九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

移動平均法の周波数特性変化

馬田, 俊雄
九州大学応用力学研究所技術室

https://doi.org/10.15017/17836

出版情報：九州大学応用力学研究所技術職員技術レポート. 11, pp.9-16, 2010-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

移動平均法の周波数特性変化

九州大学応用力学研究所技術室　馬田俊雄

1.　はじめに

手軽に処理できるノイズ除去法に移動平均法がある。正確さは劣るが単にノイズの少ない波形にして、現象の本質を探りたい時に重宝する。筆者はこれまで技術レポートに移動平均法やフーリエ変換に関する数編の投稿をしてきた。今回、ノイズが除去できる原理や移動平均法を適用した場合の周波数特性の変化を改めて考察したので報告する。以下に記す内容は数学的な解明がなされ、既に周知の事実である。しかし、理論を知らない筆者が自分自身の独自考察から、わずかながら本質に近付けた点は勝手な評価であるが自己満足している。

2.　ノイズ削減の原理

実験データからノイズを削減する方法は色々あるが、詳細は過去の技術レポート[1)]を参照願いたい。

今回この中の移動平均法を議論する。過去の記述と重複するが、波形から実験現象を解釈する際にノイズがあると分かり難い。例えば計測波形では目立たなくても、速度や加速度を知るために微分や 2回微分、又は差動波形を求めるとノイズが顕著になる。説明は省くが、この例を図1に示す。

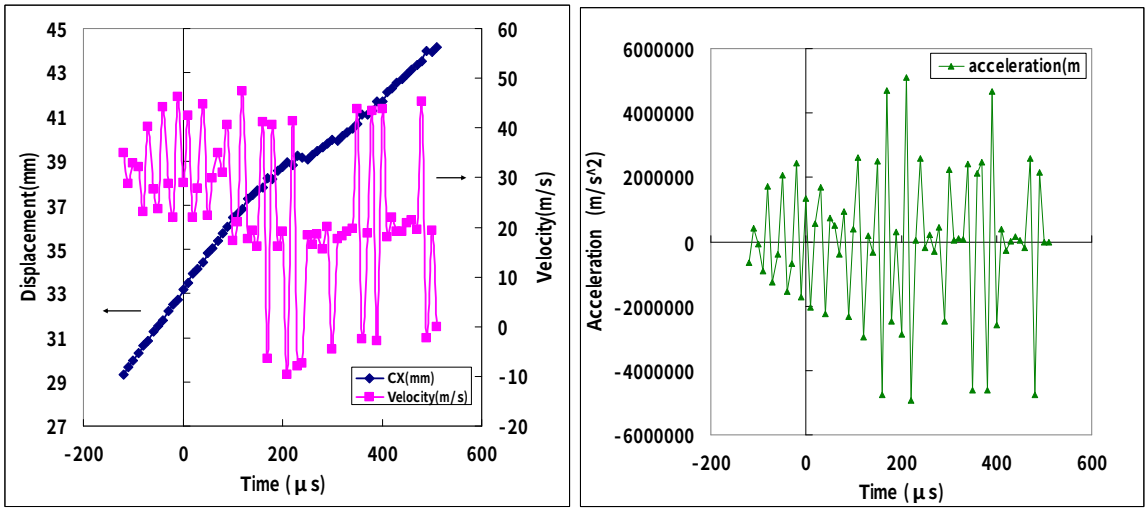


図1　微分（速度）、2回微分（加速度）でノイズの増大する例

そのような時、正確さを抜きにして手軽で短時間にノイズ除去波形を知りたいことがある。しかし，実験・観測データからノイズを除去するには高度な知識やプログラムが必要となる。パソコンで動作する身近なエクセルを用いて、この処理作業ができないかを考える。

そのためには、ノイズ除去の原理を知る必要がある。以下に代表的な2つの例を示す。

① ランダムノイズ(高周波振動を含む)であれば、真値に対して誤差を含むデータ点が上下に存在する確率は等しいという性質を持つ。従って、前後の時間におけるデータを和して平均すると

真値に近づく。これは移動平均法(moving averages method)と呼ばれている。考え方は異なるが、ノイズを減らす手法としては最小二乗法（least squares method）も有効である。

② 複雑な波形も多数の波の和で成り立っている。従って、周波数帯域に分離して不要と思える周波数を取り去った後に再合成可能であれば、真の波形に近づく。これはフーリエ解析・逆解析（**D**iscrete **F**ourier **T**ransformと**I**nverse **D**iscrete **F**ourier **T**ransform）と呼ばれている。

移動平均法と最小二乗法は共に表計算ソフト「エクセル」を用いれば、手軽にノイズ除去が可能である。移動平均処理を行うと波形の急激な変化に追随できずにピークをなだらかにすることがある。なお、異常値が入っている場合に最小二乗処理を行うと真の傾向を示さないことがある。いずれも、処理後のピーク値や波形変化の評価には注意が必要となる。

今回フーリエ解析と逆解析には詳しく触れないが、移動平均法の除去周波数を考える際に役に立つ。ノイズが含まれると移動平均法やFFT解析で処理しても完全な波形の本質を取り出すのは不可能に近い。元波形のSN比向上を第一とすべきであるが、デジタル的な後処理をして、見比べることで現象の本質に迫ることができる点には大きな有用性がある。現象の周波数帯が分かっている場合や処理後の絶対振幅値が問題になる場合にはFFT (Fast Fourier Transform)変換の方が勝っているが、「エクセル」によるFFT(Finite Fourier Transform)解析処理は面倒である。

3． 周波数特性変化理論への接近

体系化された理論を基に移動平均法の周波数変化を知るのは近道である。しかし、理論も最初から存在したわけではなく、色々と考察を重ねて完成に近づいたと思われる。少なくとも筆者は具体例がないと理解できない。と言うか、「具体例があると理解した気になれる」。

ノイズを含む波形に移動平均処理を加えてノイズを除去する作業は容易なので、波形処理に広く用いられる。しかしながら、n点の移動平均を行ったとして、

① どの程度のローパスフィルターに相当するのか

② 周波数特性がどの様に変化するのか

筆者はこれまで移動平均法によって波形に含まれる周波数特性が理論的にどの様に変化するのかを知らなかった。そこで、余弦波に移動平均処理を施して、基本的な特性変化を試行錯誤しながら探った。未知数を使えば簡単に解ける方程式でもツルカメ算的に考えると、余計分かり難くなる。くどい説明になる点はご容赦願いたい。

離散的データに対する移動平均処理ではサンプリングタイムSと移動平均点数nが重要になる。最適な解析をするためには、全データ個数をpとして、記録時間（p×S）内に1～数Hz程度の周波数を取り込む必要がある。大き過ぎても小さ過ぎても問題が生じる。1周期がq個のデータから成るとすれば移動平均点数nはn<<q が望まれる。なお、全データ個数pは移動平均処理の周波数特性には影響を与えない。移動平均するには隣り合うn点が存在すれば良く、データ個数の大小に依存しない。但し、フーリエ解析の際の周波数刻み（周波数分解能)には関係してくる。

数種類の基本波だけから成り立つ波形に移動平均処理をして性質を探る。S=4μs, n=11, p=1024の場合に周波数が100, 1k, 10k, 20k, 40k, 80kHzの各余弦波に11点の移動平均処理を行う。図2の上に元波形、下に処理後の波形を示す。100, 1kHzは移動平均しても振幅に殆ど変化が無く、10k, 20kHzは各々振

幅が約0.7と0.1になり、周波数が高くなるほど振幅がゼロに近づいている。40k, 80kHzの余弦波は各々1周期を約q=6, 3 個で表現しているため、移動平均する以前の波形が綺麗な余弦波を表していない。せめて1周期に8点あることが望まれる。11点の移動平均処理をしても2～4割ほどの振幅が残る（図2の右下の図参照）。もっと高周波になれば別の周波数が見える(エリアシング誤差）。これは離散的データの弱点である。なお、40kHz以上の周波数を移動平均で取り除くにはサンプリングタイムをもっと短くする必要があり、この場合は全データ個数pも増やさないといけない。

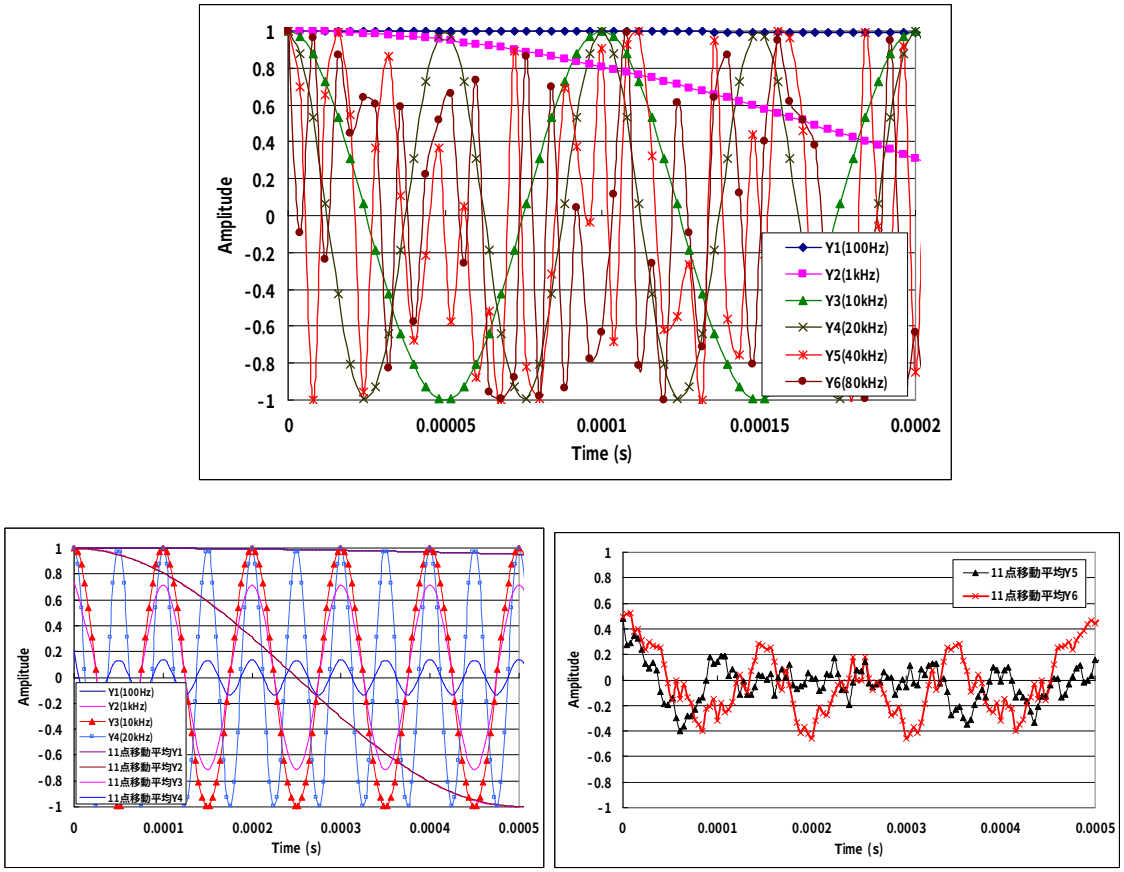
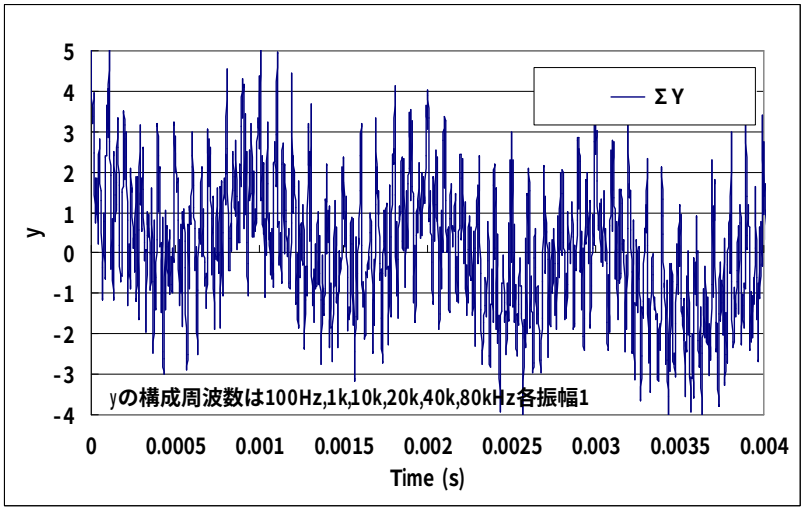
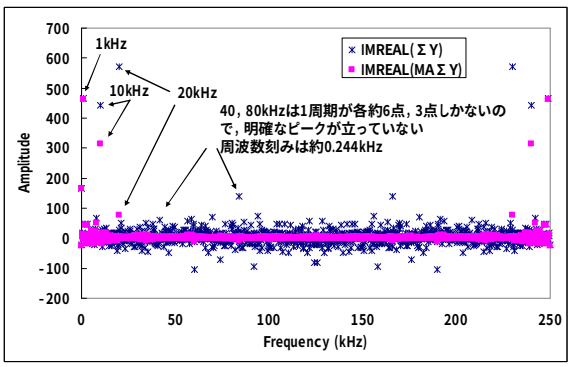


図2　色々な周波数の余弦波（上）と11点の移動平均処理波形（下左右）

図3上のグラフは図2の色々な周波数を持った余弦波を足し合わせた波形ΣYである。図3の左下にΣYと11点移動平均結果MAΣYに含まれるFFT解析から求めた周波数分布を示す。周波数刻み（分解能）は約0.244kHzなので100Hzのピークは見られない。1k, 10k, 20kHzの周波数に関しては移動平均による効果が確認できるが、40k, 80kHzは各々単独周波数の余弦波としてではなく、多数の周波数の和として表されてピークは見られない。図3の右下は11点の移動平均結果と逆フーリエ変換による9.77kHzローパス波形とを比較している。 11点の移動平均結果は9.77kHzローパス波形に全体的な変化傾向が近いことが分かるが、高周波ノイズが取れていない。なお、逆フーリエ変換による9.77kHzローパス波形も離散的データ処理のために振動が残っている（周波数分解能から丁度10kHzを表せない事、この例では40k, 80kHzを表現するためには8kHz程度の周波数含有も必要で、この周波数が残って重畳している可能性が高い）。





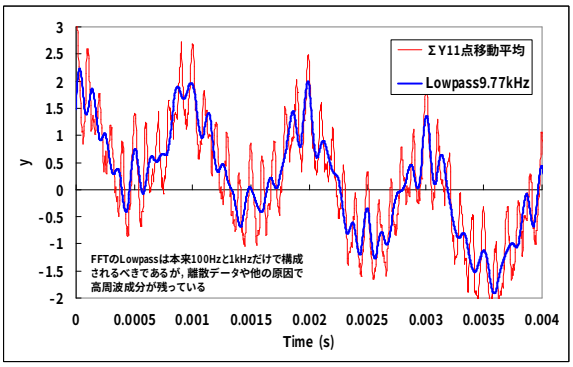


図3　ΣY（上）及び移動平均処理前後の周波数解析結果（下左）と移動平均処理結果（下右）

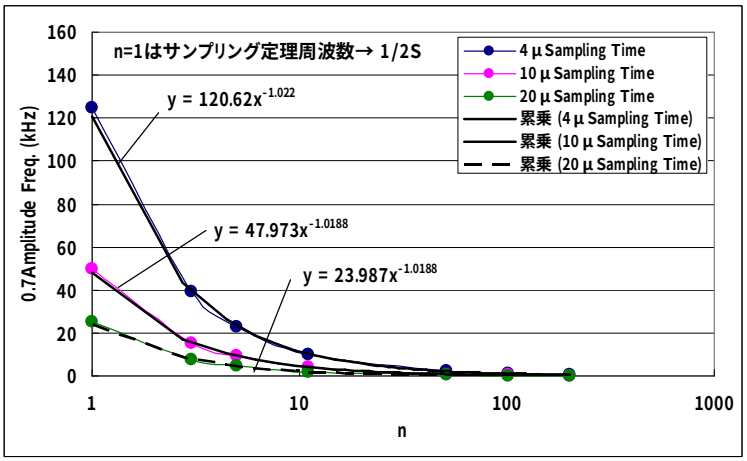


図4　移動平均処理によって振幅が約0.7になる点数

移動平均処理による余弦波への影響が少し分かってきた。この規則を数学的に考える。n 点の移動平均を1回余弦波に適用した時、最大振幅が約0.707（-3db）になる周波数を調べる。nは3, 5, 11, 51, 101, 201およびSは4, 10, 20μsと変化させる。図4に示す結果から振幅が0.707になる周波数はn及びSと反比例の関係にあることが分かる。

n点移動平均1回の場合のカットオフ相当周波数(kHz)

サンプリングタイム:S

n \ S	4.00E-06	1.00E-05	2.00E-05
1	125	50	25
3	41.66667	16.66667	8.333333
5	25	10	5
11	11.36364	4.545455	2.272727
51	2.45098	0.980392	0.490196
101	1.237624	0.49505	0.247525
201	0.621891	0.248756	0.124378

波形に対してn点の移動平均を1回行うとカットオフ相当周波数fは

$$f \quad \frac{1}{2n \cdot S} \quad [Hz]$$

カットオフは振幅が0.707倍(-3db)になる周波数とした

表1　振幅が約0.7になる周波数と移動平均の点数及びサンプリングタイムとの関係

波形に対してn点の移動平均をp回行うとカットオフ相当周波数fpは

$$fp \quad \frac{0.707^{(p-1)}}{2n \cdot S} \quad [Hz]$$

l点,次にm点,更にn点の移動平均をするとカットオフ相当周波数faは

$$fa \quad \frac{3 \times 0.707^{2}}{2 \cdot S \cdot (l+m+n)} \quad [Hz]$$

表2　移動平均処理を繰り返した場合の関係式

正確さには欠けるが、これまでの計算結果を纏めると概略表1で表せる。移動平均処理結果は理論に従うので、理論体系を知らない筆者でも真理近づくことは可能で、大枠なら構築できそうである。これを拡張した考察を表2に示す。n点の移動平均をp回行った場合の周波数fpと移動処理の点数をl, m, nとして繰り返した場合の結果の周波数faである。但し、これらは筆者が周波数低下の傾向を知るために理論を知らずに行ってきた作業なので、結果としては誤りであるが、振幅が約0.7になる周波数の目安を知ることはできた。正しい計算式は4章の記述を参照されたい。

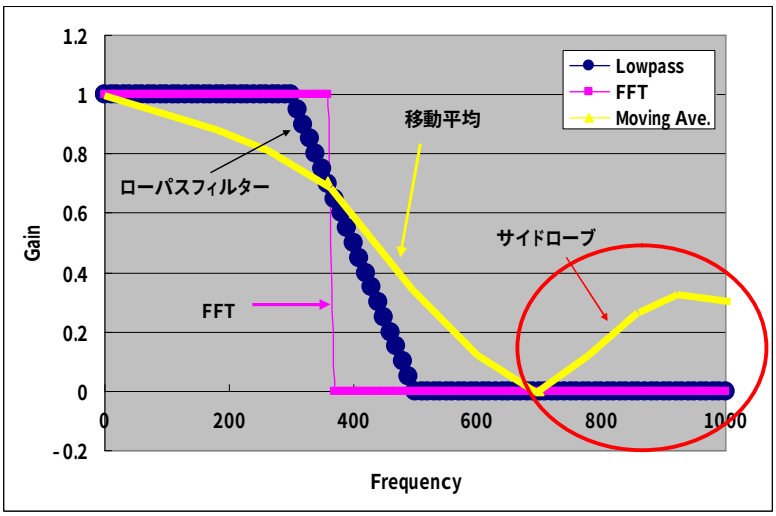


図5　移動平均の周波数低減のイメージ図

移動平均は基本的に全ての周波数の振幅を低減させる方向に働く。フーリエ変換(FFT)の理想的な遮断周波数とは異なり、低周波は全て通すローパスフィルターのカットオフ周波数の定義とも多少異なる。正確ではないが、図5のグラフのイメージに近いと思われる。移動平均処理では図中に示したサイドローブの影響があり、高周波成分が残ることがある。

4. シンク関数

前章で得られた結果はシンク関数を用いて説明する事ができる。移動平均法は隣り合うデータn個をずらしながら平均を出して行くので、横軸時間における矩形関数（時間領域）を考えてみる。横軸を周波数にすれば図6の矩形関数に対応するのは $\sin c$ 関数（周波数領域）である。 $\sin c$ 関数は(1)式で定義される。

$$\sin c(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$$

但し、 $\sin c(0) = 1$ …(1)

図6の右に示す表は規格化した値である。振幅の低下度合いを示している。移動平均して最初に振幅がゼロになる周波数 F_0（右の表でx=1）は(2)式の計算から求められる。

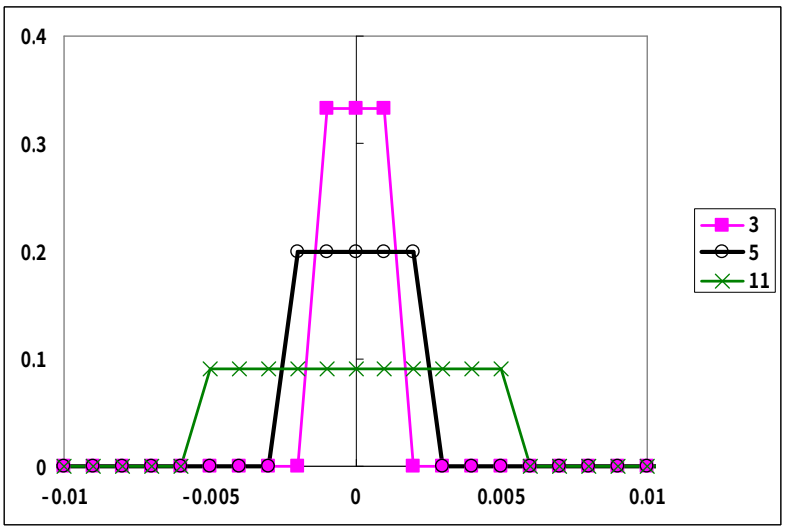
$$F_0 = 1/(nS) \qquad \ldots(2)$$

ここでn:移動平均の点数、S：サンプリングタイムである。

任意の周波数 F_x の減衰値を知るには(3)式の計算をする。

$$x = F_x / F_0 \qquad \ldots(3)$$

図6の右表のxに当てはめて $\sin c(x)$ の数値を求めれば振幅減衰値となる。例えば F_0 が20kHzであれば、15kHzの正弦波は規格化周波数x=0.75なので振幅が約0.3001に低下することが分かる。



x	sinc(x)= sin(πx)/πx
0	1.00000
0.03125	0.99839
0.0625	0.99359
0.09375	0.98561
0.125	0.97450
0.15625	0.96032
0.1875	0.94317
0.21875	0.92313
0.25	0.90032
0.28125	0.87487
0.3125	0.84693
0.34375	0.81665
0.375	0.78421
0.40625	0.74979
0.4375	0.71359
0.46875	0.67579
0.5	0.63662
0.53125	0.59629
0.5625	0.55501
0.59375	0.51302
0.625	0.47053
0.65625	0.42777
0.6875	0.38497
0.71875	0.34234
0.75	0.30011
0.78125	0.25848
0.8125	0.21765
0.84375	0.17784
0.875	0.13921
0.90625	0.10196
0.9375	0.06624
0.96875	0.03221
1	0.00000

図6　矩形波関数（左）とシンク関数の表(右)

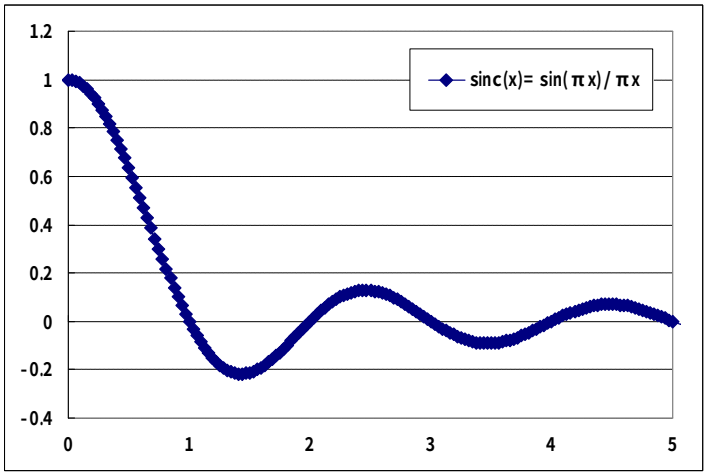


図7　規格化したシンク関数の波形

図7にシンク関数の変化曲線を示す。シンク関数の表を用いれば、移動平均を繰り返したり、小さな点数の移動平均を多数回行う処理も数学的に説明できる。同じ点数の移動平均をp回繰り返せば任意の周波数は減衰値のp乗になり、異なる点数を繰り返す場合は対応した減衰値を掛け合わせれば良い。理論を知ると2ページ前の計算式は正しい結論を導いていなかった事が分かる。

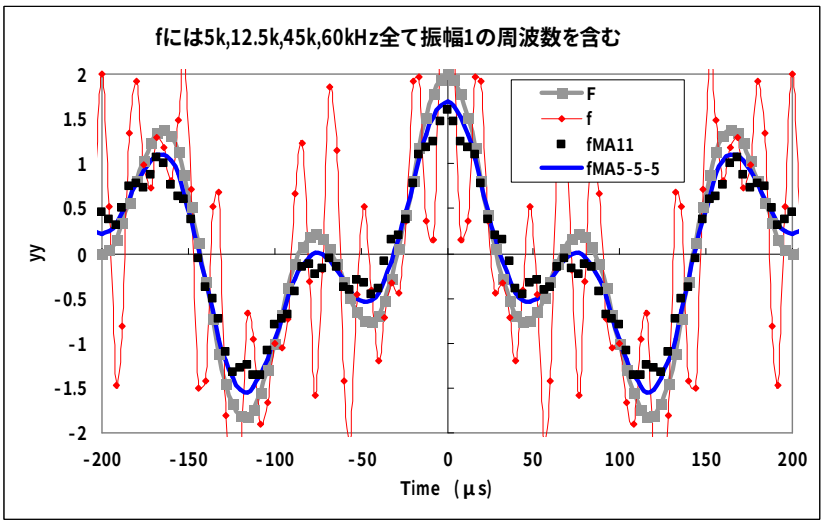


図8　小さな点数の移動平均を多数回行った結果

経験上小さな点数の移動平均を多数回行った方が高周波ノイズの除去が可能で好まれる。図8の関数fは振幅1で5k, 12.5k, 45k, 60kHzの合成波（仮想計測波）であり、fMA11は11点の移動平均処理を1回した波形、fMA5-5-5は5点の移動平均を3回繰り返した波形である。今45kHz以上の周波数は本来の現象に関係ないノイズだとすると、取り除くのが望ましい。灰色の四角印の関数Fが欲しい現象の波形であり、5k, 12.5kHzの周波数で成り立っている。線で結ばれていないfMA11には高周波の振動が残されているが、小さな点数の処理を繰り返したfMA5-5-5の方は、振幅は減衰したものの、滑らかな曲線になっている。

1回の多数点の移動平均では何故高周波成分が残るのかを考察する。解析しているデータのサンプリングタイムは4μsなので図7のシンク関数から構成周波数各々の振幅減衰値が判明する。表3にfMA11とfMA5-5-5の減衰値を示す。

	5kHz	12.5kHz	45kHz	60kHz
fMA11	0.922	0.572	-0.010	0.109
fMA5-5-5	0.952	0.730	0.001	-0.004

表3　含まれる周波数の振幅減衰値

不要な45k, 60kHzの波がfMA5-5-5では殆んどなくなっているのに対して、fMA11の処理では60kHzの波の振幅が1割強残っている。又、必要な波12.5kHzの減衰値にも差が見られる。

実際の実験データに含まれる周波数成分は分からない場合が多いので、ノイズカット処理には様々な注意が必要になる。ノイズが取れたから、これが現象の本質だと考えて一方的に解釈するのは危険である。最小二乗法も同様である。手軽にノイズ除去ができて重宝する移動平均法であるが、全ての周波数の振幅低下を伴い、又サイドローブの影響で高周波成分が残されるなどの欠点を持つ。なお、FFTによるノイズカット処理の限界も多いが、移動平均による処理より的確な判断ができると考えている。

この年になって移動平均の理論を知らなかったのは恥ずかしい限りであるが、知らないまま経過するのでは情けない。何より、既存の知識だけで新テーマに挑戦することで、新しい知見を得る喜びが待っている。今後移動平均処理をした波形解釈の際に大いに役に立つと考えている。

5. さいごに

波形を移動平均法によって処理した時の周波数特性変化を具体例から考察した。振幅低下は矩形波のフーリエ変換に対応して変化し、応答関数に従っていることが分かった。

謝辞

応用力学研究所技術室の石井大輔氏からシンク関数他に関する有益な助言を頂いた。お陰で 4 章の考察が記述できた。記して謝意を表します。

参考文献

1)　馬田俊雄(1999)：「エクセル」による実験データの微分，積分計算、九州大学応用力学研究所報 NO.85、55-61

2)　馬田俊雄(2000)：「エクセル」による実験データからのノイズ除去、九州大学応用力学研究所技術レポート Vol.1、109-114

3)　馬田俊雄(2000-2001)：「エクセル」上でのフーリエ変換に関する考察(1)-(3)、九州大学応用力学研究所技術レポート Vol.1 と 2、115-121 etc.

4)　馬田俊雄(2006)：移動平均法によるノイズ除去と波形変化の関係の具体的考察、九州大学応用力学研究所技術レポート Vol.7、110-113