

## ISOR(s) 法前処理を用いたリストスタート付きGCR(m) 法の収束性

関本, 幹  
九州大学工学部電気情報工学科

日下部, 雄三  
九州大学大学院 システム情報科学府情報工学専攻

尾上, 勇介  
九州大学大学院 システム情報科学府情報工学専攻

藤野, 清次  
情報基盤研究開発センター

<https://doi.org/10.15017/17891>

---

出版情報 : 九州大学大学院システム情報科学紀要. 15 (1), pp.31-36, 2010-03-26. 九州大学大学院システム情報科学研究所

バージョン :

権利関係 :

# ISOR( $s$ )法前処理を用いたリスタート付きGCR( $m$ )法の収束性

関本 幹\* · 日下部雄三\*\* · 尾上勇介\*\*\* · 藤野清次†

## Convergence of Restarted GCR( $m$ ) Method Using ISOR( $s$ ) Preconditioning

Takashi SEKIMOTO, Yuzo KUSAKABE, Yusuke ONOUE and Seiji FUJINO

(Received December 11, 2009)

**Abstract:** The conventional SOR (Successive Over-Relaxation) method started from the dissertation by D. Young in 1950. Though the SOR method has been often utilized for the solution of problems which occur from a rich variety of applications, the SOR method has a certain issue that the SOR method greatly depends on spectrum of iteration matrix. As a consequence, convergence of the SOR method is not robust. In this article, we extend IDR (Induced Dimension Reduction) Theorem to designing of the residual of the SOR method, and accelerate its robustness of convergence. Numerical experiments indicate significantly improved residual compared with that of the conventional SOR method.

**Keywords:** IDR Theorem, GCR( $m$ ) method, SOR method, ISOR( $s$ ) method

### 1. はじめに

大規模な非対称行列 $A$ を係数行列に持つ連立一次方程式の求解において、2001年、阿部らにより、Generalized Conjugate Residual method (一般化共役残差法、以下、GCR( $m$ )法、 $m$ はリスタート回数を表す)の可変的前処理にSuccessive Over-Relaxation method (逐次過剰緩和法、以下、SOR法)を適用したVariable Preconditioned GCR( $m$ )[SOR]法(以下、VPGCR( $m$ )[SOR]法と略す)が発表された<sup>1)</sup>。これは、前処理行列 $K$ が係数行列 $A$ の近似であること、およびGCR( $m$ )法の反復過程で表れる $K^{-1}v$ の計算に着目し、反復過程で解かなければならない連立一次方程式 $Kz = v$ の代わりに、方程式 $Az = v$ をSOR法によって近似的に解く解法である。方程式 $Ax = b$ を解く際の反復を外部反復、 $Az = v$ を解く際の反復を内部反復とすると、外部および内部反復に用いる解法の組み合わせを任意に選択することができることに特徴がある<sup>2)5)</sup>。

2009年、日下部らによりIDR定理<sup>6)8)</sup>をSOR法に適用したIDR based SOR method (以下、ISOR法と略す)が発表された<sup>4)</sup>。論文4)において、ISOR法が従来のSOR法よりも収束性が優れていることが初めて示された。さらに、尾上らにより、ISOR法の空間の次数を $s$ 次に拡張したISOR( $s$ )法が提案され、次数 $s$ の増加により、ISOR( $s$ )

法が元のISOR法よりもさらに収束性が向上することが明らかにされた<sup>3)</sup>。そこで、GCR( $m$ )法の可変的前処理の反復法としてISOR( $s$ )法を適用することが考えられる。本研究では、GCR( $m$ )法の可変的前処理にISOR( $s$ )法を適用したVPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )]法を提案し、その収束性を評価する。また、VPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )]法の内部反復が最大内部反復回数まで達した場合に相対残差の2ノルムが最小となるときの解を採用するVPGCR( $m$ )[minimized-ISOR( $s$ )]法(以下、VPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法と略す)の収束性についても報告する。

本稿の構成は以下の通りである。第2節で、元のISOR法の算を紹介する。第3節で、空間次数 $s$ を増やしたISOR( $s$ )法の算を記述する。第4節で、可変的前処理つきVPGCR( $m$ )[ISOR]法の算を記す。続く第5節で、VPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法の算を記す。第6節で、数値実験を通して、VPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )]法とVPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法の収束性を明らかにする。最後に、第7節でまとめと今後の課題を述べる。

### 2. ISOR法

本節では、論文4)の記述に従いISOR法の概略を述べる。解くべき連立一次方程式を

$$Ax = b \tag{1}$$

とする。ただし、係数行列 $A$ は大きさ $n \times n$ の実非対称行列、 $x$ と $b$ は次数 $n$ の解ベクトルと右辺ベクトルと各々する。次に、係数行列 $A$ を $A = M - N$ と分離する。ここで、行列 $M$ 、 $N$ は正則行列とする。このとき、上記の連立一

平成21年12月11日受付

\* 工学部電気情報工学科

\*\* 情報工学専攻修士課程

\*\*\* 情報学専攻博士後期課程

† 情報基盤研究開発センター

次方程式は次のように書き直される．

$$Mx = Nx + b \quad (2)$$

この関係式を元に次の漸化式を考える．

$$x_{k+1} = Bx_k + b', \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

ただし,  $B = NM^{-1}$ ,  $b' = M^{-1}b$ であり,  $x_0$ は初期近似解ベクトルとする．一方, 残差ベクトル $r_k$ は次の式で定義する．

$$r_k = Bx_k + b' - x_k. \quad (4)$$

これより, 近似解ベクトル $x_{k+1}$ と残差ベクトル $r_{k+1}$ は次の漸化式で表せる．ただし,  $r_0 = M^{-1}(b - Ax_0)$ である．

$$x_{k+1} = x_k + r_k, \quad (5)$$

$$r_{k+1} = Br_k. \quad (6)$$

次に, IDR定理より, 式(6)を拡張した残差 $r_{k+1}$ に関する次の関係式が満される．

$$r_{k+1} = B(r_k - \gamma_k(r_k - r_{k-1})). \quad (7)$$

ここで, 係数 $\gamma_k$ は, IDR定理で導入された任意ベクトル $p$ との直交関係, すなわち,

$$(p, r_k - \gamma_k(r_k - r_{k-1})) = 0 \quad (8)$$

から求められる．さらに, 式(7)から近似解ベクトルは次の漸化式で表される．

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= r_k - \gamma_k B(x_k - x_{k-1}) \\ &= r_k - \gamma_k(r_k - r_{k-1}) - \gamma_k(x_k - x_{k-1}). \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, 差分ベクトル

$$dx_k = x_k - x_{k-1}, \quad (10)$$

$$dr_k = r_k - r_{k-1} \quad (11)$$

とおくと, 近似解ベクトル $x_{k+1}$ と残差ベクトル $r_{k+1}$ は次の漸化式で表現される．

$$x_{k+1} = x_k + M^{-1}(r_k - \gamma_k dr_k) - \gamma_k dx_k, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= B(r_k - \gamma_k dr_k) \\ &= NM^{-1}(r_k - \gamma_k dr_k). \end{aligned} \quad (13)$$

ただし,  $r_k$ を $r'_k$ と置き換え,  $r'_k = M^{-1}r_k$ とする．次に, 係数行列 $A$ を $A = L + D + U$ のように分離する．ここで,  $L, D, U$ は係数行列 $A$ の狭義下三角行列, 対角行列, 狭義上三角行列と各々する．このとき, SOR法の反復行列 $B = NM^{-1}$ は加速係数 $\omega$ を含む

$$M = L + \frac{1}{\omega}D, \quad (14)$$

$$N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D - U \quad (15)$$

で定義される．以下に, ISOR法の算法を示す．ただし,  $\epsilon$ は収束の要求精度を表す微小な数である．

### ISOR法

Let  $x_0$  be an initial solution,

put  $r_0 = b - Ax_0$ ,

Let  $p$  be a random vector,

set  $\gamma_0 = 0$ ,

for  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$s_k = \left(L + \frac{1}{\omega}D\right)^{-1}(r_k - \gamma_k dr_k),$$

$$dx_{k+1} = s_k - \gamma_k dx_k,$$

$$dr_{k+1} = -\left(\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)D + U\right)s_k - r_k,$$

$$r_{k+1} = r_k + dr_{k+1},$$

$$x_{k+1} = x_k + dx_{k+1},$$

if  $\|r_{k+1}\|_2 / \|r_0\|_2 \leq \epsilon$  then exit,

$$\gamma_{k+1} = (p, r_{k+1}) / (p, dr_{k+1}),$$

end for.

係数  $\gamma_{k+1}$  の計算には1通りの選択法がある．その1番目は, 任意ベクトル  $p$  と  $r_k - \gamma_k dr_k$  の直交条件から求める選択法である．すなわち, 式(8)より

$$\gamma_{k+1} = (p, r_{k+1}) / (p, dr_{k+1}) \quad (16)$$

と定める方法であり, これを選択1と呼ぶ．その2番目は, 残差ベクトル  $r_{k+1}$  の更新式において, 括弧中の式の2ノルム:  $\|r_k - \gamma_k dr_k\|_2$  の最小化条件から求める選択法である．すなわち,

$$\gamma_{k+1} = (dr_{k+1}, r_{k+1}) / (dr_{k+1}, dr_{k+1}) \quad (17)$$

と定める方法であり, これを選択2と呼ぶ．

### 3. ISOR(s)法

論文3)の記述に従い, ISOR法の空間を $s$ 次に拡張することを考える．残差ベクトル  $r_{k+1}$  の漸化式は式(7)より次のように拡張される．

$$r_{k+1} = B\left(r_k - \sum_{j=0}^s \gamma_{k-j} dr_{k-j}\right). \quad (18)$$

ここで, 補助ベクトル $w_k$ を $w_k = (r_k - \sum_{j=0}^s \gamma_{k-j} dr_{k-j})$ と定義すると, 係数  $\gamma_{k-j}$  の計算は, 補助ベクトル  $w_k$  と  $N \times s$  行列  $P = (p_1 p_2 \dots p_s)$  の転置  $P^T$  の直交条件から求められる．すなわち,

$$P^T w_k = 0 \quad (19)$$

である．以下に，ISOR( $s$ )法の算法を示す．ここで， $e_{k+1}$  は， $k+1$  番目の要素が 1 で，それ以外の要素が 0 の  $s$  次元ベクトルを表す．

### ISOR( $s$ )法

Let  $\mathbf{x}_0$  be an initial guess, put  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ ,  
 $P = (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_s) \in R^{N \times s}$ , set  $\gamma_0 = 0$ ,  
 {initial loop : build matrices  $E = (d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_s)$ ,  
 $Q = (d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_s)$  by ISOR method}  
 for  $k = 0, 1, \dots, s-1$ ,  
 $\mathbf{s}_k = (L + \frac{1}{\omega}D)^{-1}(\mathbf{r}_k - \gamma_k d\mathbf{r}_k)$ ,  
 $d\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{s}_k - \gamma_k d\mathbf{x}_k$ ,  
 $d\mathbf{r}_{k+1} = -((1 - \frac{1}{\omega})D + U)\mathbf{s}_k - \mathbf{r}_k$ ,  
 $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + d\mathbf{r}_{k+1}$ ,  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + d\mathbf{x}_{k+1}$ ,  
 if  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq \epsilon$  then exit,  
 $\gamma_{k+1} = (\mathbf{p}, \mathbf{r}_{k+1}) / (\mathbf{p}, d\mathbf{r}_{k+1})$ ,  
 $E\mathbf{e}_{k+1} = d\mathbf{r}_{k+1}$ ,  $Q\mathbf{e}_{k+1} = d\mathbf{x}_{k+1}$ ,  
 end for,  
 $M = P^T E$ ,  $\mathbf{f} = P^T \mathbf{r}_s$ ,  
 $k = s$ ,  $n = 1$ ,  
 {main loop}  
 while  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 > \epsilon$ ,  
 solve  $\mathbf{c}$  from  $M\mathbf{c} = \mathbf{f}$ ,  
 $\mathbf{s}_k = (L + \frac{1}{\omega}D)^{-1}(\mathbf{r}_k - E\mathbf{c})$ ,  
 $d\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{s}_k - Q\mathbf{c}$ ,  
 $d\mathbf{r}_{k+1} = -((1 - \frac{1}{\omega})D + U)\mathbf{s}_k - \mathbf{r}_k$ ,  
 $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + d\mathbf{r}_{k+1}$ ,  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + d\mathbf{x}_{k+1}$ ,  
 $E\mathbf{e}_n = d\mathbf{r}_{k+1}$ ,  $Q\mathbf{e}_n = d\mathbf{x}_{k+1}$ ,  
 $M\mathbf{e}_n = P^T d\mathbf{r}_{k+1}$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{f} + M\mathbf{e}_n$ ,  
 $k = k + 1$ ,  $n = n + 1$ ,  
 if  $n > s$  then  $n = 1$ ,  
 end while.

#### 4. VPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )]法

大きさ  $n \times n$  の正則行列  $K$  を選び，方程式(1)の代わりにこれと同値な方程式

$$(AK^{-1})(K\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad (20)$$

を考える．ただし，正則行列  $K$  は前処理行列とする．従来の前処理付きGCR( $m$ )法では，前処理行列  $K$  を定め，反復過程で  $K^{-1}\mathbf{v}$  を計算する．ここで，前処理行列  $K$  が係数行列  $A$  と近似的に等しいという性質，すなわち，

$$K \approx A \quad (21)$$

に着目すると， $K^{-1}\mathbf{v}$ は

$$K^{-1}\mathbf{v} \approx A^{-1}\mathbf{v} \quad (22)$$

のように近似できる．論文1)では， $K^{-1}\mathbf{v}$ の代わりに，次の方程式を解くことによって $A^{-1}\mathbf{v}$ の近似を求める．

$$A\mathbf{z} = \mathbf{v}. \quad (23)$$

方程式(23)を反復解法で解く場合，要求精度と最大反復回数の設定が必要になる．以下に，VPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )]法の算法を示す．

### VPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )]法

Let  $\mathbf{x}_0$  be an initial guess,  
 repeat,  
 set  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ ,  
 {roughly solve  $A\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$  by using ISOR( $s$ ) method to get  $\mathbf{p}_0$ },  
 set  $\mathbf{q}_0 = A\mathbf{p}_0$ ,  
 for  $k = 0, 1, \dots, m-1$ ,  
 $\alpha_k = (\mathbf{r}_k, \mathbf{q}_k) / (\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_k)$ ,  
 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$ ,  
 $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{q}_k$ ,  
 if  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq \epsilon$  then exit,  
 {roughly solve  $A\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1}$  by using ISOR( $s$ ) method to get  $\mathbf{z}_{k+1}$ },  
 $\beta_{k,i} = -(A\mathbf{z}_{k+1}, \mathbf{q}_i) / (\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i)$ ,  $i \leq k$ ,  
 $\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \sum_{i=0}^k \beta_{k,i} \mathbf{p}_i$ ,  
 $\mathbf{q}_{k+1} = A\mathbf{z}_{k+1} + \sum_{i=0}^k \beta_{k,i} \mathbf{q}_i$ ,  
 end for,  
 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_m$ ,  
 end repeat.

さらに，内部反復の停止条件として，条件1, 2のいずれか一方の条件を満たした場合に内部反復を停止する．

1.  $\|\mathbf{r}_{k+1} - A\mathbf{z}_{k+1}^{(t)}\|_2 / \|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 \leq \delta$
2. (内部反復における最大反復回数  $t$ ) =  $N_{\max}$

ここで，下付き添え字  $k+1$  は外部反復回数，上付き添え字 ( $t$ ) は内部反復回数をそれぞれ表す．条件1はプログラム上では相対残差で求める．内部反復  $t$  回目の内部反復の残差ベクトルを  $\mathbf{v}_{in}^{(t)}$  とすると，条件1は  $\|\mathbf{v}_{in}^{(t)}\|_2 / \|\mathbf{v}_{in}^{(0)}\|_2 \leq \delta$  と書き換えられる．

#### 5. VPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法

第4節で述べたVPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )]法の算法では，内部反復の反復回数が  $N_{\max}$  回に達した場合，反復  $N_{\max}$  回目のベクトル  $\mathbf{z}_{k+1}$  を採用する．しかし，ISOR( $s$ )法の

残差ノルムは一般に振動するので、反復  $N_{\max}$  回目の相対残差残差の2ノルムが最小になるとは限らない．そこで、内部反復が反復  $N_{\max}$  回に達した場合、反復  $N_{\max}$  回目までの最小の相対残差の2ノルムを保存しておき、それを  $z_{k+1}$  として採用することにする．以下に、VPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法の算法を示す．

### VPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法

Let  $x_0$  be an initial guess,

repeat,

set  $r_0 = b - Ax_0$ ,

{roughly solve  $Ap_0 = r_0$  by using ISOR( $s$ ) method

to get  $p_0$  minimizing  $\|r_0 - Ap_0^{(t)}\|_2$ },

set  $q_0 = Ap_0$ ,

for  $k = 0, 1, \dots, m - 1$ ,

$\alpha_k = (r_k, q_k) / (q_k, q_k)$ ,

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ ,

$r_{k+1} = r_k - \alpha_k q_k$ ,

if  $\|r_{k+1}\|_2 / \|r_0\|_2 \leq \epsilon$  then exit,

{roughly solve  $Az_{k+1} = r_{k+1}$  by using ISOR( $s$ )

method to get  $z_{k+1}$  minimizing  $\|r_{k+1} - Az_{k+1}^{(t)}\|_2$ },

$\beta_{k,i} = -(Az_{k+1}, q_i) / (q_i, q_i), \quad i \leq k$ ,

$p_{k+1} = z_{k+1} + \sum_{i=0}^k \beta_{k,i} p_i$ ,

$q_{k+1} = Az_{k+1} + \sum_{i=0}^k \beta_{k,i} q_i$ ,

end for,

$x_0 = x_m$ ,

end repeat.

## 6. 数値実験

### 6.1 テスト行列

Table 1にテスト行列の特徴を示す．表の上位6個の行列はフロリダ大学の疎行列データベース<sup>7)</sup>から選出し、残りの行列wasedaは、早稲田大学若尾研究室提供の行列である．

Table 1 Specifications of test matrices.

matrix	dimension	NNZ	ave. NNZ	analytical field
2007OK01	54,903	3,990,483	72.68	structural
poisson3Da	13,514	352,762	26.10	
poisson3Db	85,623	2,374,949	27.74	
xenon1	48,600	1,181,120	24.30	
xenon2	157,464	3,866,688	24.56	
raefsky2	3,242	294,276	90.77	
waseda	19,060	24,377,548	1278.99	hydro-dynamic electro-phys

### 6.2 計算機環境と計算条件

計算機環境と計算条件は次の通りである．計算はすべて倍精度浮動小数点演算で行った．計算機はHP

Workstation xw4200 (CPU: Intel(R) Pentium(R) 4, クロック周波数: 3.8GHz, メモリ: 3Gbytes, OS: Suse Linux version 9.2, ホスト名: mizar) を用いた．プログラムはFortran90を用いて実装し、最適化オプションは-O3を使用した．

右辺項ベクトル  $b$  は厳密解を  $\hat{x} = (1, 2, \dots, n)^T$  とし、 $b = A\hat{x}$  で作成した．収束判定条件は相対残差の2ノルム:  $\|r_{k+1}\|_2 / \|r_0\|_2 \leq 10^{-8}$  とした．初期近似解  $x_0$  はすべて0とした．行列は予め対角スケーリングによって対角項をすべて1.0に正規化した．調べた反復法は、VPGCR( $m$ )[SOR]法、VPGCR( $m$ )[ISOR2]法、VPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )]法、VPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法の計4種類である．VPGCR( $m$ )[ISOR2]法のISOR2は、ISOR法の係数  $\gamma_{k+1}$  を選択2とした解法とする．各反復法の最大外部反復回数は10000回とし、リスタート回数は40回とした．可変的前処理では、最大内部反復回数を50, 100, 150, 200回とする4通りとし、内部反復の停止条件を  $10^{-3.0}$  とした．また、加速係数  $\omega$  は1.0から1.9までの0.1刻みで10通りとした．VPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )]法およびVPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法では、次数  $s$  を1, 2, 4, 8とする4通りとした．

### 6.3 実験結果

Table 2に行列 poisson3DbにおけるVPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法の収束性を示す．Table 3に  $\omega$  を1.0に固定したときの各行列における4種類の解法の収束性を示す．Table 4に  $\omega$  を1.0に固定したときの各解法における収束した行列、最も速く収束した行列、VPGCR( $m$ )[SOR]法より速く収束した行列のケース数を示す．Table 5に  $\omega$  を変化させたときの各行列における4種類の解法の収束性を示す．Table 6に  $\omega$  を変化させたときの各解法における収束した行列、最も速く収束した行列、VPGCR( $m$ )[SOR]法より速く収束した行列のケース数を示す．

表中の時間の単位はすべて秒とする．各行列ごとに収束までの計算時間が最短のものを太字で表示した．表中の“method(in)”, “s”, “ $N_{\max}$ ”, “itr.(iteration)(out)”は内部反復の解法、次数、最大内部反復回数、外部反復回数を各々意味する．表中の“itr(iteration).(in)”において、“total”, “ave.(average)”は総内部反復回数、外部反復1回当たりの平均内部反復回数を各々意味する．表中の“time”, “TRR(True Relative Residual)”は計算時間、真の相対残差の常用対数値である  $\log_{10}(\|b - Ax_{k+1}\|_2 / \|b - Ax_0\|_2)$  を各々意味する．

Fig. 1に行列 poisson3Dbに対するVPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法の  $s$  の値を変化させたときの計算時間を示す．Fig. 2に行列wasedaに対する4種類の解法における外側反復の相対残差履歴を示す．Fig. 3に行列wasedaに対するVPGCR( $m$ )[SOR]法における外側反復と内側反復

の相対残差履歴を示す。Fig. 4に行列wasedaに対する VPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法における外側反復と内側反復の相対残差履歴を示す。

**Table 2** Convergence of VPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )] method for matrix poisson3Db.

matrix	$N_{\max}$	$s$	itr. (out)	itr. (in) total	itr. (in) ave.	time	TRR	ratio
poisson-3Db	50	1	15	750	50.0	15.65	-8.1	1.00
		2	10	500	50.0	11.13	-8.1	0.71
		4	6	300	50.0	8.42	-8.7	0.54
		8	3	300	50.0	11.66	-8.4	0.75
	100	1	6	571	95.2	11.68	-8.0	1.00
		2	4	376	94.0	8.37	-8.8	0.71
		4	3	257	85.7	6.82	-8.6	0.58
		8	3	262	87.3	10.54	-8.1	0.90
	150	1	4	521	130.3	10.63	-8.1	1.00
		2	3	376	125.3	8.17	-9.0	0.77
		4	3	308	102.7	8.28	-9.5	0.78
		8	3	292	97.3	11.04	-9.4	1.04
200	1	4	671	167.8	13.45	-9.6	1.00	
	2	3	378	126.0	8.37	-9.4	0.62	
	4	3	308	102.7	7.75	-9.5	0.58	
	8	3	292	97.3	10.85	-9.4	0.81	

**Table 3** Convergence of VPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )] VPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )] and other methods when  $\omega$  is fixed as  $\omega = 1.0$ .

matrix	method(in)	$s$	$N_{\max}$	itr. (out)	itr. (in) total	itr. (in) ave.	time	ratio
2007OK-01	SOR	-	50	30	1500	50.0	23.38	1.00
	ISOR2	-	200	3	540	180.0	8.63	0.37
	ISOR( $s$ )	4	150	5	750	150.0	13.51	0.58
	MISOR( $s$ )	4	150	5	750	150.0	13.72	0.59
poisson-3Da	SOR	-	50	10	500	50.0	1.06	1.00
	ISOR2	-	50	6	296	49.3	0.67	0.63
	ISOR( $s$ )	2	150	3	170	56.6	0.42	0.40
	MISOR( $s$ )	2	200	3	170	56.6	0.43	0.41
poisson-3Db	SOR	-	50	17	850	50.0	16.57	1.00
	ISOR2	-	50	7	350	50.0	7.31	0.44
	ISOR( $s$ )	4	150	3	308	102.6	7.80	0.47
	MISOR( $s$ )	4	100	3	257	85.7	6.82	0.41
xenon1	SOR	-	50	66	3300	50.0	20.41	1.00
	ISOR2	-	50	17	850	50.0	5.88	0.29
	ISOR( $s$ )	4	200	8	1600	200.0	13.00	0.64
	MISOR( $s$ )	4	200	7	1400	200.0	11.44	0.56
xenon2	SOR	-	50	76	3800	50.0	80.99	1.00
	ISOR2	-	100	11	1043	94.8	24.31	0.30
	ISOR( $s$ )	8	150	12	1800	150.0	74.48	0.92
	MISOR( $s$ )	8	200	8	1567	195.9	65.64	0.81
raefsky2	SOR	-	50	16	800	50.0	0.85	1.00
	ISOR2	-	50	14	700	50.0	0.78	0.92
	ISOR( $s$ )	4	150	3	446	148.7	0.53	0.62
	MISOR( $s$ )	4	150	3	446	148.7	0.55	0.65
waseda	SOR	-	50	6	300	50.0	24.68	1.00
	ISOR2	-	50	7	350	50.0	28.59	1.16
	ISOR( $s$ )	2	50	3	148	49.3	11.97	0.49
	MISOR( $s$ )	4	50	3	141	47.0	11.32	0.46

**Table 4** The number of the fastest case among some methods when  $\omega$  is fixed as  $\omega = 1.0$ .

method(in)	converged	fastest	faster than SOR method
SOR	7/7	0/7	-
ISOR2	7	3	6/7
ISOR( $s$ )	7	2	7
MISOR( $s$ )	7	2	7

**Table 5** Convergence of VPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )], VPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )] and other methods when  $\omega$  varies as  $\omega = 1.0, 1.1, \dots, 1.9$ .

matrix	method(in)	$s$	$\omega$	$N_{\max}$	itr. (out)	itr. (in) total	itr. (in) ave.	time	ratio
2007OK-01	SOR	-	1.0	50	30	1500	50.0	23.28	1.00
	ISOR2	-	1.0	200	3	540	180.0	8.59	0.37
	ISOR( $s$ )	4	1.0	150	5	750	150.0	13.51	0.58
	MISOR( $s$ )	4	1.0	150	5	750	150.0	13.72	0.59
poisson-3Da	SOR	-	1.8	50	3	150	50.0	0.32	1.00
	ISOR2	-	1.3	50	4	185	46.3	0.43	1.35
	ISOR( $s$ )	1	1.8	100	3	136	48.3	0.30	0.94
	MISOR( $s$ )	1	1.7	50	3	133	44.3	0.30	0.94
poisson-3Db	SOR	-	1.8	50	9	450	50.0	8.61	1.00
	ISOR2	-	1.0	50	7	350	50.0	7.27	0.84
	ISOR( $s$ )	4	1.3	100	3	259	86.3	6.98	0.81
	MISOR( $s$ )	4	1.0	100	3	257	87.3	6.82	0.79
xenon1	SOR	-	1.8	50	36	1800	50.0	11.16	1.00
	ISOR2	-	1.2	100	8	758	94.8	5.10	0.46
	ISOR( $s$ )	4	1.5	150	9	1350	150.0	11.16	1.00
	MISOR( $s$ )	4	1.2	200	5	976	195.2	8.18	0.73
xenon2	SOR	-	1.8	50	43	2150	50.0	45.76	1.00
	ISOR2	-	1.0	100	11	1043	94.8	24.36	0.53
	ISOR( $s$ )	4	1.5	200	8	1600	200.0	48.18	1.05
	MISOR( $s$ )	4	1.4	200	7	1400	200.0	42.53	0.93
raefsky2	SOR	-	1.0	50	16	800	50.0	0.85	1.00
	ISOR2	-	1.0	50	14	700	50.0	0.78	0.92
	ISOR( $s$ )	4	1.0	150	3	446	148.7	0.53	0.62
	MISOR( $s$ )	4	1.0	150	3	446	148.7	0.55	0.65
waseda	SOR	-	1.0	50	6	300	50.0	24.68	1.00
	ISOR2	-	1.0	50	7	350	50.0	28.59	1.16
	ISOR( $s$ )	8	1.1	50	3	145	48.3	11.64	0.47
	MISOR( $s$ )	4	1.1	50	3	141	47.0	11.31	0.46

**Table 6** The number of the fastest case among some methods when  $\omega$  varies as  $\omega = 1.0, 1.1, \dots, 1.9$ .

method(in)	converged	fastest	faster than SOR method
SOR	7/7	0/7	-
ISOR2	7	3	5/7
ISOR( $s$ )	7	2	5
MISOR( $s$ )	7	2	7

Tables 2-5およびFigs. 1-5の観察から、以下の知見を得ることができる。

- Table 3とTable 5において、各解法の近似解の精度は要求精度が $10^{-8}$ であるのに対し、Table 3では $10^{-7.8}$ から $10^{-9.5}$ 、Table 5では $10^{-7.9}$ から $10^{-10.2}$ であったので、各解法の信頼性は十分にある。しかし、紙面の都合で表から割愛する。
- VPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )]法とVPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法は、回数 $s$ を増加させると収束性が優れる。さらに、 $N_{\max}$ を増加させると収束性が優れるケースが多い。
- VPGCR( $m$ )[ISOR( $s$ )]法とVPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法では、VPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法の方が収束性が優れる。
- VPGCR( $m$ )[MISOR( $s$ )]法は全てのケースにおいてVPGCR( $m$ )[SOR]法よりも収束性が優れる。
- VPGCR( $m$ )法の可変的前処理にISOR( $s$ )法およびMISOR( $s$ )法を用いた解法は、VPGCR( $m$ )[SOR]法よりも外部反復回数と内部反復回数が少ない。

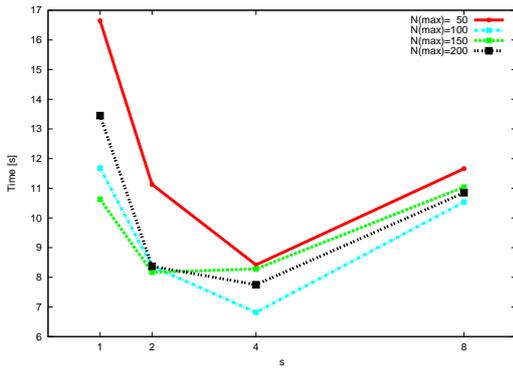


Fig. 1 Variation of computation time of VPGCR(m) [MISOR(s)] method with  $N_{\max} : 50, 100, 150, 200$  when  $s$  varies as  $s = 1, 2, 4, 8$  and  $\omega$  is fixed as  $\omega = 1.0$  for matrix poisson3Db.

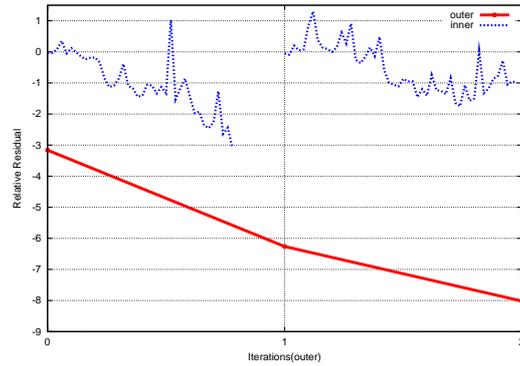


Fig. 4 The history of relative residual 2-norm of VPGCR(m) [MISOR(s)] method at each outer loop and inner loop for matrix waseda.

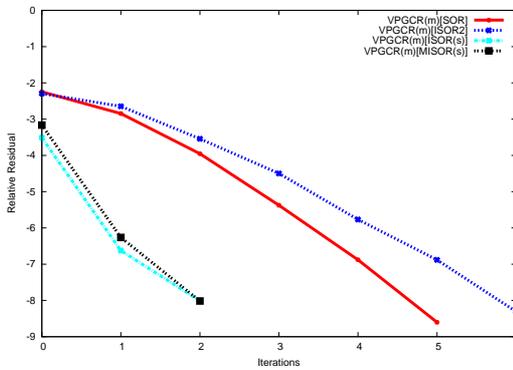


Fig. 2 The history of relative residual 2-norm of four methods for matrix waseda.

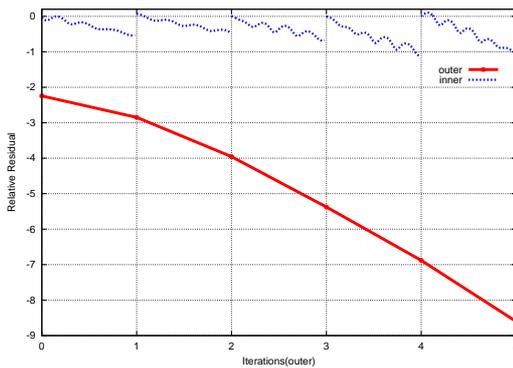


Fig. 3 The history of relative residual 2-norm of VPGCR(m) [SOR] method at each outer loop and inner loop for matrix waseda.

- Table 5より, 内部反復回数が $N_{\max}$ に達する前に内部反復が終了したケースは, VPGCR(m) [ISOR(s)]法では4ケース, VPGCR(m) [MISOR(s)]法では5ケースである.

## 7. ま と め

内部反復の相対残差が振動するVPGCR(m) [ISOR(s)]法において, 空間次数 $s$ の値を増やすと収束性が向上することがわかった. また, 最大内部反復回数が多いほど収束性が一層向上することがわかった. さらに, 内部反復回数が最大回数 $N_{\max}$ に到達した場合に相対残差が最小となる近似解に置き換えるVPGCR(m) [MISOR(s)]法がVPGCR(m) [ISOR(s)]法よりも一層収束性向上が際立つことがわかった.

## 参 考 文 献

- 1) 阿部邦美, 張紹良, 長谷川秀彦, 姫野龍太郎: SOR法を用いた可変的前処理付き一般化共役残差法, 日本応用数学会論文誌, Vol.11, No.4, pp.157-170, 2001.
- 2) 青戸大介, 石渡恵美子, 阿部邦美: 特異行列に対するGSOR法を用いた可変的前処理付きGCR法, 日本応用数学会論文誌, Vol.18, No.2, pp.271-284, 2008.
- 3) 藤野清次, 尾上勇介: IDR定理をベースにしたSOR法の提案, 加速法ワークショップ, U1-U6, 2009
- 4) 日下部雄三, 藤野清次, 春松正敏: Sonneveld型SOR法 vs. 古典的SOR法, 九州大学大学院システム情報科学紀要, Vol.14, No.2, pp.71-76, 2009.
- 5) 長原里華, 阿部邦美, 石渡恵美子, 藤野清次: 対角項に零を持つ線形方程式に対するSOR法を用いる可変的前処理付き一般化最小残差法, 日本計算工学会論文集, 2008.
- 6) Sonneveld, P., AGS - IDR - CGS - BiCGSTAB - IDR(s): The circle closed, A case of serendipity, The Proc. of Int. Kyoto Forum 2008 on Krylov subspace methods, pp.1-14, September, 2008.
- 7) University of Florida Sparse Matrix Collection: <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/index.html>
- 8) Wesseling, P., Sonneveld, P., Numerical Experiments with a Multiple Grid- and a Preconditioned Lanczos Type Methods, Lecture Notes in Math., Springer, No.771, pp.543-562, 1980.

