

## 可変膜厚超伝導ブリッジの反磁場効果による磁場上昇の数值解析

山本, 高広  
九州大学大学院総合理工学研究科情報システム学専攻

青峰, 隆文  
九州大学大学院総合理工学研究科情報システム学専攻

<https://doi.org/10.15017/17737>

---

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 10 (3), pp.331-336, 1988-12-31. 九州大学大学院総合理工学研究科  
バージョン :  
権利関係 :

## 可変膜厚超伝導ブリッジの反磁場効果による 磁場上昇の数値解析

山本 高広\*・青峰 隆文\*\*

(昭和63年8月31日 受理)

### Numerical Analysis of an Enhancement of Magnetic Field Due to the Demagnetization Effect in a Variable Thickness Bridge

Takahiro YAMAMOTO and Takafumi AOMINE

We calculated an enhancement of the magnetic field at the bridge due to a demagnetization effect for a variable thickness bridge by the Boundary Element Method. Here the bank and bridge are assumed to be perfectly diamagnetic and paramagnetic, respectively. The result is compared with three models taking account of approximations and the experimental data. Our result is in good agreement with the approximated formula by Gu et al. and experimental data in the region with  $L/W_b > 0.007$ , where  $L$  and  $W_b$  are the bridge length and bank width, respectively.

#### 1. 序 論

超伝導素子には、トンネル素子、ブリッジ素子等があり、高感度な磁場測定用センサーとして、また、低消費電力、高速な計算機素子として応用開発が進められている。超伝導の基本的な性質として完全反磁性があり、超伝導体内部に磁場を入れないように遮蔽電流が流れる。超伝導素子の特性評価において、その形状に依存する遮蔽電流の作る磁場分布を求めることが必要である。しかし、多くの場合、それらを解析的に計算することは困難である。そこで、そのための数値計算として変分法、有限要素法や境界要素法が利用されている。境界要素法を使って具体的に問題を解くのに、次の点で変分法、有限要素法より有利である。境界面の要素分割の仕方と、領域内で満たされる微分方程式のグリーン関数がわかればよい。領域分割が簡単で要素数、節点数が少ないため、複雑な形状の境界を持つ場合に応用できる。また、計算時間が少ない。

超伝導素子の一つに、可変膜厚ブリッジがある。これは、バンクと呼ばれる二つの超伝導体を厚さの薄い超伝導体または正常導体（ブリッジ）で連結したものである。この素子の臨界電流は磁場に対して周期的変

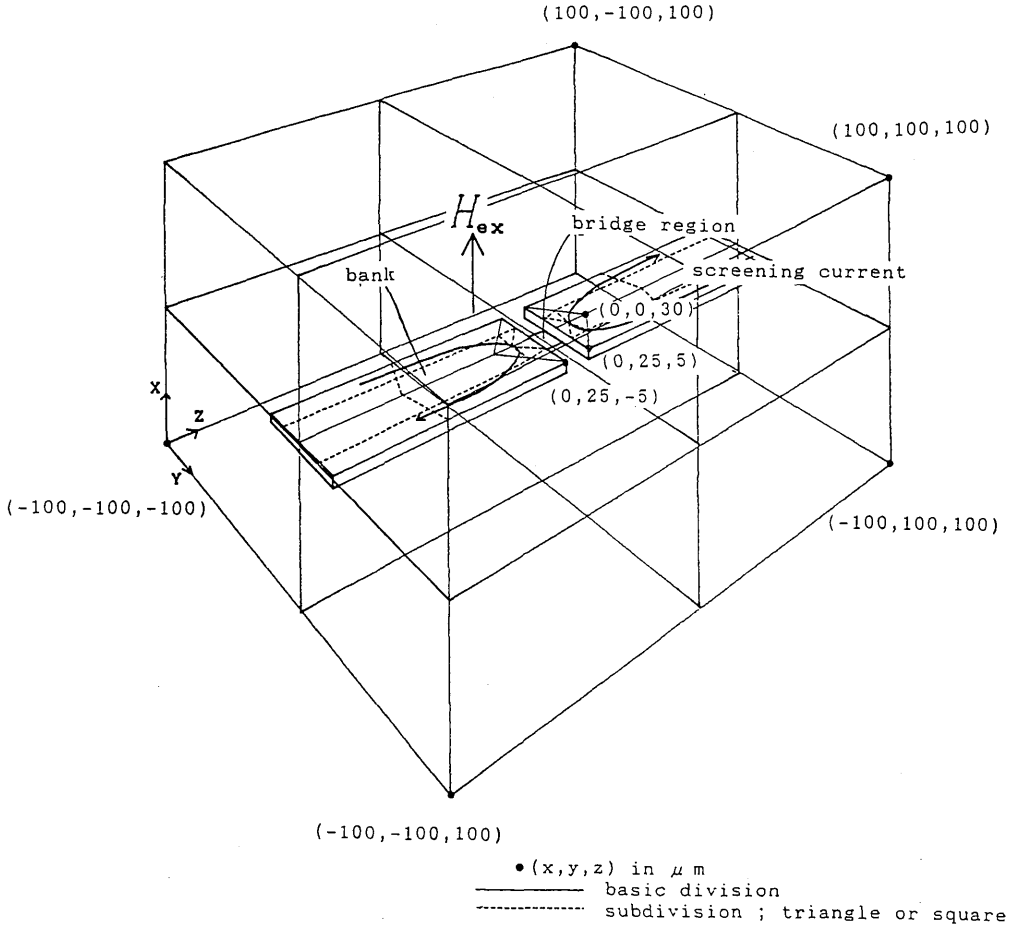
化を示す。ブリッジが常伝導状態のときのその臨界電流の磁場に対する周期の実験値は、ブリッジ領域に1磁束量子が入った場合に予想される値より短い<sup>2)</sup>。これはバンク中に流れる遮蔽電流による反磁場効果によって、ブリッジ領域の磁場が外場より大きくなっているためであることが指摘されている。そして、この考えに基づいて二つの近似法が与えられている。一つは、Mercereau<sup>3)</sup>によって与えられ、ブリッジ領域の磁場は、バンク幅とブリッジ幅の長さの比を外部磁場に掛けて表される。もう一つは、Gu たち<sup>2)</sup>によって与えられ、バンクを回転楕円体と考え、そのときの端の遮蔽電流がブリッジの両側の遮蔽電流に等しいとしている。バンクの形状が長方形であることを考慮した計算は、現在まで行われていない。次章でこのバンクを完全反磁性体とみて、いろいろな寸法に対応する反磁場の影響によるブリッジ領域の磁場の増加の割合を、境界要素法で数値計算する。ここで、ブリッジ領域の反磁性電流や、磁場の侵入の深さは考慮していない。

#### 2. 計 算 方 法

可変膜厚ブリッジに一樣な外部磁場  $H_{ex} = (-|H_{ex}|, 0, 0)$  を加える。その外部磁場を与えるために、Fig. 1 に示される一辺  $L_s = 200 \mu\text{m}$  の立方体を無限の大き

\*情報システム学専攻博士課程

\*\*情報システム学専攻



**Fig. 1** Graphic illustration of boundary element mesh for a variable thickness bridge in a magnetic field. Screening currents flow on the bank surface.

さに持つ境界として考える。領域内の磁場  $H$  はスカラーポテンシャル  $u$  を導入して

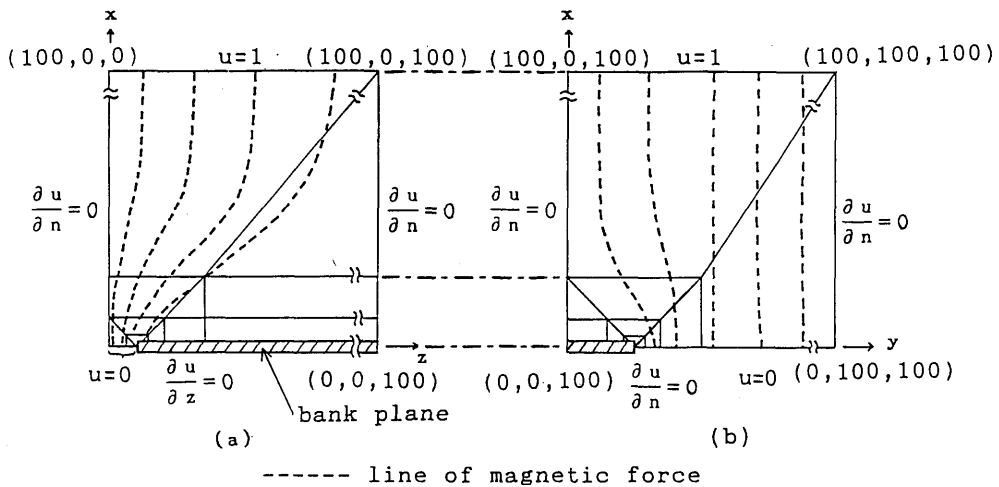
$$H = -\nabla u \quad (1)$$

と表わされる。ここで、 $u$  はラプラスの微分方程式

$$\Delta u = 0 \quad (2)$$

を満足する。バンク薄膜の厚さは無視する。すなわち、 $L \gg d_b \gg \lambda$  を満たす完全反磁性と考える。ここで  $L$  はブリッジの長さ、 $d_b$  はバンクの膜厚、 $\lambda$  は磁場侵入の深さである。この仮定は Nb ブリッジで妥当である。対称性から、8分の1の空間  $(x, y, z > 0)$  を計算

する領域とする。Fig. 2 に各境界条件を示す。x 軸に平行な面の境界条件として、 $\partial u / \partial n = 0$  を与える。ここで、 $n$  は境界面上の外向き単位法線である。実線は基本分割されたメッシュを示し、斜線は、バンク部分を示す。 $x = 0$  のバンクがないところを  $u = 0$ 、 $x = L_s/2 = 100 \mu\text{m}$  のとき、 $u = 1$  とした。このとき、バンクがなければ、 $H_{ex} = u(L_s/2, 0, 0) / (L_s/2) = 0.01$  のような磁場になる。また、バンクがあるときの磁力線を点線で示す。各要素は一定ポテンシャル  $u$  を持つ三角形として近似し、境界要素法の行列要素にでてくる立体角  $G$  は解析的に解け、次式が得られる。 $\Delta ABC$  において、重心を  $O$  とすると、



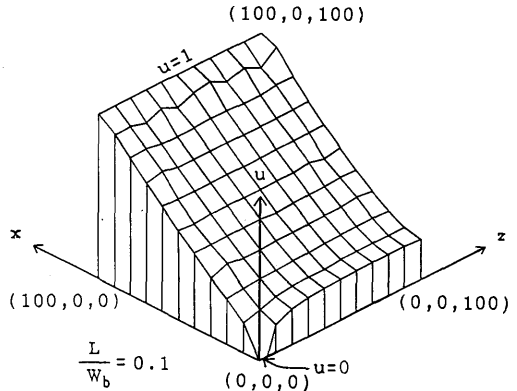
**Fig. 2** (a) Boundary condition of  $x-z$  plane. (b) Boundary condition of  $x-y$  plane. Solid lines show the mesh at  $N=75$ . Dotted lines are the lines of magnetic force. Banks being shown by slash lines are perfectly diamagnetic.  $H_{ex}=2u(L_s/2, 0, 0)/L_s$  and  $L_s=200[\mu\text{m}]$ .

$$\begin{aligned}
 G = & \frac{1}{8\pi} \left[ d_3 \log_e \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - d_3^2}}{a - \sqrt{a^2 - d_3^2}} \right) \left( \frac{b + \sqrt{b^2 - d_3^2}}{b - \sqrt{b^2 - d_3^2}} \right) \right. \\
 & + d_1 \log_e \left( \frac{b + \sqrt{b^2 - d_1^2}}{b - \sqrt{b^2 - d_1^2}} \right) \left( \frac{c + \sqrt{c^2 - d_1^2}}{c - \sqrt{c^2 - d_1^2}} \right) \\
 & \left. + d_2 \log_e \left( \frac{c + \sqrt{c^2 - d_2^2}}{c - \sqrt{c^2 - d_2^2}} \right) \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - d_2^2}}{a - \sqrt{a^2 - d_2^2}} \right) \right] \quad (3)
 \end{aligned}$$

ただし、 $a=\overline{AO}$ ,  $b=\overline{BO}$ ,  $c=\overline{CO}$ ,  $d_1, d_2, d_3$  は重心  $O$  から辺  $AB, BC, CA$  に下した垂線の長さである。他の要素はすべて、7 次のガウス積分で近似計算する。

### 3. 計算結果

次に2章で述べた方法を用いて、バンク面に垂直な方向の磁場、遮蔽電流によるブリッジ領域での磁場の变化および、バンク中の遮蔽電流を計算した結果について述べる。3.1, 3.3節は再分割したメッシュ(分割数,  $N=300$ )で、3.2節は基本分割したメッシュ( $N=75$ )を用いて行った。分割を無限に行ったとき、 $u$  は真の値を取る。ここでは再分割したメッシュを用いて計算した  $u$  の値が、より真の値に近いと考えて、

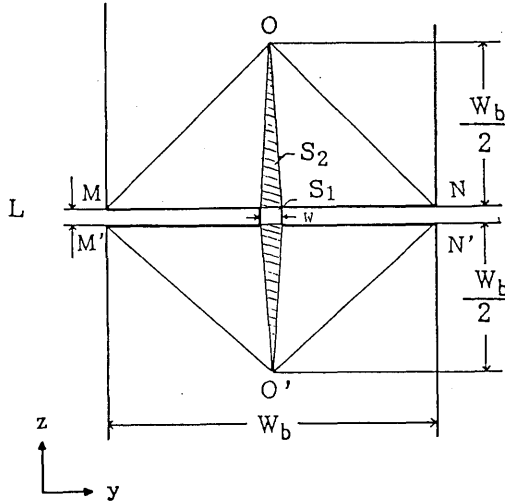


**Fig. 3** Scalar potential  $u(x, 0, z)$  in the  $x-z$  plane at  $N=300$ .

信頼性を評価した。3.2節では、実験データとの比較をした。

#### 3.1 バンク面に垂直な方向の磁場

磁場スカラーポテンシャル  $u$  は **Fig. 3** に示すような分布になる。バンクは  $z$  軸上である。  $y-z$  面で見ると、バンク上にある磁力線 ( $x \rightarrow \infty$ ) は、 $x=0$  では大雑把にバンク幅分の領域にある分がバンク間のスリットに集中して通る。



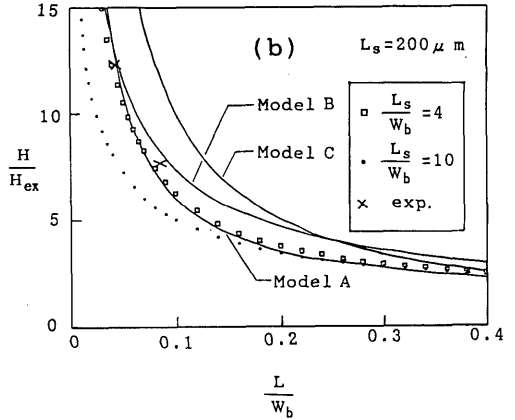
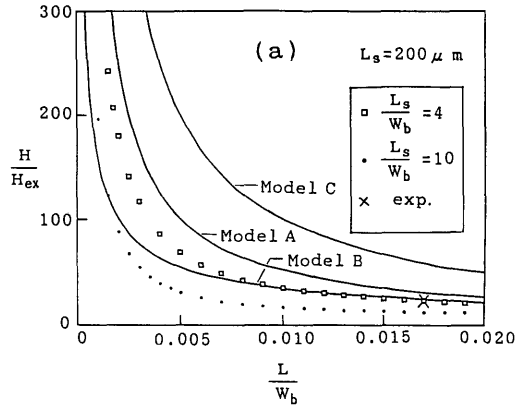
**Fig. 4** Model A for the flux concentration in the bridge region when the banks are perfectly diamagnetic. Flux in the triangle area  $\triangle OMN$ ,  $\triangle O'M'N'$  goes through  $\square MM'N'N$  at  $x=0$ .  $S_1$  is the bridge region and  $S_2$  is the region above which the flux concentrates into the  $S_1$  region.

### 3.2 遮蔽電流によるブリッジ領域での磁場の変化

ここでは、 $N=75$ に分割したメッシュを用いて、数値計算した。使ったモデルを **Fig. 4** に示し、計算した結果を **Fig. 5** に示す。 $L_s/W_b=4$  の場合、小さくなっていることは3.4節で扱う。比較のため前節の結果から、**Fig. 4** に示すようなバンク上の磁場分布に対する単純なモデルを使って、 $H/H_{ex}$  と  $W_b$ ,  $L$  との関係式を求めた。 $W_b$  はバンク幅である。高さ  $W_b/2$  の  $\triangle OMN$ ,  $\triangle O'M'N'$  領域の磁束が  $\square MM'N'N$  を通ることから、ブリッジ領域には斜線を引いた領域の磁束が加算される。ブリッジの幅を  $W$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{H}{H_{ex}} &\doteq \frac{WL + \frac{1}{2} \cdot W \cdot \frac{W_b}{2} \cdot 2}{WL} \\ &= 1 + \frac{W_b}{2L} \quad (\text{モデル A}) \quad (4) \end{aligned}$$

$L/W_b > 0.04$  で、数値計算のグラフに合う。図中の  $\times$  印は、ブリッジが常伝導状態のときの可変膜厚ブリッジの実験データである<sup>24)</sup>。ここで  $H$  は  $I_c-H$  曲線のフラウンホーファーパターンから求めたものであり、 $I_c$



**Fig. 5**  $L/W_b$  dependence of normalized magnetic field  $H/H_{ex}$  at the bridge region with  $N=75$ : (a)  $0 < L < 0.020$ , (b)  $0 < L < 0.4$ . The solid lines show Models A, B, C.  $\square$ ,  $\blacksquare$  express the numerical result by the Boundary Element Method.  $\times$  is the experimental data<sup>24)</sup>.

は臨界電流である。文献2の回転楕円体近似で求めた式

$$\frac{H}{H_{ex}} \doteq \left( \frac{2W_b}{L} \right)^{2/3} \quad (\text{モデル B}) \quad (5)$$

も図中に示す。 $0.007 < L/W_b < 0.05$  において、このモデルBは数値計算と非常によく一致している。また、モデルCは文献3の近似式

$$\frac{H}{H_{ex}} \doteq \frac{W_b}{L} \quad (\text{モデル C}) \quad (6)$$

による。

3.3 バンク中の遮蔽電流

$W_b = 50 \mu\text{m}$ ,  $L = 5 \mu\text{m}$  のときのバンク中の遮蔽電流を要素分割  $N = 300$  で計算した。バンクの長さ方向の遮蔽電流の分布はその幅方向の分布に比べ広がっている。表面に集中した遮蔽電流は、表面に平行な磁場と表面の法線ベクトルの外積に比例することから求めた。結果を Fig. 6 に示す。

3.4 誤差

境界要素法における誤差は、複数の原因が互いに関連し合っている。どういう場合に、正しい解に収束するかは、有限要素法に比べ研究が少なく、分割数と解の関係についての数値実験等が行われている。

無限遠の境界としてとる立方体表面の大きさが変わっても、真の値は変化しない。このことから、バンク幅  $W_b$  に対する領域の大きさの比を変えて、それぞれのメッシュの妥当な範囲を調べてみる。Fig. 7 に示すように、 $L_s/W_b \leq 7$  で、磁場の増加の割合が、大きくなっている。これは、 $|y| = L_s/2$  の境界を対称面としているため、 $y$  方向に  $L_s$  だけ離れたバンクの虚像による影響が現われるのだらうと思われる。 $L_s/W_b \geq 7$  で、磁場の増加の割合が、減少しているのは、要素数が有限なために、各要素の出す情報が片寄ったり、バンク端付近の必要な情報が欠如しているからである。実際、 $L/W_b = 0.05$  のとき、 $L_s/W_b > 10$  ので、より急激な減少はこのことが原因である。

以上まとめると、このメッシュは  $L_s/W_b > 2$  で定義されるものだが、この範囲で、 $L_s/W_b < 10$  においては20%以下の精度で解が求められる。 $L_s/W_b = 7$  のとき、境界を対称にとっていることの影響がなくなる。これよりも大きくなると、分割の片寄りが大きくなり、特にバンクの影響が、過小評価されてしまうと考えられる。積分計算での桁落ち、丸めによる誤差は、 $L_s/W_b \geq 40$  で現われる。

Fig. 7 で、 $L_s/W_b = 4$  の場合、 $N = 75$  よりも  $N = 300$  のメッシュのときの方が反磁場の影響が逆に小さくなっているのは、 $N = 75$  のとき、バンク上のメッシュの荒さのため、バンクの影響を過大に見積もっているのだらう。 $L/W_b = 0.05$  で  $L_s/W_b$  が10より大きいとき、減少の傾向が大きいの、メッシュの切り方の関係上、近くの要素のメッシュが密になり、その影響が大きくなるからである。 $N = 300$  にすると、 $L_s/W_b$  依存性は、小さくなっている。

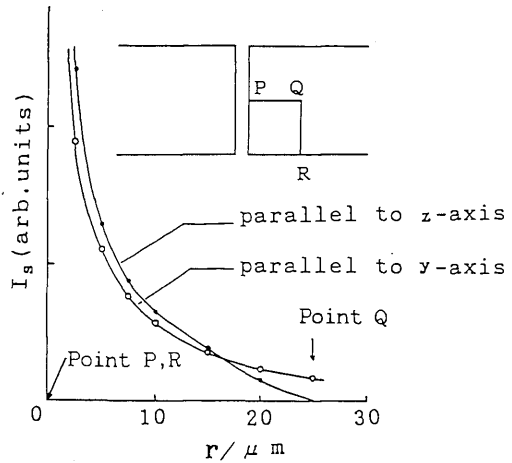


Fig. 6 Screening current  $I_s$  as a function of  $r$ , where  $r$  is a distance from the bank edge. The curves express the cases parallel to  $z$ -axis and  $y$ -axis. The P, Q, R indicate the point in the bank.

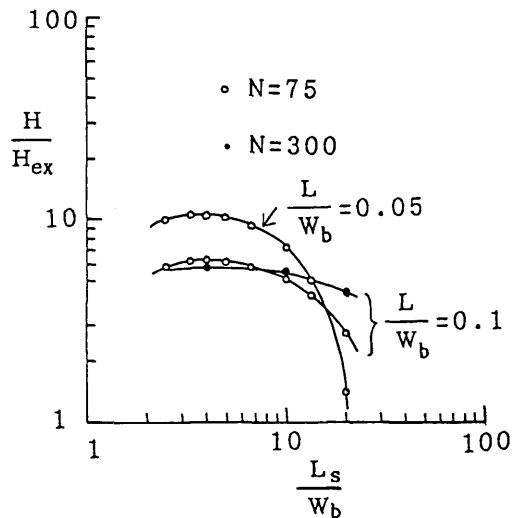


Fig. 7 Normalized magnetic field  $H/H_{ex}$  at the bridge region as a function of  $L_s/W_b$  with two values of  $L/W_b$ .

4. 残された課題

二つのバンクが近づいたときのバンク内の遮蔽電流について触れなかった。それぞれの電流の方向が、反平行であり、バンクがお互いに近づくことで、それぞ

れの遮蔽電流を調べることは、興味ある問題である。

Gu らの近似式は、磁場侵入の深さ  $\lambda$  が小さい可変膜厚ブリッジではよい近似だが、 $\lambda$  が大きくなりバンクの寸法のオーダーに近づくときは、内部に遮蔽電流が広がり、境界条件に  $\lambda$  を入れる計算を行う必要がある。

本研究では、可変膜厚ブリッジのバンクにおける磁場侵入の深さ  $\lambda$  を、ブリッジの長さ  $L$  に比べ無視したが、無視できないとき、バンク中に幅  $\lambda$  だけ磁場が侵入したと考えると、 $(L+2\lambda)/L$  倍、ブリッジ領域が広がり、磁場の集中が弱まると予想される。

## 5. 結 論

可変膜厚ブリッジでの、バンクの存在による反磁場効果を数値計算で調べた。ただし、バンクは遮蔽電流がその表面に集中している完全反磁性体として取り扱った。バンクの形状に関する反磁場効果の以上の計算結果は、 $L/W_b > 0.007$  の広い範囲で Gu たちの近似式とほぼ一致したが、 $L/W_b < 0.007$  では、両者には、ずれが見られた。また、我々の計算結果は、Mercereau の近似式と傾向は合うが、数値は合わない。

文献 2, 4 の  $L/W_b > 0.007$  の実験データと比較すると、我々の計算結果は実験と合うことがわかる。 $L/W_b < 0.007$  の実験がまだないので、その実験が待たれる。

## 謝 辞

論文作成に際しお世話になった石野勉、斎藤利雄の両氏に謝意を表す。

## 参 考 文 献

- 1) C. A. Brebbia: The Boundary Element Method for Engineers (Pentech Press, London, 1978): 邦訳神谷紀生, 田中正隆, 田中喜久昭 (共訳): 境界要素法入門 (培風館, 1980).
- 2) J. Gu, W. Cha, K. Gamo and S. Namba: J. Appl. Phys. **50** (1979) 6437.
- 3) J. E. Mercereau: Proc. 1st Int. Conf. on Superconducting Quantum Devices (Hahlbohm and Lübbig, Berlin, 1977) A 101.
- 4) E. P. Harris and R. B. Laibowitz: IEEE Trans. Magn. MAG-13 (1977) 724.