コーナーを回折する衝撃派に関する数値解析

松尾, 一泰
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

青木, 俊之
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

樫村, 秀男
北九州工業高等専門学校

武居, 陽一
川崎重工業株式会社 | 九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

https://doi.org/10.15017/17733

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 10 (3), pp.301-307, 1988-12-31. 九州大学大学院総合理工学研究科
バージョン：
権利関係：

九州大学総合理工学研究科報告
第10巻 第3号 301-307頁 昭和63年12月

Engineering Sciences Reports, Kyushu University
(KYUSHU DAIGAKU SOGORIKOGAKU KENKYUKA HOKOKU)
Vol. 10, No. 3 pp. 301-307 December 1988

コーナーを回折する衝撃波に関する数値解析

松尾一泰*・青木俊之*
樫村秀男**・武居陽一***

(昭和63年8月31日 受理)

Numerical Analysis of a Diffracting Shock Wave Around a Corner

Kazuyasu MATSUO*, Toshiyuki AOKI*, Hideo KASHIMURA**
and Youichi TAKESUE***

The purpose of the present paper is to report the numerical analysis of diffracting shock wave around a sharp-edged corner. The unsteady and nonviscous two-dimensional equations are solved with the piecewise liner method (PLM). The calculated results show that the diffracting shock waves around a corner have been classified into four types. Namely, they are normal, kink, Mach reflection and regular reflection types. The relation between the third shock wave and the vortex has been discussed. Furthermore, the calculated distribution of the pressure along a wall agrees with the experimental data, and the stagnation point on a wall has been observed.

1. まえがき

衝撃波の回折は，気体の燃焼や爆発に伴うデトネーション波や爆風波の波面構造，あるいはそれらの波と管壁や構造物との干渉などの研究の基礎として重要な問題である．伝ぱする衝撃波がコーナーを回折する場合，回折した衝撃波は壁面との干渉により，その背後に複雑な流れ場を形成する．このような衝撃波の回折現象に関する研究は，古くから行われており，特に解析的研究として1949年には Lighthill[1] が線形理論による回折衝撃波の湾曲を示した．さらに，Jones ら[2]はコーナーからの膨張波とはく離線を，Parks[3] は回折衝撃波背後の第二衝撃波の強さを計算した．Whitham[4] は Ray-shock 理論により回折衝撃波の形状を計算し，その後，Oshima[5], Bazhenova ら[6]は波の干渉を考慮した改良を行った．回折の流れ場全体を差分法により計算した結果も報告されている[7)~9)]．また，多くの実験的研究もなされているが[6]，回折衝撃波の形状に及ぼす流れ場の影響や流れ場中の衝撃波の発生原因など，いまだ不明の点が少なくない．

*エネルギー変換工学専攻
**北九州工業高等専門学校
***エネルギー変換工学専攻修士課程（現在川崎重工業㈱）

本研究では，伝ぱする衝撃波がコーナーで回折する場合に生じる流れ場を，二次元 Piecewise Liner Method (PLM) の差分法を用い数値解析することにより，コーナーを回折する衝撃波の形状やその背後の流れ場について考察した．

2. 数値解析方法

2.1 基礎方程式

二次元の非粘性圧縮性流れの基礎方程式は，保存形で次のように書ける．

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}=0 \tag{1}$$

ここで，保存量 **W** 及び流束 **H, G** は次のような成分を持つベクトルである．

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ e\end{bmatrix}\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ u(e+p)\end{bmatrix}\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ v(e+p)\end{bmatrix} \tag{2}$$

ただし，t は時間，x, y は長さ，p，ρ，u，v はそれぞれ気体の圧力，密度，x 及び y 軸方向の流速である．e は単位体積あたりの全エネルギーで，完全気体の仮定から，次式で示される．

$$e=\frac{p}{\kappa-1}+\frac{\rho\,(u^2+v^2)}{2} \tag{3}$$

ここで，κ は比熱比である．これらの式は下記の無次元量を導入することにより無次元化できる．

$$\bar{\rho}=\frac{\rho}{\rho_1}\quad \bar{p}=\frac{p}{p_1}\quad \bar{x}=\frac{x}{L}\quad \bar{y}=\frac{\bar{y}}{L}$$

$$\bar{u}=\frac{u}{(a_1/\sqrt{\kappa})}\quad \bar{v}=\frac{v}{(a_1/\sqrt{\kappa})}\quad \bar{e}=\frac{e}{(\sqrt{\kappa}L/a_1)}$$

$$\bar{t}=\frac{t}{(\sqrt{\kappa}L/a_1)} \tag{4}$$

ただし，a は音速，L は代表長さ，$\bar{}$ は無次元量，下添字の 1 は入射衝撃波前方の状態を示す．衝撃波がコーナーを回折する場合に生じる流れ場には，明確な代表長さがないので，本論文では無次元量を用いて計算した．

2.2 数値計算方法

2.2.1 計算手順

流れ場を解析するために，2.1節で述べた基礎方程式を PLM と時間分割法を結合させ数値する．PLM は二次精度を持つ Godunov 法を改良したもので[10]，衝撃波のような不連続面が，人工粘性を使用せずに振動することなく計算できる特徴を持つ．以下に，計算手順を示す．

(1) まず，流れ場の x 方向の掃引について計算を行う．x 方向の一次元の基礎方程式は，式(1)，(2)より，次式で与えられる．

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}=0,\ \mathbf{W}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ e\end{bmatrix}\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ u(e+p)\end{bmatrix} \tag{5}$$

時間ステップ n における保存量 $\mathbf{W}_i^n$ を **Fig. 1** に示す空間ステップ i の各点で与える．

(2) 各点における状態量 $\mathbf{V}_i^n$ の x 方向の勾配を線形近似法により求め，時間ステップ $n+1/2$ のときの計算セルの境界における左右の状態量 $\mathbf{S}_l$, $\mathbf{S}r$ を求める．ここで，$\mathbf{V}=(\rho,u,p)$ $\mathbf{S}_l=(\rho_l,u_l,p_l)$ $\mathbf{S}r=(\rho_r,u_r,p_r)$ である．

(3) $\mathbf{S}_l$, $\mathbf{S}r$ よりリーマン問題を解き，中間格子点 $(i+1/2,\ n+1/2)$ での保存量 $\mathbf{W}_{i+1/2}^{n+1/2}$ を求める．同様にして，$\mathbf{W}_{i-1/2}^{n+1/2}$ を求める．

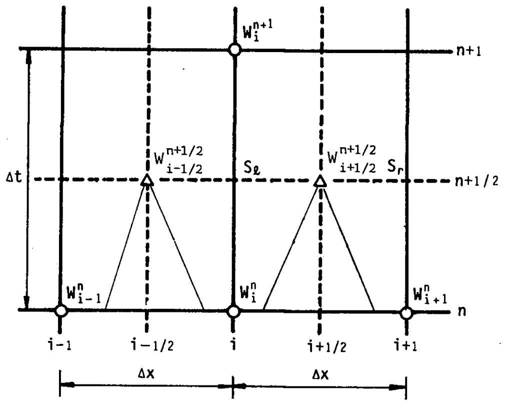


Fig. 1　Mesh construction for piecewise liner method

(4) 中間格子点の保存量 $\mathbf{W}_{i-1/2}^{n+1/2}$, $\mathbf{W}_{i+1/2}^{n+1/2}$ より流束 $\mathbf{H}_{i-1/2}^{n+1/2}$, $\mathbf{H}_{i+1/2}^{n+1/2}$ を計算し，次式より時間ステップ $n+1$ における諸量を計算する．

$$\mathbf{W}_i^{n+1}=\mathbf{W}_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{H}_{i+1/2}^{n+1/2}-\mathbf{H}_{i-1/2}^{n+1/2}) \tag{6}$$

(5) 次に y 方向の掃引についても (1) − (4) と同様の計算を行い，時間分割法により，二次元の流れ場を数値計算する．

次に，計算手順の中に出てきた，線形近似法，リーマン問題及び時間分割法について，その概略を示す．

2.2.2 線形近似法

状態量 $\mathbf{V}_i^n$ の空間的な勾配 $\Delta\mathbf{V}_i^n$ は，次の二段階の計算により求められる．

$$\Delta\lim\mathbf{V}_i^n\equiv\begin{cases}\min(2|\mathbf{V}_{i+1}^n-\mathbf{V}_i^n|,\ 2|\mathbf{V}_i^n-\mathbf{V}_{i-1}^n|) & \text{if}\,(\mathbf{V}_{i+1}^n-\mathbf{V}_i^n)(\mathbf{V}_i^n-\mathbf{V}_{i-1}^n)>0\\ 0 & \text{if}\,(\mathbf{V}_{i+1}^n-\mathbf{V}_i^n)(\mathbf{V}_i^n-\mathbf{V}_{i-1}^n)\leq 0\end{cases}$$

$$\Delta\mathbf{V}_i^n\equiv\min\left(\frac{|\mathbf{V}_{i+1}^n-\mathbf{V}_{i-1}^n|}{2},\ \Delta\lim\mathbf{V}_i^n\right)\cdot \mathrm{sgn}\,(\mathbf{V}_{i+1}^n-\mathbf{V}_{i-1}^n) \tag{7}$$

上式は，状態量の変化が単調に変化するときにのみ，格子点の状態量に勾配があるとみなしている (Monotonicity constrains)．さらに，$n+1/2$ での計算セルの境界での左右の状態量 $\mathbf{S}_l$, $\mathbf{S}r$ は，基礎方程式(5)を非保存形に変換した次式を用いて計算する．

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{A}(\mathbf{V})\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}=0,\ \mathbf{V}=\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{V})=\begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \dfrac{1}{\rho} \\ 0 & \dfrac{\kappa^2 p^2}{\rho} & u \end{bmatrix} \tag{8}$$

すなわち，中間格子点（$i+1/2, n+1/2$）での左右の状態は次式で表わされる．

$$\mathbf{S}^{n+1/2}_{i+1/2,l}=\mathbf{V}^n_i-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{A}^n_i\,\Delta\mathbf{V}^n_i+\frac{1}{2}\Delta\mathbf{V}^n_i$$

$$\mathbf{S}^{n+1/2}_{i+1/2,r}=\mathbf{V}^n_{i+1}-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{A}^n_{i+1}\,\Delta\mathbf{V}^n_{i+1}+\frac{1}{2}\Delta\mathbf{V}^n_{i+1} \tag{9}$$

2.2.3　リーマン問題

中間格子点における状態量 $\mathbf{W}^{n+1/2}$ は，左右の状態量 $\mathbf{S}_l$, $\mathbf{S}_r$ を初期値として，**Fig. 2** に示すようにリーマン問題を解くことにより t 軸上の点として計算される．ここで，$\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ は左右に伝わる波を，$\mathbf{S}_*$ はその中間の一定圧力領域，一点鎖線は接触面を示す本計算では，各領域の状態は Glimm 法により求めた．初期状態の流れの条件により，t 軸上の状態は $\mathbf{S}_l$ と $\mathbf{S}_r$ の間のどこかに位置し，次の10種類に分けることができる．

<table>
<tr><td>(1) $\mathbf{S}_\ell$　領域，$u_\ell>0$ の場合</td><td rowspan="2">$\mathbf{S}_1$ が衝撃波の場合
($p_*>p_\ell$)</td><td rowspan="5">$u_*>0$ の場合</td></tr>
<tr><td>(2) $\mathbf{S}_*$　領域，$u_\ell<0$ の場合</td></tr>
<tr><td>(3) $\mathbf{S}_\ell$　領域，波頭が右に伝わる場合</td><td rowspan="3">$\mathbf{S}_1$ が膨張波の場合
($p_*<p_\ell$)</td></tr>
<tr><td>(4) 波$\mathbf{S}_1$，波頭が左に波尾が右に伝わる場合</td></tr>
<tr><td>(5) $\mathbf{S}_*$　領域，波尾が左に伝わる場合</td></tr>
<tr><td>(6) $\mathbf{S}_r$　領域，$u_r<0$ の場合</td><td rowspan="2">$\mathbf{S}_2$ が衝撃波の場合
($p_*>p_r$)</td><td rowspan="5">$u_*<0$ の場合</td></tr>
<tr><td>(7) $\mathbf{S}_*$　領域，$u_r>0$ の場合</td></tr>
<tr><td>(8) $\mathbf{S}_r$　領域，波頭が左に伝わる場合</td><td rowspan="3">$\mathbf{S}_2$ が膨張波の場合
($p_*<p_r$)</td></tr>
<tr><td>(9) 波$\mathbf{S}_2$，波頭が右に波尾が左に伝わる場合</td></tr>
<tr><td>(10) $\mathbf{S}_*$　領域，波尾が右に伝わる場合</td></tr>
</table>

2.2.4　時 間 分 割 法

本計算では，時間分割法に Strang 法[11]を用いた．x 及び y 方向の差分演算子をそれぞれ $\mathbf{L}_x$, $\mathbf{L}_y$ とすると，時間ステップ n から $n+1$ への計算は次式で表わされる．

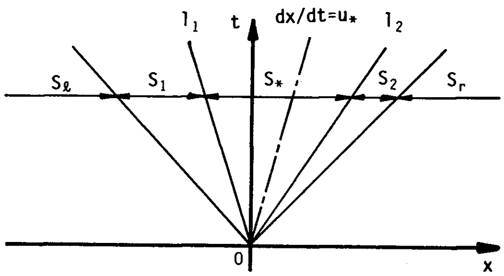


Fig. 2　Solution for a Riemann problem

$$\mathbf{W}_{n+1}=\mathbf{L}_{x/2}\cdot\mathbf{L}_y\cdot\mathbf{L}_{x/2}\cdot\mathbf{W}_n \tag{10}$$

ここで，$\mathbf{L}_{x/2}$ は x 方向の掃引を $\Delta t/2$ 進ませることを意味する．さらに，時間ステップ $n+2$ の計算は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{n+2}&=\mathbf{L}_{x/2}\cdot\mathbf{L}_y\cdot\mathbf{L}_{x/2}\cdot\mathbf{L}_{x/2}\cdot\mathbf{L}_y\cdot\mathbf{L}_{x/2}\cdot\mathbf{W}_n\\ &\cong\mathbf{L}_{x/2}\cdot\mathbf{L}_y\cdot\mathbf{L}_x\cdot\mathbf{L}_y\cdot\mathbf{L}_{x/2}\cdot\mathbf{W}_n\end{aligned} \tag{11}$$

従って，$n=1$ の初期状態量 $\mathbf{W}_1$ から任意の時間ステップ n における状態量 $\mathbf{W}_n$ は次式で計算できる．

$$\mathbf{W}_n=\mathbf{L}_{x/2}\cdot\mathbf{L}_y\cdot\mathbf{L}_x\cdots\cdots\mathbf{L}_y\cdot\mathbf{L}_{x/2}\cdot\mathbf{W}_1 \tag{12}$$

基礎方程式(1)は4つの式からなるが時間分割法では，各方向ごとの掃引において，式(5)に示した，3つの式を用いて計算する．そのため，各掃引の計算が終わった時点で，計算していた方向に垂直な方向の運動量の式を解く必要がある．そこで各方向の運動量の式を，連続の式を用いて非保存形に変形した．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ &\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{aligned} \tag{13}$$

本計算では，式(13)を風上差分を用いて計算した．

2.3　計　算　条　件

Fig. 3 に回折角 $\alpha_0=90°$ のコーナーにおける計算メッシュを示す．計算メッシュは正方形で，境界条件には第二メッシュ系を用いた．入射衝撃波は x 方向に

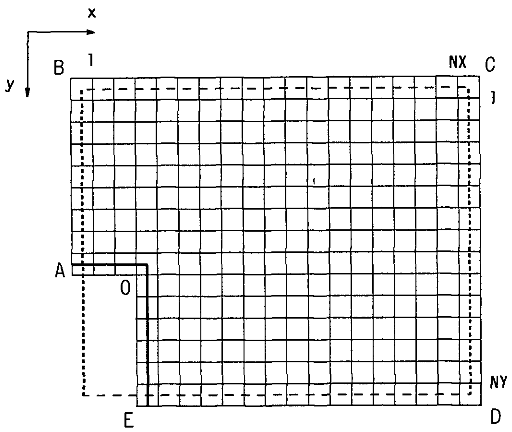


Fig. 3　Computational mesh for a corner with a diffracting angle 90°

左から右へ伝ぱし，直角のコーナーで回折する場合を計算するため，境界 AB は流入条件，境界 BC, CD, DE は流出条件とし，壁面境界 OA はすべり壁，OE はすべりなし壁の条件を与えた．初期条件として，コーナーの頂点Oの位置に x 軸に垂直な伝ぱ平面衝撃波を与えた．計算メッシュ数は100×80と170×180とし，α_0は90°の一定，試験気体は比熱比 $\kappa=1.40$の空気と $\kappa=1.14$のフロンガス（R12）の二種類とした．

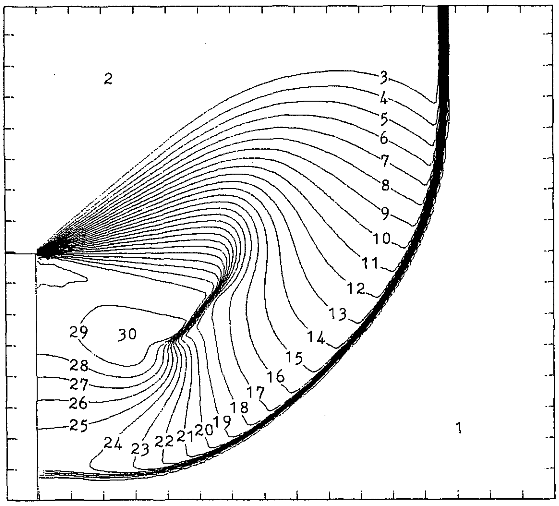
3.　数値解析結果と考察

3.1　計　算　結　果

本数値計算で得られたコーナーで回折する衝撃波の干渉形態の計算結果の一例を **Fig. 4** に示す．回折角 $\alpha_0=90°$，入射衝撃波マッハ数 $M_s=2.33$で，フロンガス（R12）の場合について，計算で得られた等圧力線図と等密度線図を，それぞれ **Fig. 4 (a), (b)** に，文献(12)の回折する衝撃波のシャドウグラフ写真を **Fig. 4 (c)** に示す．図からわかるように，入射衝撃波がコーナーの頂点Oを通過することにより発生した膨張波の波尾（TE），入射衝撃波が頂点の影響を受けた部分である回折衝撃波（DS），回折衝撃波背後の流れを調節する第二衝撃波（SS），頂点からのはく離によるせん断流（SL），はく離による渦（V），入射衝撃波が回折する前に加速した流れと回折後に加速された流れとの境界を示す接触面（CS）が計算結果からわかり，発生位置も実験と良く一致している．しかし，実験において観察される第三衝撃波（TS）は，計算において明確には現われないが，その位置に圧力の上昇が観察された．

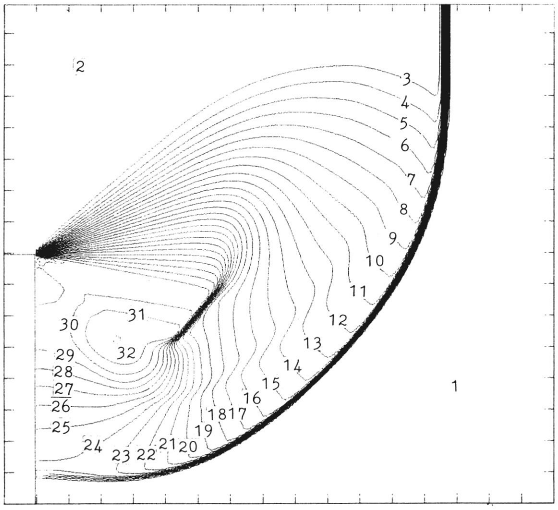
3.2　回折衝撃波の形状

直角のコーナーを衝撃波が回折する流れ場は，入射衝撃波がコーナーの頂点に達してからの時間に比例して大きくなるが，その形状は自己相似形に保たれる．このことから，流れ場を波の位置が変化しない定常流



	p/p_1		p/p_1
1	1.00	16	3.20
2	5.72	17	3.02
3	5.54	18	2.84
4	5.36	19	2.66
5	5.18	20	2.48
6	5.00	21	2.30
7	4.82	22	2.12
8	4.64	23	1.94
9	4.46	24	1.76
10	4.28	25	1.58
11	4.10	26	1.40
12	3.92	27	1.22
13	3.74	28	1.04
14	3.56	29	0.86
15	3.38	30	0.68

Fig. 4　Diffracting shock wave around a corner ($M_s=2.33$, R 12)　　(a) Pressure contours



	ρ/ρ_1		ρ/ρ_1
1	1.00	17	2.44
2	4.20	18	2.32
3	4.12	19	2.20
4	4.00	20	2.08
5	3.88	21	1.96
6	3.76	22	1.84
7	3.64	23	1.72
8	3.52	24	1.60
9	3.40	25	1.48
10	3.28	26	1.36
11	3.16	27	1.24
12	3.04	28	1.12
13	2.92	29	1.00
14	2.80	30	0.88
15	2.68	31	0.76
16	2.56	32	0.64

Fig. 4　(b) Density contours

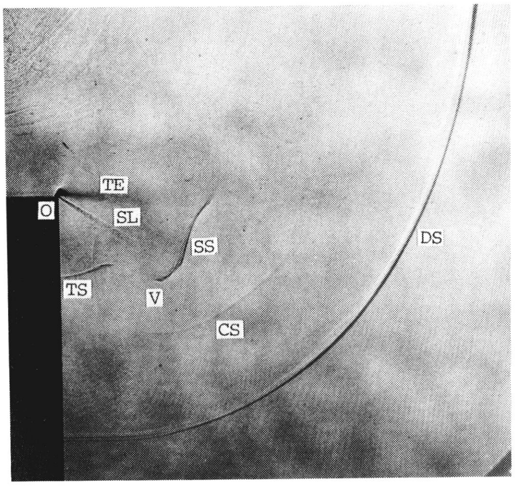


Fig. 4　(c) Shadowgraph[12]

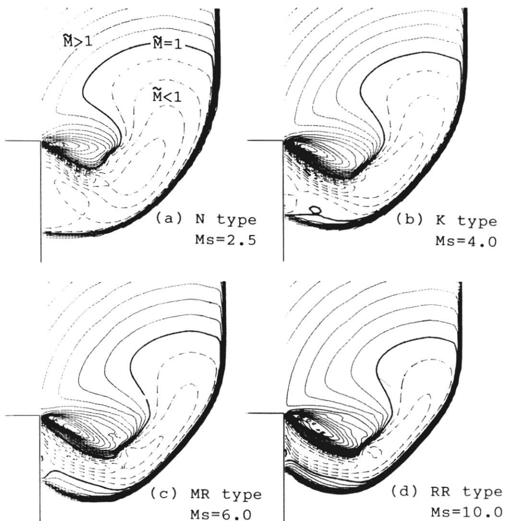


Fig. 5　Contours of self-similar Mach number (Air)

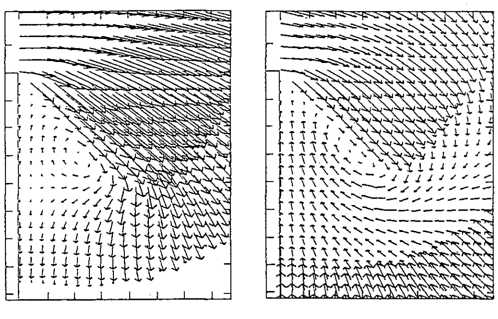
れとして取り扱うことができる．すなわち擬定常流れ（Pseudo-steady flow）である[2]．数値計算において得られた回折衝撃波の形状の違いを明確にするため，擬定常流れにおける流れのマッハ数$\widetilde{M}$の分布を，$M_s=$ 2.5, 4.0, 6.0, 10.0の空気の場合について，**Fig. 5** に示す．**Fig. 5 (a)** は回折衝撃波がなめらかで壁面に垂直な場合で，この形態を N type と呼ぶことにする．回折衝撃波背後の流れが壁面上で$\widetilde{M}<1$であるということは，その部分が相対流れに対し垂直衝撃波であることを意味している．**Fig. 5 (b)** は壁面近傍の回折衝撃波上にキンク点がある場合で，この形態を K type と呼ぶことにする．この K type では回折衝撃波の背後の$\widetilde{M}$がキンク点付近で$\widetilde{M}>1$となっており，回折衝

撃波が相対流れに対し斜め衝撃波になっていることを示している．**Fig. 5 (c)** は回折衝撃波が壁面でマッハ反射している場合で，この形態を MR type と呼ぶことにする．この MR type では，回折衝撃波背後の$\widetilde{M}>1$の部分が K type に比べ大きくなっているが，壁面までには達していない．**Fig. 5 (d)** は回折衝撃波が壁面で正常反射する場合で，この形態を RR type と呼ぶことにする．この RR type では回折衝撃波背後の$\widetilde{M}>1$の部分が壁面までに達している．このことは，壁面上で衝撃波の垂直部分がないことを示す．

3.3　回折する衝撃波背後の流れ

数値計算において得られた回折する衝撃波の背後の流れ場を明確にするため，絶対座標系から見た流れの速度ベクトル線図と擬定常流れにおける自己相似座標系から見た流れの速度ベクトル線図を，$M_s=2.33$の場合について，それぞれ **Fig. 6 (a), (b)** に示す．**Fig. 6 (a)** からわかるように，伝ぱする回折衝撃波により加速された壁近傍の流れは，回折衝撃波背後の膨張波により減速されよどみ点状態になる．その後，コーナーの頂点のほうへ逆向きに加速され頂点近傍で再びよどみ状態になる．一方，**Fig. 6 (b)** からわかるように，コーナーの頂点から発生する膨張波によって加速された流れは，せん断層に沿って進み，第二衝撃波を通過した後，渦により旋回して再び加速される．この渦による流れの加速が **Fig. 4 (c)** の実験で現われる第三衝撃波の発生原因である．

次に，入射衝撃波前方の圧力 p_1 で無次元化した，コーナーの頂点から回折衝撃波までの壁面に沿った圧力 p/p_1 の分布を，$M_s=2.33$の場合について，**Fig. 7** に示す．波線は文献（12）の実験結果である．横軸は頂点から回折衝撃波までの長さ U_{wt} で無次元化した



(a) Absolute velocity　　(b) Self-similar velocity

Fig. 6　Velocity vectors ($M_s=2.33$, R 12)

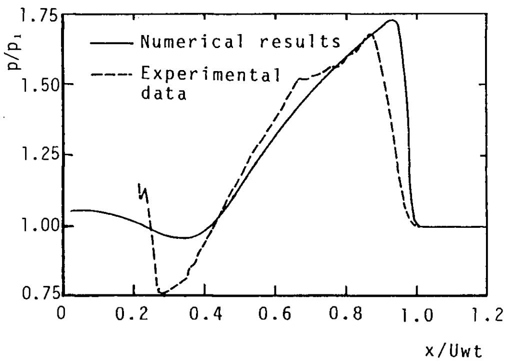


Fig. 7　Pressure distribution ($M_s=2.33$, R 12)

頂点からの長さ x/U_{wt} である．図より，計算による圧力分布は第三衝撃波の付近を除けば実験と良く一致しているのがわかる．**Fig. 6 (a)** によれば，絶対座標系による壁面上のよどみ点は $x/U_{wt}=0.55$で，その付近で実線の圧力の勾配が変化しているのがわかる．その傾向は実験でも同様である．また，$x/U_{wt}=0.35$の位置に圧力の最小点があり，**Fig. 6 (a)** によれば，そこの流れの速度は周囲より速くなっている．

4.　結　　　論

伝ぱする衝撃波が直角のコーナーを回折する場合に生じる流れ場を二次元 PLM で数値解析した．得られた結果を要約すると次の通りである．

(1) コーナーを回折する衝撃波の壁面近傍における形状は，壁面に垂直に入射する場合（N type），衝撃波に折れ曲がりがある場合（K type），マッハ反射する場合（MR type），正常反射する場合（RR type）の 4 種類がある．回折衝撃波は入射衝撃波マッハ数が小さいときは N type，M_s が大きくなるにつれ K type, MR type, RR type と変わっていく．

(2) 回折する衝撃波の背後の流れでは，コーナーの頂点からのはく離があり、はく離によるせん断流れの先頭は渦となっている．この渦の旋回のため，渦と壁面との間に第三衝撃波が発生する．

(3) 伝ぱする回折衝撃波により加速された壁近傍の流れは，回折衝撃波背後の膨張波により加速されよどみ点状態になる．その後，前と逆の方向へ加速され，頂点近傍で再びよどみ状態になる．

参　考　文　献

1) Lighthill, M. J., Proc. Royal Society, **A 198** (1949), 454.
2) Jones, D. M., ほか 3 名, Proc. Royal Society, **A 209** (1951), 238.
3) Parks, E. K., UTIA Report, 18 (1952).
4) Whitham, G. B., J. Fluid Mech., **2** (1957), 146.
5) Oshima, K., ほか 3 名, ISAS Report, **393** (1935), 51.
6) Bazhenova, T. V., ほか 2 名, Prog. Aero. Sci., **21** (1984), 249.
7) Tarnavskii, G. A., ほか 2 名, Fluid Dynamics, 11-5 (1976), 751.
8) Carofano, G. C., ARDC Tech. Report, ARLCB-TR-84029, 1984.
9) Thompson, P. A., ほか 2 名, J. Fluid Mech., **166** (1986), 57.
10) Colella, P. and Glaz, H. M., Lawrence Berkeley Lab. Report, LBL-15776 (1983).
11) Strang, G., J. Num. Anal., 5-3 (1968), 506.
12) 松尾・ほか 3 名, 機構論, No. 870-9, (昭62), 108.