CR多様体上のサブラプラシアンに付随する拡散過程

近藤, 宏樹

https://doi.org/10.15017/1785353

出版情報：Kyushu University, 2016, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式３）

氏　　名　：近藤 宏樹

論 文 名　：Diffusion Processes Associated with Sub-Laplacian on CR Manifolds
（CR 多様体上のサブラプラシアンに付随する拡散過程）

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

本論文の目的は、強擬凸 CR 多様体上の実サブラプラシアンに伴う拡散過程を構成し、その応用を述べることである。以下、M を強擬凸 CR 多様体とし、Δ_b を M 上の実サブラプラシアン、すなわち Kohn-Spencer ラプラシアンの実部とする。Δ_b に伴う拡散過程が本論文の興味の対象である。

多様体上の拡散過程に関しては、古くは K. Itô による研究を始めとして長い研究の歴史があるが、体系的な研究は、生成作用素が楕円型微分作用素の場合や Lie 群上の作用素のようなベクトル場の二乗和の形をした Hörmander 型微分作用素の場合が中心であった。一方で近年では、Gordina-Laetsch によるサブ Riemann 多様体上の Brown 運動の構成など、サブ Riemann 幾何学に対応した研究も進んでいる。本論文では、準楕円型作用素であり、かつ大域的に Hörmander 型とはならない微分作用素の場合である強擬凸 CR 多様体のラプラシアン Δ_b に対して確率解析的な考察を行った。

Δ_b に伴う拡散過程は、Riemann 多様体上の Brown 運動、すなわち Laplace-Beltrami 作用素に伴う拡散過程の CR 多様体における対応物と捉えられる。Riemann 多様体の Brown 運動の構成方法の一つとして、Eells, Elworthy 及び Malliavin による方法が知られている。この方法は、Riemann 多様体上の直交枠束の上における確率微分方程式の解を考え、その解が回転不変性を持つことを利用してもとの多様体上に射影することで Riemann 多様体上の Brown 運動を実現するものである。本論文では、この方法を CR 多様体上で実行することで Δ_b に伴う拡散過程を構成した（Theorem 4.10)。ただし、CR 構造が接束の複素化の複素部分束 $T_{1,0}$ として定義されることに対応して、直交枠束の代わりに複素ユニタリ枠束を用いている。また、Riemann 多様体上の Brown 運動の構成においては、Levi-Civita 接続に関する水平持ち上げを用いて定義される標準ベクトル場で統制される直交枠束上の確率微分方程式を用いるが、本論文ではこれに対応して複素部分束 $T_{1,0}$ 上の Tanaka-Webster 接続を用いて複素ユニタリ枠束上の標準ベクトル場を定義し、これにより確率微分方程式を定めた。

本論文の後半では、このようにして得た拡散過程の構成のいくつかの応用について述べた。最初に、Malliavin 解析における部分的準楕円性の議論により、拡散過程の推移確率が滑らかな密度関数を持つこと、すなわち Δ_b に伴う熱方程式が滑らかな熱核を持つことを示した（Theorem 5.2)。また、拡散過程に沿った 1 次微分形式の確率的線積分の分布が滑らかな密度関数を持つための十分条件を与えた（Theorem 5.9)。

次に、 Δ_b に伴う Dirichlet 問題について考察した。G を C^3 級の境界を持つ M の相対コンパクトな開集合とするとき、G の境界上では与えられた連続関数と一致し、弱い意味で G 上 $\Delta_b u = 0$

を満たすような G の閉包上の連続関数 u が存在することを確率論的に示した (Theorem 5.11)。この証明は、よく知られた確率論的方法による構成によって Dirichlet 問題が解けるための Stroock-Varadhan による十分条件を、CR 多様体の具体的な構造を用いて確かめる方法で行った。なお、Δ_b が準楕円型作用素であることから、この u は古典的な意味での Dirichlet 問題の解にもなっていることが従う。

また、拡散過程に対応する熱核の対角上の短時間漸近挙動について考察した。本論文では拡散過程を確率微分方程式の強解を用いて構成していることから、拡散過程に伴う熱核の漸近挙動を調べるにあたって、渡辺による漸近展開の理論を援用することができる。すなわち、拡散過程を定める確率微分方程式にパラメータ ε を付加した確率微分方程式の解を考え、その解を $\varepsilon = 0$ において漸近展開することができれば、デルタ関数と合成して一般化期待値をとることで熱核の漸近展開が得られることになる。

この方法を用いる際、パラメータ ε を付加した確率微分方程式の解を漸近展開することが必要となる。この点についてはより一般的な状況下で、確率論的 Taylor 展開を用いた結果が Takanobu により得られているが、本論文では確率論的 Taylor 展開によらず、CR 多様体の幾何構造により密接した方法で漸近展開を実行した。具体的には、まず熱核の対角上の短時間漸近挙動は局所近傍上で考えても変わらないことを見た後、Folland-Stein による局所座標系の漸近的な振る舞いを高次項まで記述した。この局所座標系は、拡散過程を定めるベクトル場の局所表示について、Heisenberg 群の場合との差分の漸近挙動を明らかにするものである。それを用いて Heisenberg 群の摂動としての議論を行うことで、熱核の漸近展開の各係数が Tanaka-Webster 接続を用いて表せること、また主要項は M の次元にのみ依存することを示した (Theorem 6.1)。

なお、擬微分作用素を用いた解析学的な方法では、(p,q) 形式に作用する Kohn-Spencer ラプラシアンに関する熱核の漸近展開が Beals-Greiner-Stanton により得られている他、Stanton により本論文と同様の実サブラプラシアン Δ_b に関する結果が得られている。確率解析の議論によって、非自明な非退化性が現れる漸近展開の例を具体的な幾何学的構造に沿って示しているところが本論文における意義である。

最後に、主要項の次の項に Tanaka-Webster 接続の係数が現れる様子を、Heisenberg 群と CR 球面の例で具体的な計算を実行することにより示した (6.2 節)。

以上