し，レベル 1 のときの零点の超越性を考察する．最後に第 4 節でレベル 2 における結果を証明する．このときの結果は 3 つの場合からなる．まず第 4.1 節で $M_k^\#(2)$ の基底を構成し，レベル 2 の零点分布の 3 つの結果を述べる．次に第 4.2 節で Garthwaite と Jenkins のレベル 2 の基底における結果を同じ条件下で，ある線型結合からなる弱正則モジュラー形式に一般化した場合の定理を証明する．しかしここでは係数 a_j について非常に強い仮定が必要になる．そこで Garthwaite と Jenkins のレベル 2 の基底における結果で必要になる仮定を緩めた場合を考える．仮定を緩めることにより円孤上の存在を保証できる零点の数は若干減るが，Garthwaite と Jenkins の結果に比べ非常に扱いやすい結果を得る．この証明を第 4.3 節で与える．第 4.4 節では第 4.3 節で得られた結果をある線型結合からなる弱正則モジュラー形式に一般化した場合の証明を与える．

今日まで行われている弱正則モジュラー形式の研究は，多くのものがその基底に関するものである．本論文では上述のように定義されたより一般的な弱正則モジュラー形式について初めて考察を行った．さらにモジュラー群だけではなくレベル 2 の合同部分群でも類似の結果を得ることができたことから，他の群に対する一般の弱正則モジュラー形式を考察する際に，本論文は先駆的ものであると大いに期待される．