Diffusion Processes Associated with Sub-Laplacian on CR Manifolds

近藤, 宏樹

https://doi.org/10.15017/1785353

出版情報：九州大学, 2016, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式６－２）

氏　　　名	近　藤　宏　樹
論　文　名	Diffusion Processes Associated with Sub-Laplacian on CR manifolds (CR 多様体上のサブラプラシアンに付随する拡散過程)
論文調査委員	主　査　　九州大学　　教授　　谷口　説男 副　査　　九州大学　　教授　　長田　博文 副　査　　九州大学　　教授　　稲濱　譲 副　査　　九州大学　　教授　　白井　朋之

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

確率微分方程式を用いたユークリッド空間上の拡散過程の構成は 1942 年に伊藤清により創始された。それまでの偏微分方程式の基本解を用いた Kolmogorov 流の解析的な拡散過程の構成方法とは異なり、これはランダムに時間発展する粒子のダイナミクスを記述するより確率論的な手法である。その後直ちに伊藤の導入したブラウン運動で駆動される確率微分方程式はより一般な確率過程であるマルチンゲールで駆動されるものへと拡張され、それらを礎として現在 Ito 解析と呼ばれている確率解析の一分野が発展した。このマルチンゲールへの拡張は、1970 年代から爆発的に発展した確率解析の数理ファイナンスへの応用における基盤となるものである。また、1970 年代に開発された Malliavin 解析との融合においても、確率微分方程式の強い解を得ることは重要であった。

確率微分方程式を導入した伊藤は直ちに確率微分方程式を多様体へと拡張した。彼の構成法は局所座標近傍で作った拡散過程を貼り合わせていくという局所的なものであったが、その後、より大域的な多様体上の拡散過程の研究が 20 世紀後半に精力的に展開された。これらの研究の対象となったのはリー群上の拡散過程のように生成作用素がベクトル場の平方和となっているものやリーマン多様体上のラプラス-ベルトラミ作用素のような楕円型作用素を生成作用素とするものであった。とくにリーマン多様体上のラプラス-ベルトラミ作用素に付随する拡散過程（リーマン多様体上のブラウン運動）の構成における、直交枠束上の確率微分方程式を利用する Eells-Elworthy-Malliavin の方法は大域幾何学と非常に整合性のとれた構成方法であった。

近年、サブラプラシアンにより生成される拡散過程の解析的手法による研究が盛んになってきている。そのようなサブラプラシアンの典型例として、強擬凸 CR-多様体上の Kohn-Rossi 作用素の実部として得られる微分作用素 Δ_b がある。一般に Δ_b は大域的にはベクトル場の平方和として表示することはできず、リーマン多様体上のブラウン運動と同様に特別な構成方法が必要となる。本学位論文の主題の一つは Eells-Elworthy-Malliavin の方法を CR-多様体上のユニタリ束に拡張することで $-\Delta_b/2$ で生成される拡散過程を構成することであり、今一つは構成された拡散過程の確率解析的応用について論ずることである。

学位論文は第 1 章が序章であり、第 2 章、第 3 章は準備の章であるが、第 3 章の強擬凸 CR-多様体の Folland-Stein 局所座標系の漸近展開に関する結果は後の考察のために不可欠な精密化となっている。第 4 章と第 5 章に新たに得られた結果が述べられている。

第 4 章では、Tanaka-Webster 接続を利用して、強擬凸 CR-多様体上のユニタリ枠束に水平基本ベクトル場を導入し、それが制御する確率微分方程式の解の CR-多様体への射影が、$-\Delta_b/2$ に付随

する拡散過程（以下、「CR-ブラウン運動」と称す）を定めることを示している。このような複素ベクトル束を利用した実拡散過程の構成は CR-多様体の構造から自然なものであるが、これまで考察されたことがない新規性に富むものである。また、リーマン多様体上のブラウン運動の構成に限られていた Eells-Elworthy-Malliavin の構成方法の拡がりを示すものとしても興味深い。

第 5 章では、CR-ブラウン運動と Malliavin 解析を組み合わせることで、$-\Delta_b/2$ に付随する熱方程式の基本解の Wiener 超汎関数表現、CR-ブラウン運動に沿う 1-微分形式の確率線積分が密度関数を持つための十分条件が与えられている。これらはリーマン多様体上での確率微分幾何学の研究における研究結果に対応する CR-多様体上の結果となっている。さらに、C3-境界を持つ有界領域上の Dirichlet 問題の解の CR-ブラウン運動とその離脱時間を用いた期待値表現も得ている。これらはすべて CR-幾何学とユニタリ枠束上の確率微分方程式とを緊密に連結することで得られる結果であり、古典的な結果を CR-多様体上へと拡張してみせた興味深い結果となっている。さらに、熱方程式の基本解の考察と確率線積分に関する考察は、2 階偏微分作用素の部分準楕円性に対する Malliavin 解析の新たな適用例としても重要である。

第 6 章では、前章で得た Wiener 超汎関数表現を利用して、熱核の対角線上での短時間漸近展開を証明している。このような漸近展開は擬微分作用素を用いた解析的手法ですでに証明されており、また、確率解析的には Takanobu や Ben Arous による一般論を用いたアプローチも可能である。近藤は、Folland-Stein 局所座標を精密化して CR-ブラウン運動が局所的には Heisenberg 群上の拡散過程の摂動として実現されることから CR-ブラウン運動を漸近展開し、熱核の漸近展開を導出した。一般に摂動による Wiener 汎関数の漸近展開はオーダーの決定が困難であるが、本学位論文では Heisenberg 群上の拡散過程の特殊性を有効に利用することで摂動による漸近展開を可能としている。Folland-Stein 局所座標を利用することにより、漸近展開係数が自然に CR-幾何学的特性量、とくに Tanaka-Webster 接続を反映するものとなることも導かれている。本結果はサブリーマン幾何学、ハイゼンベルグ多様体への確率解析的アプローチの端緒となるものであり、高く評価できる。

以上の結果は、退化した 2 階微分作用素に対する確率解析的アプローチを CR-多様体上で具体的に展開し、古典的な解析学への確率解析の応用の実現に加え、熱核の短時間漸近展開に新たな確率幾何学的解釈を与えており、さらに一般のハイゼンベルグ多様体、サブリーマン多様体への展開も期待できる確率解析分野において価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。