イオン音波ソリトンの反射

金森, 康夫
関西電力株式会社

渡辺, 達男
九州大学大学院総合理工学研究科高エネルギー物質科学専攻

矢嶋, 信男
九州大学大学院総合理工学研究科高エネルギー物質科学専攻

https://doi.org/10.15017/17722

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 10 (2), pp.181-192, 1988-09-30. 九州大学大学院総合理工学研究科

イオン音波ソリトンの反射

金森康夫*・渡辺達男#・矢嶋信男

(昭和63年5月31日　受理)

Reflection of Ion-Acoustic Waves and Solitons

Yasuo KANAMORI*, Tatsuo WATANABE# and Nobuo YAJIMA

Stationary structure of ion sheath around a negatively biased grid inserted in a homogeneous plasma and the characteristic of propergation of ion-acoustic waves in its neighborhood are studied with the theory of collisionless plasmas. The reductive perturbation method applies to obtain the reflective coefficient of ion-acoustic waves from the grid. The results are shown to be in good agreement with the experiments by Nishida and Nagasawa.

1. 序　論

これまで多くの理論的ならびに実験的研究がイオン音波ソリトンについてなされているが，それらのほとんどは無限プラズマに関するものであって，境界の影響は考慮されていない．しかしながら，有限のプラズマ内をイオン音波が伝播する場合には，境界の効果を無視することはできない．境界が在ればそこで波は反射される．その反射率や位相の変化は，波が境界のところで満たすべき境界条件を知っていれば，理論的に導き出すことが可能である．このことはプラズマにおいても同じである．しかし，プラズマの場合には，境界のところでどのような境界条件を用いるべきかはそれほど自明ではない．それは，プラズマの境界では準中性仮定が成立せず，独特の構造を持ったシースを形成するからである．そこではシースに特有の静電ポテンシャルが存在するので，反射のようすは境界の性質によって左右される．たとえば，プラズマに金属グリッドを挿入するとき，その電位を正負いずれに保つかによって反射は全く異なるし，負の場合でもその電位の大きさによって反射率は違ってくる．また，反射板の素材が金属か誘電体かで結果は異なるし，たとえ同じ金属であってもその構造が板状かグリッド状かでも異なる．それらはすべてシースの性質が場合ごとに異なっているからである．

このようにして，イオン音波の反射問題は昔からプラズマシースの構造との関連において研究されてきている[1)-14)]．なかでも，Popa-Oertl は正電位の金属板を負電位の金属メッシュで覆うことによって2重極構造の静電ポテンシャル配位のシースを作り出し，それによりイオン音波が効果的に反射されることを見いだしている[7)]．これに関連したより徹底した研究が Raychaudhuri-Trieu-Tsikis-Lonngren によって行われている[13)]．それによれば，イオン音波の反射は，波にともなうイオン粒子が正電位の金属板で反射され，再び負電位のメッシュを通過するときにイオン音波を再放出することによって起こるものとされている．また，Noda-Nakamura-Kawai-Akazaki 達の最近の仕事でも，イオン音波の反射はイオンビームの反射と結び付いていることが示されている[14)]．

これに反して，Nishida-Nagasawa はプラズマ中に負の大電位のグリッドを挿入することによってもイオン音波の反射が起こり得ることを観測している[10)12)]．この場合には，波にともなうイオン粒子はグリッドを通過するので，反射イオンは存在しない．したがって，Lonngren 達とは別の反射機構を考える必要がある．

反射現象は線形イオン音波だけでなくソリトンに対しても観測されている．とくに，Nishida 達によると，負電位グリッドによるソリトンの斜め反射では，線形波におけるスネルの法則において位相速度の代わりにソリトン速度を用いた公式が成立していることが示さ

高エネルギー物質科学専攻
#同専攻博士課程
*同修士課程（現在関西電力株式会社）

れている[12]．このようなソリトンの反射のメカニズムはまだ理論的に明らかにされていない．

この論文では，無限に広がった一様プラズマ内に負の大電位グリッドを挿入したときのグリッド周辺のシース構造とそれによるイオン音波の反射を無衝突プラズマの理論を用いて調べることにしよう．

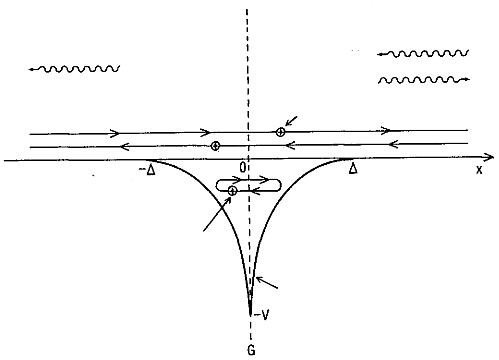

Fig. 1　Sheath structure around a negatively biased grid.

われわれが考えている状況は **Fig. 1** のとおりである．グリッドGの電位を $-V(V>0$; プラズマの電位を0とする) に保つ．図に示すように，グリッドの周辺の負のポテンシャル領域のところでイオンの一部は捕捉される．この捕捉イオンを以下ではシースイオンと呼ぶ．プラズマ内部のイオンはこのシースポテンシャルで捕捉されることなく，グリッドを通過して自由に系内を動くことができる．これをプラズマイオンと名付けておく．われわれは低周波波動を考えているので，電子はボルツマン分布に従うものと考えられる．

ここでは問題を空間1次元に制限して，グリッドの右側 $(x>0)$ の十分遠方から入射したイオン音波がグリッド $(x=0)$ のところで散乱されて，透過波および反射波として，それぞれ左側と右側の領域に伝播する状況を考えよう．このような系では次の方程式が適用される：

f_p と f_s をそれぞれプラズマイオンならびにシースイオンの分布関数とすると，

$$\frac{\partial f_p}{\partial t}+\sqrt{\tau_p}\,v\frac{\partial f_p}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial f_p}{\partial v}=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t}+\sqrt{\tau_s}\,v\frac{\partial f_s}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{\tau_s}}\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial f_s}{\partial v}=0 \quad (2)$$

が成立する．ここで x, t はそれぞれ L および c_s/L (L＝特性長; c_s＝音速＝$\sqrt{T_e/M}$; T_e＝電子温度; M＝イオン質量) で規格化されている．速度変数vは，プラズマイオンに対しては $v_p=\sqrt{T_i/M}$ で，シースイオンに対しては $v_s=\sqrt{T_s/M}$ で規格化してある．ここで，T_i, T_s はそれぞれプラズマおよびシースイオンの温度である．また，ϕ は無次元化された静電ポテンシャルで T_e/e で規格化してある．分布関数 f_p, f_s はそれぞれ v_p/n_0, v_s/n_0 で規格化してある．ここで n_0 はプラズマの十分内部における電子密度である．τ_p, τ_s は規格化された温度で，

$$\tau_p=T_i/T_e\,,\ \tau_s=T_s/T_e \quad (3)$$

で定義されている．電子はボルツマン分布に従うとしているので，静電ポテンシャル ϕ は

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=e^{\phi}-\int f_p dv-\int f_s dv \quad (4)$$

を満足している．ここで

$$\varepsilon=\lambda_D/L \quad (5)$$

である．$\lambda_D=\sqrt{T_e/(4\pi n_0 e^2)}$ はデバイの長さである．§2で示すように，シース幅Δは λ_D のオーダーであるので，$\Delta/L\sim O(\varepsilon)$ と考えられる．以下の議論では，Δが L に比べて十分に小さいとして，$\varepsilon\ll 1$ が仮定されている．

この論文では，基本方程式として (1)，(2)，(4) 式を用いて，イオン音波のグリッドによる反射を考察しよう．§2では，第1図の状況に対応してシース構造を表す定常解を求める．シース幅は温度パラメータ τ_p, τ_s に依存するが，一般にグリッド電圧 V とともに増加して，V が十分大きいところでは飽和値に達することが示される．§3ではイオン音波の伝播特性が調べられる．逓減摂動法を用いることによって[15]，シース領域から十分はなれたところでは，左右に伝わる波はそれぞれ Korteweg-de Vries 方程式で記述されることが示される．一方，シース内部では負電位のためプラズマイオンは負の圧力特性を持つこととなり，そのため波は伝播しなくなる．このような伝播特性を考慮して，§4ではイオン音波の反射問題が調べられる．とくに，$\varepsilon\ll 1$ の極限でシース領域はグリッド

の左右をつなぐ境界条件で置き換えられ，反射率と透過率が求められる．結果は Nishida 達の実験をよく説明している．§5はまとめにあてられている．

2.　定常解とシースの構造

ここでは，平衡状態におけるシースの構造を調べるために，(1)，(2)，(4) の定常解を求める．それらを $F_p(x, v)$, $F_s(x, v)$, $\Phi(x)$ と書いておく．ここで $\Phi(x)<0$ に注意しておく．$x\rightarrow\pm\infty$ における境界条件を

$$\Phi(\pm\infty)=0,\ F_p(\pm\infty, v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-v^2/2} \qquad (6)$$

のようにとる．すなわち，プラズマの十分内部でイオンは Maxwell 分布に従うとする．また，シースイオンはグリッド ($x=0$) でやはり Maxwell 分布になるものとして，

$$F_s(0, v)=\frac{\nu_s}{\sqrt{2\pi}}e^{V/\tau_s}e^{-v^2/2}\,\theta\left(\frac{V}{\tau_s}-\frac{v^2}{2}\right) \qquad (7)$$

とする．ここで，$\theta(z)$ は階段関数で，$z>0$ でのみ $\theta=1$ となり，それ以外では0である．ν_s はシースイオンの個数パラメータである．

方程式 (1)，(2) の定常解はエネルギー変数

$$E_j=V^2/2+\Phi(x)/\tau_j \quad (j=p, s) \qquad (8)$$

の関数であることは明らかであるが，境界条件 (6) を考慮すると

$$F_p(x, v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-E_p}\theta(E_p) \qquad (9a)$$

$$F_s(x, v)=\nu_s\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-E_s}\theta(-E_s) \qquad (9b)$$

を得る．ここで θ 関数は，プラズマイオンおよびシースイオンがそれぞれ非捕捉または捕捉粒子であることを表している．これらの解はそれぞれ境界条件 (6)，(7) を満足していることは，容易に判る．

(9) を (4) 式に代入して，$d\Phi/dx$ をかけて積分する．$x\rightarrow\pm\infty$ で Φ とその微分が消えることを使うと，

$$(\varepsilon^2/2)(d\Phi/dx)^2+U(\Phi)=0 \qquad (10)$$

$$U(\Phi)=-e^{\Phi}-\tau_p e^{-\Phi/\tau_p}+(1+\tau_p)$$
$$+\tau_p K(-\Phi/\tau_p)-\nu_s\tau_s K(-\Phi/\tau_s) \qquad (11)$$

$$K(G)=e^G\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{2G}}v^2e^{-v^2/2}dv \qquad (12)$$

を得ている．(10) から判るように，$U(\Phi)<0$ のときにのみ定常解が存在することができる．

(11)，(12) で $|\Phi|\ll 1$ とおいて展開する．$G\ll 1$ にたいして，$K\approx(4/3\sqrt{\pi})G^{3/2}$ と近似できるので，

$$U(\Phi)\approx\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}-\frac{\nu_s}{\sqrt{\tau_s}}\right)(-\Phi)^{3/2}$$

を得る．定常解が存在するには，右辺が負でなければならないので，

$$\nu_s>(\tau_s/\tau_p)^{1/2} \qquad (13)$$

という条件式を得る．この式は，定常シースが存在するための条件を与えているので，イオンが存在するための Bohm の条件式に対応するものである．Bohm の条件はシース近傍における負の電位で加速されたイオンビームの速度の下限を与えていたが，われわれの場合もそれに相当して (13) 式は $\sqrt{\tau_p}$ の下限を与えている．しかし，Bohm の場合と異なって，この値をそれほど大きくとらなくてもよい．むしろ，イオン音波がプラズマ内をイオン粒子によるランダウ減衰を受けずに伝播するためには，$\tau_p=T_i/T_e\ll 1$ でなければならない．すぐ後で見るように，シース領域で捕捉されたシースイオンを考慮したために，このような小さな τ_p に対しても (13) が成立することができて，定常シースが形成されるのである．

条件式 (13) をグリッド ($x=0$) におけるシースイオン密度 $N_s(0)$,

$$N_s(0)=\nu_s\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{V/\tau_s}\int_0^{\sqrt{2V/\tau_s}}e^{-v^2/2}dv \qquad (14)$$

を使って書き換えたものを **Fig. 2** に示しておく．図では $\tau_p=0.1$ としたときの $N_s(0)$ とグリッド電圧 V との関係が τ_s をパラメータとして描かれている．τ_s を決めると，定常シースはこの曲線より上側で可能である．τ_s はシースイオンの温度を表しているのであるから，その値がグリッド電圧 V より十分小さければ，Maxwell 分布に従うイオン粒子の大部分がポテン

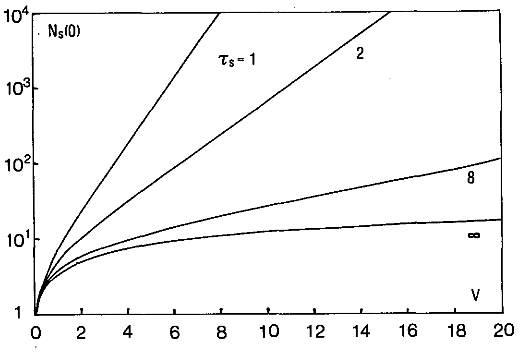

Fig. 2 The condition for formation of stationary sheath.

シャルの中に捉えられていることを意味している．このときには，(14) 式の積分の上限は∞にまで伸ばすことができて，条件式 (13) は

$$N_s(0) > \sqrt{\tau_s/\tau_p}\, e^{V/\tau_s} \qquad (13')$$

と近似できる．一方，シース温度が十分大きくて $\tau_s \gg V$ のときには，(14) の積分は近似的に評価できて (13) は

$$N_s(0) > 2\sqrt{V/(\pi\tau_p)} \qquad (13'')$$

となって，臨界曲線は τ_s に依らなくなる．何れにしても，プラズマ温度 τ_p が低くても，シースイオンが存在することによって定常シースが形成され得ることが示された．

(10) 式の平方根をとると，

$$\epsilon d\Phi/dx = \pm[-2U(\Phi)]^{1/2} \qquad (15)$$

となる．右辺を $|\Phi| \ll 1$ として展開すると，

$$\epsilon d\Phi/dx \approx A(-\Phi)^{3/4} \qquad (16)$$

を得る．ただし，複号のうち正符号のみを採る．A は正の定数で

$$A = \left[\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{\nu_s}{\sqrt{\tau_s}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\right)\right]^{1/2} \qquad (17)$$

これを積分すれば，

$$\Phi = -[A(x-\Delta)/4\epsilon]^4 \qquad (18)$$

が得られる．ここでは，シースの端でシース電位が消えるとして，$\Phi(\Delta)=0$ となるように境界条件をおいてある．この解から出発して，(15) を x の負の方向に積分して Φ を求め，それによりシース内部のポテンシャル配位を決めることができる．このようにして得られたグリッド電圧 V とシース幅 Δ の関係を **Fig. 3** に示す．そこでは，パラメーターは $\nu_s=4.0$, $\tau_p=0.1$ にとられている．これを (13) に入れると，$\tau_s<1.6$ でなければならないことが判る．図では，$\tau_s=0.1$～1.0 の範囲でシース幅 Δ とグリッド電圧の関係が描かれている．シース幅 Δ はシースイオンの温度 τ_s によって大きく変るが，いずれもグリッド電圧 V が大きくなると τ_s で決まる一定値に漸近的に近付いてゆくシース幅 Δ は，τ_s が大きいほど大きくなる．これは，τ_s の増加とともにシースイオンの圧力が増加し，シース幅を押し広げるためであると考えられている．

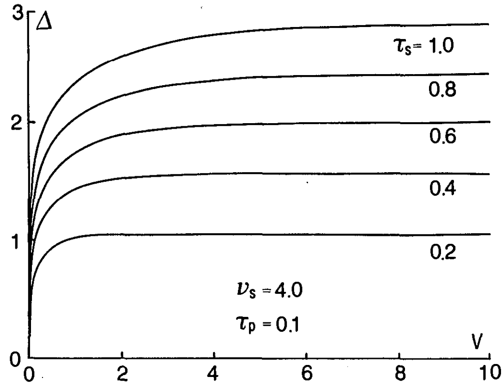

Fig. 3 The relation between sheath width and grid voltage.

Fig. 3 のようなシース構造を特徴づけているパラメーターはいったい何であろうか．とくに $V \gg \tau_s$ のときの Δ の飽和値は何で決まるのであろうか．それを定性的に調べてみよう．いま，グリッド電圧 V がイオンの温度に比べて十分大きいとしよう．グリッドに近いところでは，$U(\Phi)$ における電子やプラズマイオンの効果はシースイオンの効果に比べて無視できて ((11) 式で $|\Phi| \gg 1$ とせよ)，(10) 式は

$$\epsilon\frac{d\Phi}{dx} \approx \left[2\nu_s\tau_s K\left(-\frac{\Phi}{\tau_s}\right)\right]^{1/2} \qquad (19)$$

と書くことができる．これをシースイオンの寄与が効いている範囲で積分する．この領域の幅をΔ_1として，この点におけるΦの値をΦ (Δ_1) $=-V_1$のようにおく．(19) を積分して

$$\Delta_1 \approx \varepsilon\sqrt{\frac{\tau_s}{\nu_s}}\int_{V_1/\tau_s}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{2K(z)}} \tag{20}$$

を得る．ここで$V/\tau_s \gg 1$を考慮して，積分の上限を∞までのばした．これが正しいことは$z \gg 1$で$K(z) \sim e^z$となることから判る．

一方，グリッドから離れたところ，すなわちシースの端では，プラズマイオンとシースイオンの両方の寄与が効く．ポテンシャルが負であるから電子の寄与は小さいとして再び無視する．このとき近次的に (16) 式が成立する．これをΦについて ($0, -V_1$) の範囲で積分すると，この領域の幅Δ_2は

$$\Delta_2 \approx \frac{\varepsilon}{A}V_1^{1/4} \tag{21}$$

と評価できる．

実際のシース幅はΔ_1とΔ_2を加えあわせて，

$$\Delta \approx \varepsilon\sqrt{\frac{\tau_s}{\nu_s}}\left[\alpha + \beta\left(1-\frac{1}{\nu_s}\sqrt{\frac{\tau_s}{\tau_p}}\right)^{-1/2}\right] \tag{22}$$

となる．ここでα，βはV_1/τ_sにのみ依存する定数で，

$$\alpha = \int_{V_1/\tau_s}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{2K(z)}},\quad \beta = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{8}\right)^{1/2}\left(\frac{V_1}{\tau_s}\right)^{1/4} \tag{23}$$

と与えられる．Vはプラズマイオンとシースイオンの寄与が等しくなるところでの電位であって，一般にはν_s, τ_s, τ_pに複雑に依存するが，$V \gg \tau_s \gg V_1 \gg \tau_p$のときには比較的簡単に評価できる．このとき，プラズマイオンおよびシースイオンの密度，N_p, N_sは

$$N_p = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{V_1/\tau_p}\int_{\sqrt{2V_1/\tau_p}}^{\infty}e^{-v^2/2}dv \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\tau_p}{V_1}}$$

$$N_s = \nu_s\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{V_1/\tau_s}\int_0^{\sqrt{2V_1/\tau_s}}e^{-v^2/2}dv \approx \frac{2\nu_s}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{V_1}{\tau_s}}$$

と評価できるから，$N_p \approx N_s$とおいて

$$V_1 = \sqrt{\tau_p\tau_s}/(2\nu_s) \tag{24}$$

を得る．

(22) から，シース幅はグリッド電圧が大きいときには一定の飽和値に近付き，その幅はτ_sとともに増加することが判る．τ_sが (13) で決まる臨界値$\nu_s^2\tau_p$に近ければβに比例した項が支配的となり，シース幅は限りなく大きくなる．これらは **Fig, 3** の傾向に合致する．

3. 非線形イオン音波の伝播特性

ここでは，逓減摂動法の助けにより **Fig, 1** の状況のもとでの非線形イオン音波を記述する方程式を求めよう．前節で示したように，シース領域の外側には負の静電ポテンシャルは浸み出していない．したがって，問題を$|x| > \Delta$のプラズマ領域と$|x| < \Delta$のシース領域に分けて考えることができる．

（A）プラズマ領域

この領域にはシースイオンは存在していないので，(4) 式は

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = e^{\phi} - \int f_p dx \tag{25}$$

となる．この式を (1) 式と連立させればよい．

いま，波の振幅が小さいとして，f_p, ϕをパラメータεで展開して，

$$f_p\ (x, v; t) = F_p\ (v) + \varepsilon^2 f_p^{(1)} + \varepsilon^4 f_p^{(2)} + \cdots \tag{26a}$$

$$\phi\ (x, t) = \varepsilon^2\phi^{(1)} + \varepsilon^4\phi^{(2)} + \cdots \tag{26b}$$

とする．Φはシース領域の外側では0であるから，静電ポテンシャルには$\phi^{(0)}$は存在しない．F_pは (9a) で$\Phi = 0$とおいたもの，すなわち Maxwell 分布

$$F_p\ (v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-v^2/2} \tag{27}$$

に等しい．

いま，逓減摂動法の一般的手法にしたがって，緩やかに変化する時間変数σを

$$\sigma = \varepsilon^2 t \tag{28}$$

で導入しておく．

(26), (28) を (1) および (25) に代入すると，ε^2 の項は

$$\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial t}+\sqrt{\tau_p}\,v\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial F_p}{\partial v}=0 \tag{29a}$$

$$\phi^{(1)}-\int f_p^{(1)}dv=0 \tag{29b}$$

となる．(29a) に 1 および v をかけて，モーメント方程式をつくる．

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{30a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{30b}$$

ここで，n, u, p は

$$n=\int f_p^{(1)}dv \tag{31a}$$

$$u=\sqrt{\tau_p}\int vf_p^{(1)}dv \tag{31b}$$

$$p=\tau_p\int v^2 f_p^{(1)}dv \tag{31c}$$

で定義されていて，それぞれプラズマイオンの密度，流れ速度，圧力の揺動部分を表する．(29b) は (31a)により

$$\phi^{(1)}=n \tag{32}$$

となる．

圧力 p に関する表式を求めておこう．ここでは $\tau_p \ll 1$ の状況を想定して入るので，圧力を τ_p のベキ展開で求める．(29) を t で微分して逐次代入法を使う．すなわち，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_p^{(1)}}{\partial t^2}&=\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial x\partial t}\frac{\partial F_p}{\partial v}-\sqrt{\tau_p}\,v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial t}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial x\partial t}\frac{\partial F_p}{\partial v}\\&\quad-\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial x^2}v\frac{\partial F_p}{\partial v}+O(\sqrt{\tau_p})\end{aligned}$$

これに $\tau_p v^2$ をかけて v について積分する．(27) ならびに (32) を使うと，プラズマイオンの状態方程式として

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=3\tau_p\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \tag{33}$$

が得られる．$p=O(\tau_p)$ であるから，(30b) の圧力項を無視して，

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial n}{\partial x}=0 \tag{31c}$$

が得られる．あるいは，u を消去して

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}=0 \tag{34}$$

を得る．

(34) の一般解は，特性線座標

$$\xi=x-t,\quad \eta=x+t \tag{35}$$

を用いて

$$n(x, t;\sigma)=g(\xi,\sigma)+h(\eta,\sigma) \tag{36a}$$

と書くことができる．ここで $g(\xi,\sigma)$ および $h(\eta,\sigma)$ は，それぞれ右向き (x の正方向) ならびに左向き (x の負方向) に伝わる波を表している．これに (31c) を考慮すると

$$u(x, t;\sigma)=g(\xi,\sigma)-h(\eta,\sigma) \tag{36b}$$

となる．

次に高次項にすすむ．(1) および (25) の ε^4 の項から

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_p^{(2)}}{\partial t}+\sqrt{\tau_p}\,v\frac{\partial f_p^{(2)}}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x}\frac{\partial F_p}{\partial v}\\&\quad+\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial\sigma}-\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial v}=0\end{aligned} \tag{37a}$$

$$\phi^{(2)}=\int f_p^{(2)}dv+\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}-\frac{1}{2}n^2 \tag{37b}$$

を得る．(37a) に 1 および v をかけ，v について積分してモーメント方程式をつくる．さらに，$\int vf_p^{(2)}dv$ を消去して (37b) を考慮すると，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi^{(2)}-\tau_p\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int v^2 f_p^{(2)}dv$$
$$+\frac{\partial^2 n}{\partial\sigma\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma\partial x}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}n^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}n^2-\frac{\partial^4 n}{\partial t^2\partial x^2}=0 \tag{38}$$

が導かれる．

イオンの圧力変動の２次の成分は (33) を導いたやり方で求めることが出来る．すなわち，

$$\frac{\partial^2 f_p^{(2)}}{\partial t^2}=\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\frac{\partial^2\phi^{(2)}}{\partial x\partial t}\frac{\partial F_p}{\partial v}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial v}\right)$$
$$-\frac{\partial^2 f_p^{(1)}}{\partial\sigma\partial t}-\frac{\partial^2\phi^{(2)}}{\partial x^2}v\frac{\partial F_p}{\partial v}$$
$$-v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial v}\right)+O(\sqrt{\tau_p})$$

であるから，$\tau_p v^2$ をかけて v について積分して，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tau_p\int v^2 f_p^{(2)}dv=-2\frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}\right)+O(\tau_p)$$

を得る．$\phi^{(1)}$ を n で書き換えて，(31c) を使うと，

$$\tau_p\int v^2 f_p^{(2)}dv=u^2+O(\tau_p) \tag{39}$$

が得られる．

(38) に (35)，(36)，(39) を入れると，最終的に

$$4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left[\phi^{(2)}-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial\xi}H(\eta)-\frac{1}{2}G(\xi)\frac{\partial h}{\partial\eta}\right]$$
$$=-2\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial g}{\partial\sigma}+g\frac{\partial g}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g}{\partial\xi^3}\right]$$
$$+2\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial h}{\partial\sigma}-h\frac{\partial h}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 h}{\partial\eta^3}\right] \tag{40}$$

が導かれる．ここで，

$$G(\xi,\sigma)=\int^{\xi}g(\xi',\sigma)\,d\xi' \tag{41a}$$

$$H(\eta,\sigma)=\int^{\eta}h(\eta',\sigma)\,d\eta' \tag{41b}$$

とした．右辺の g (もしくは h) を含む項は ξ (もしくは η) の関数であるので，$\phi^{(2)}$ が永年項を含まないためには，それらがゼロでなければならない．すなわち，g および h は

$$\frac{\partial g}{\partial\sigma}+g\frac{\partial g}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g}{\partial\xi^3}=0 \tag{42a}$$

$$\frac{\partial h}{\partial\sigma}-h\frac{\partial h}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 h}{\partial\eta^3}=0 \tag{42b}$$

を満たさなければならない．これを (40) にいれて，積分すると

$$\phi^{(2)}=\frac{1}{2}H\frac{\partial g}{\partial\xi}+\frac{1}{2}G\frac{\partial h}{\partial\eta}$$
$$+\mathrm{p}(\xi,\sigma)+\mathrm{q}(\eta,\sigma) \tag{43}$$

が得られる．ここで $\mathrm{p}(\xi,\sigma)$，$\mathrm{q}(\eta,\sigma)$ は未知関数で，その方程式は次のオーダーで決められる．

(36) と (43) とから判るように，シース領域の外側では，イオン音波は ϵ^2 の次数では右向きの波と左向きの波との重ね合わせで記述され，しかもそれらは Korteweg-deVries 方程式に従う．そこで，これらの左右に伝播する波を，**Fig. 1** に示したように，$x>0$ においては入射波と反射波に $x<0$ においては透過波に対応させて反射問題を解けばよい．反射係数や透過係数は波の接続条件にシース領域での波の振舞いを考慮することによって求められる (§4 を見よ)．

(B) シース領域

この領域においても ϵ のベキ展開法を用いる．プラズマイオンの分布関数 f_p は (26a) と同様に展開できるが，F_p は (27) ではなく (9a) で与えられる．シース内では $\Phi\neq 0$ であるから，ϕ は

$$\phi=\Phi+\epsilon^2\phi^{(1)}+\epsilon^4\phi^{(2)}+\cdots \tag{44a}$$

と書かれる．$f_s\neq 0$ であるから，

$$f_s=F_s+\epsilon^2 f_s^{(1)}+\epsilon^4 f_s^{(2)}+\cdots \tag{44b}$$

と展開する．

ϵ^2 のオーダーで (1) は

$$\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial t}+\sqrt{\tau_p}\,v\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial v}-\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial F_p}{\partial v}=0 \tag{45}$$

となる．これからモーメント方程式をつくると

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{46a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+N_p\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}n+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{46b}$$

が得られる．n, u, p は (31) で与えられている．N_p はシース内の定常プラズマイオン密度で，

$$N_p=\int F_p dv=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\Phi/\tau_p}\int_{\sqrt{-2\Phi/\tau_p}}^{\infty}e^{-v^2/2}dv \tag{47}$$

と定義される．$|\Phi|\gg\tau_p$ のときには

$$N_p=\sqrt{-\frac{\tau_p}{\pi\Phi}}\,(1+O\,(\tau_p)) \tag{47'}$$

と近似できる．

p を求めるのに準静的近似を使う．§2で見たように，シース幅は ϵ のオーダーであるから，(45) において $(\partial/\partial x)=O(\epsilon^{-1})$ である．波の振動数は $O(\epsilon^0)$ であるから $(\partial/\partial t)\sim O\,(1)$ である．これから

$$\sqrt{\tau_p}\,v\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial v}-\frac{1}{\sqrt{\tau_p}}\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial F_p}{\partial v}=0$$

とすることができる．すなわち，シースイオン粒子が負の大振幅ポテンシャルを何度も往復運動している間に，波にともなった緩やかなポテンシャルの変化にその分布関数が馴染んでしまうのである．

エネルギー変数 (8) を使って上式を書き換えると

$$\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial x}=\frac{1}{\tau_p}\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial F_p}{\partial E} \tag{48}$$

となるので，ただちに

$$f_p^{(1)}=\tau_p^{-1}\phi^{(1)}\frac{\partial F_p}{\partial E} \tag{49}$$

と書くことができる．これをつかって n, p を計算すると

$$n=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_p}{\pi}}\,(-\Phi)^{-3/2}\phi^{(1)},$$

$$p=-\sqrt{\frac{\tau_p}{\pi}}(-\Phi)^{-1/2}\phi^{(1)} \tag{50}$$

と書くことができる．これを組み合わせて (47′) を考慮すると，

$$p=-(2\tau_p/\pi)\;n/N_p^2 \tag{51}$$

という状態方程式を得る．これは通常の気体における圧力と密度の関係と異なって，密度 n の増加とともに圧力 p が減少するという性質を示している（負の圧力特性）．このことは，シース領域における負の大振幅ポテンシャルによってプラズマイオンが加速される結果として理解できる．加速ポテンシャルが大きいとプラズマイオンはビームのように振る舞って，ビーム速度 U は密度の逆数 N^{-1} に比例する．プラズマイオンは左右からシース領域を通過するので，それは $\pm U$ の2つのビームからなる気体と考えられる．そこで，圧力 P は

$$P\sim NU^2\sim N^{-1}$$

となる．これから $\delta P\sim-\delta N/N^2$, すなわち (51) を得る．

シースイオンについても準静的近似を使えば，(49) で添字 "p" から "s" に換えた式を得る．$|\Phi|\gg\tau_s$ のもとにこれを積分すると

$$\int f_s^{(1)}dv=-N_s\phi^{(1)}/\tau_s \tag{52a}$$

$$N_s=\int F_s dv=\nu_s\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{-2\Phi/\tau_s}}e^{-E_s}dv \approx \nu_s e^{-\Phi/\tau_s} \tag{52b}$$

が得られる．この結果は，シースイオンがポテンシャル ϕ の中でボルツマン分布をしていると仮定して導いたものと同じになっている．このときには，

$$N=\nu_s e^{-\phi/\tau_s}$$

となるから，$\delta N=-N\delta\phi/\tau_s$ となって (52) を得る．

(4) 式に (44) と (52) をいれて ε^2 の項をとると

$$(e^{\Phi}+N_s/\tau_s)\,\phi^{(1)}-n=0 \tag{53}$$

を得る．これを使って (46b) から $\phi^{(1)}$ が消去できて，

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}n+N_p\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{n}{e^{\Phi}+N_s/\tau_s}\right]-\frac{2\tau_p}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{n}{N_p^2}\right)=0 \tag{54}$$

が得られる．この左辺第3項と第4項において，Φは負で絶対値が大きいことを考慮するとプラズマイオンの寄与だけが残る．すなわち，

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}n-\frac{2\tau_p}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{n}{N_p^2}\right)=0 \tag{55}$$

この式をもっとコンパクトな形に書き直すことができる．(47′) を使って (55) の第2項のΦを N_p で表すと

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{2\tau_p}{\pi}N_p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{n}{N_p^3}\right)=0 \tag{56}$$

が得られる．さらに，

$$\rho=n/N_p^3,\quad \zeta=\int\frac{dx}{N_p} \tag{57}$$

によって変数ρとζを導入すると，(46′) と (56) はまとめて

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\frac{2\tau_p}{\pi}N_p^{-4}\frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta^2}=0 \tag{58}$$

と書くことができる．

(58) 式は楕円型であって伝播現象を表さない．すなわち，状態方程式 (51) が示すように，シース領域ではプラズマイオンが負の圧力特性をもつために波の位相速度 c_s が

$$c_s^2=-\frac{2\tau_p}{\pi}N_p^{-4} \tag{59}$$

のように虚数になるのである．

4. イオン音波の反射と透過

ここではグリッドを通して波がどのように振舞うかを考察しよう．そのためには，シース領域をはさんで波がどのように接続するかを知る必要がある．§2で示したように，シース幅は波長に比べてεのオーダーであるので，波の振舞いがシース領域の詳細な状況に依存することはないであろうと考えられる．したがって，以下では，シース領域をある境界条件で置き換えて取り扱うことにする．(58) 式から判るように，シース内ではイオン音波は波として伝播しない．ただ，外部の変動に対応した応答がシースを通して反対側に現れるだけである．このようすを見るためには (58) を解かねばならないが，それは一般には複雑なので，ここでは階段関数的なシースを考えて，N_p＝一定として取り扱うことにする．そこで，(46a) と (56) のかわりに

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}-\gamma^2\frac{\partial n}{\partial x}=0 \tag{60}$$

を用いる．γは

$$\gamma=\frac{2\tau_p}{\pi}N_p^{-4}=\text{定数} \tag{61}$$

で定義する．このとき，(58) 式は

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}+\gamma^2\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\gamma^2\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}=0 \tag{62}$$

となる．定性的な結果を得るためには，この近似で十分であることが後で判る．

(A) 線形波の反射

プラズマ領域 ($|x|>\Delta$) では，n は (34) を満足するので振動数 k の波を考えて，

$$n\ (x,t)=\begin{cases}[e^{-ikx}+Re^{ikx}]e^{-ikt} & (x\geqq\Delta)\\ Te^{-ikx-ikt} & (x\leqq-\Delta)\end{cases} \tag{63}$$

とする．ここで R, T はそれぞれ反射波および透過波の振幅である．また，入射波の振幅は1とした．シース内では (62) から，

$$n\ (x,t)=[Ae^{kx/\gamma}+Be^{-kx/\gamma}]e^{-ikt} \tag{64}$$

を得る．これらの解を $x=\pm\Delta$で滑らかにつないで，反射係数および透過係数を求める．すなわち，

$$R=-\frac{i\gamma}{2}\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{\sinh\left(\frac{2k}{\gamma}\Delta\right)e^{-2ik\Delta}}{\cosh\left(\frac{2k}{\gamma}\Delta\right)-\frac{i\gamma}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)\sinh\left(\frac{2k}{\gamma}\Delta\right)} \qquad (65a)$$

$$T=\frac{e^{-2ik\Delta}}{\cosh\left(\frac{2k}{\gamma}\Delta\right)-\frac{i\gamma}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)\sinh\left(\frac{2k}{\gamma}\Delta\right)} \qquad (65b)$$

ここで $k\Delta \ll 1$ を仮定すると，ε の1次のオーダーで

$$R=-ik\Delta e^{-2ik\Delta},\quad T=\frac{e^{-2ik\Delta}}{1-ik\Delta} \qquad (66)$$

となる．このとき反射波の振幅は $O(k\Delta)=O(\varepsilon)$ のオーダーで小さく，波の大部分は透過している．反射係数は波の振動数 k に比例し，γ に依存していない．このことは，グリッド電圧が大きくイオン音波の波長が長い場合には反射係数はシース幅と波長の比だけで決まり，シースの細かな構造には依存しないことを意味している．

半無限プラズマの端に負電位グリッドを置いた場合の反射問題も同じようなやり方で調べられる．いま，$x<0$ で波は存在しないとする．このとき，$x=0$ で固定端の境界条件 $(n=0)$ をおくと (64) から $A=-B$ となるので，

$$R=-\frac{1+i\gamma\tanh\left(\frac{k}{\gamma}\Delta\right)}{1-i\gamma\tanh\left(\frac{k}{\gamma}\Delta\right)}e^{-2ik\Delta} \qquad (66')$$

が得られる．もし，$x=0$ で自由端 $(\partial n/\partial x=0)$ であれば，(66′) の全体の符号を＋に換えておけばよい．何れの場合も，入射波は完全に反射することになる．この状況はプラズマ内に2重極構造のグリッドを挿入したときの状況に似ている．文献7)，13)，14) で示されているように，このとき大きな反射係数が観測されている．しかしモデルの適否を結論するには入射波と反射波の位相差など詳細な検討を必要とする．

（B）ソリトンの反射

テーラー展開を使えば，密度 n のシースの両端における値は

$$n(\Delta)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(2\Delta)^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}n(x)\right]_{x=-\Delta}$$

で関係づけられている．ここで (60) − (62) を用いて x 微分を t 微分に書き直すと，

$$n(\Delta,t)=\cos\left(\frac{2\Delta}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\right)n(-\Delta,t)+\gamma^{-1}\sin\left(\frac{2\Delta}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\right)u(-\Delta,t) \qquad (67a)$$

となる．同じ操作を $u(x,t)$ について行って

$$u(\Delta,t)=\cos\left(\frac{2\Delta}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\right)u(-\Delta,t)-\gamma\sin\left(\frac{2\Delta}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\right)n(-\Delta,t) \qquad (67b)$$

が得られる．$x=\pm\Delta$ で，n と u が連続であることを使って，これらの式の両辺の量をプラズマ領域の量で置き換える．$x>\Delta$ においては波は入射波 ψ_0 と反射波 ψ_R から成り立っている．ψ_0 は左向きに進む波であるから (36) の $h(\eta,\sigma)$ に相当している．これは透過波 ψ_T についても同じである．反射波 ψ_R は右向波 $g(\xi,\sigma)$ に相当する．このことを考慮すると，$x>\Delta$ では

$$n(x,t)=\psi_0(\eta,\sigma)+\psi_R(\xi,\sigma) \qquad (68a)$$
$$u(x,t)=-\psi_0(\eta,\sigma)+\psi_R(\xi,\sigma) \qquad (68b)$$

$x<-\Delta$ では

$$n(x,t)=\psi_T(\eta,\sigma),\ u(x,t)=-\psi_T(\eta,\sigma) \qquad (69)$$

を得る．これらを (67) に入れて，ψ_R および ψ_T と ψ_0 の関係から反射および透過条件を求めることができる．一般的にこの手続きを実行するのは面倒なので，以下では ε の最低次のみに着目して (67) における Δ の高次の項を無視することにする．ψ_T を消去して，

$$\psi_R(\Delta-t,\sigma)=-\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)\Delta\frac{\partial}{\partial t}\psi_0(\Delta+t,\sigma)$$

が得られる．ここで，$t=\Delta-\xi$ と書く．σ の定義 (28) を使って，$\sigma=\varepsilon^2 t=\varepsilon^2(\Delta-\xi)\sim 0$ および $\gamma\gg 1$ を考慮して

$$\psi_R(\xi,0)=-\Delta\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(\eta,0)\right]_{\eta=2\Delta-\xi} \qquad (70a)$$

が得られる．同じようにして

$$\psi_T(\eta,0)=[(1-\Delta\frac{\partial}{\partial\eta'})\ \psi_0(\eta',0)]_{\eta'=2\Delta+\eta} \tag{70b}$$

を得る．

ここで，(65) 式で$\sigma=0$とおいたことについて注意しておこう．われわれのの規格化では，音速は1のオーダーであるので，グリッドに接近したイオン音波がシース領域を通り抜けてしまう時間はO (1) であると考えられる．したがってここでの近似は，反射もしくは透過過程においてゆるやかな時間変数σの経過は殆どゼロであると見なしていることに相当している．これはシース幅がせまくイオン音波の波長が長い場合には正しいと考えられる．

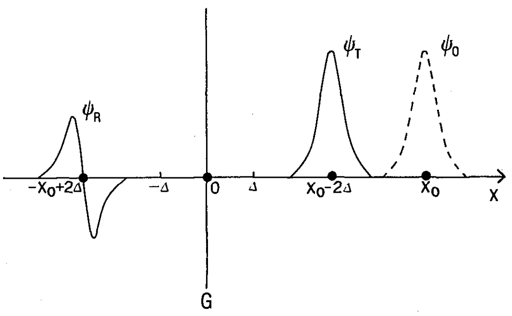

Fig. 4 Wave forms of the reflected and the transmitted waves.

シース領域での波の接続条件 (70) は$\psi_R(\xi,\sigma)$と$\psi_T(\eta,\sigma)$の$\sigma=0$の値を決めている．したがって，反射波ψ_Rおよび透過波ψ_Tは，それぞれが従うべき Korteweg-deVries 方程式，(42) を (70) の初期条件のもとに解くことによって得られることになる．これらの状況を **Fig. 4** に示す．図では，$t=0$において入射波が$x=x_0$に在るものとしている．このとき，反射波の初期波形は入射ソリトン解を微分してグリッド ($x=0$) に対して反転したものになっている．このとき，位相は対称位置から2Δだけグリッド寄りになっている．また，透過波の初期波形は入射ソリトンとほぼ同じであるが，その位置はやはり2Δだけグリッドに寄っている．これはシースがイオン音波に対して無限大の速さで応答したことを意味している．このことは，すでに§3で示したように，イオン音波がシース内部では非伝播型の特性を持っていたことと関連している．ちょうど量子力学におけるトンネル効果と同じように，イオン音波は非伝播媒質内をくぐり抜けているにすぎないのである．

Fig. 4 で示した初期値からどのような反射波が発生するかは，(42) 式を逆問題法によって解くことによって明らかにされる．しかし，ここでは詳しいことに立ち入らずに，たんに反射波がイオン音波ソリトンになるための条件だけを考えておこう．いま，入射波が振幅Sのソリトンであったとして

$$\psi_0=S\,\mathrm{sech}^2\,[\sqrt{S/6}(\eta+S\sigma/3-\eta_0)] \tag{71}$$

とすると，反射波の初期条件は (70a) から

$$\psi_R(\xi)=-\sqrt{2/3}\,\Delta S^{3/2}\,\mathrm{sech}^2\,[\sqrt{S/6}\,(\xi+\eta_0-2\Delta)]\times\tanh\,[\sqrt{S/6}\,(\xi+\eta_0-2\Delta)] \tag{72}$$

で与えられる．Korteweg-deVries 方程式 (42) の解gに対して，Sturm-Liouville 型の固有値方程式

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{g}{3}y=\lambda y \tag{73}$$

を考えると，その離散固有状態がちょうどgに含まれるソリトンに対応する．いまソリトン解を

$$S(\xi,\sigma)=S_0\,\mathrm{sech}^2\,[\sqrt{S_0/6}\ (\xi-S_0\sigma/3)] \tag{74}$$

とすると，その振幅Sと固有値λは

$$S_0=6\lambda \tag{75}$$

で結び付いている[16]．したがって，反射波が果してソリトンを含み得るか否かは，初期値 (73) に対して離散固有値λが存在するか否かを調べれば判る．この条件を定性的に評価するために (72) を深さU，幅aの井戸型関数を反対称的に2つつないだもので近似してみよう．このとき，反射ソリトンの形成条件として$Ua^2>(5\pi/4)^2$が得られる．(72) の表現から，$U=\sqrt{2}(S/9)^{3/2}$, $a=2\sqrt{3/S}$とできるので，これは

$$S>\sim 2\pi^2 \tag{76}$$

と見積もることができる．もちろん，この条件式は大きさのオーダー程度の意味しか持っていないが，反射波がソリトンになるためには入射ソリトンの振幅に下限が存在するという興味深い結果を与えている．入射ソリトンの振幅がこの下限以下では，反射波は分散波

として分解してしまうのである.

5. ま と め

この論文において，負の大電圧を印加したグリッドによるイオン音波ならびにソリトンの反射を理論的に調べた．反射の様子はグリッド近傍におけるシースの性質に強く依存するので，われわれは無衝突プラズマの理論を用いてシースの構造とその内部でのイオン音波の伝播特性を導き，それにより反射と透過の性質を明らかにした．§3と§4で得られた結果によれば，入射ソリトンと反射ならびに透過ソリトンは，非線形波でありながら，シース領域をはさんで線形の境界条件によって接続される．この結果を用いて，イオン音波の反射係数ならびに透過係数が求められた．得られた結果は次のようにまとめられる．

(1) プラズマ内に挿入された負電位グリッド周辺のシース幅は，グリッド電圧が大きいときにはその電圧に依存せず，シース近傍に捕捉されたイオン粒子の密度とエネルギーで決まる飽和値に近付く (**Fig. 3**)．このようなシースモデルがどれだけ現実のシースに適用できるかは，観測事実との詳しい比較が必要であるが，このモデルによって波動領域とシース領域を統一した立場によって取り扱うことが可能となった．

(2) シース内部では強い負電位ポテンシャルのため，イオンは負の圧力特性を示すことが明らかになった．このため，イオン音波はシース内を伝播しない．シースの一方の端でキャッチされたイオン音波は，量子力学のトンネル効果に似た効果によって反対側に伝達される．この効果は Nishida[10)12)] 達によって実験的に確認されている．

(3) プラズマ内に2重極構造のグリッドを挿入した場合は，われわれの場合でグリッドの片側のプラズマ密度をゼロとしたものに相当するが，このとき入射波は完全に反射される．この傾向は文献7)，13)，14) においても観測されているが，モデルの当否については，位相差のチェックなどまだ十分な検討を必要とする．

(4) ソリトンの反射問題についての定性的な議論によれば，反射波は入射ソリトンの振幅がある臨界値を超えたときのみソリトンとして伝わることができる．それ以下では，反射波は分散効果により拡散する．

この論文ではシース内での粒子と波の共鳴相互作用を取り入れていない．このことは考えている波が長波長の場合には正しい．何故なら，このとき波は共鳴効果が起こる以前にシース幅を乗り越えてしまうことができるからである．しかし，波の波長がシース幅と比較できる程度に短くなると，負のポテンシャルで加速されたイオン粒子による共鳴効果は無視できない．実験においても，Nishida 達は短波長領域で反射係数が異常に大きくなる現象を見出している．この現象に関する計算機シミュレーションについては別の機会に報告したい．

また，ここでは1次元的な現象だけを考えた．ここで得られたシースの取り扱いを2次元に拡張すると，非線形スネルの法則が調べることができるが，これについても別の機会に報告する予定である．

謝 辞

この研究は当専攻の河合良信教授および宇都宮大学工学部西田靖教授との討論に負うところが多い．この機会に厚くお礼を申し上げたい．

文 献

1) B. Bertotti, M. Brambilla and A. Sestero: Phys. Fluids **9** (1966) 1428.
2) M. Widner, I. Alexeff and W. Jones: Phys. Lett. **32A** (1970) 177.
3) R. Weynants, A. Messiaen and P. Vandenplas: Phys. Fluids **16** (1973) 1692.
4) O. Ishihara and I. Alexeff: Phys. Fluids **21** (1978) 2211.
5) I. Ibrahim and H. Kuehl: Phys. Fluids **27** (1984) 962.
6) Y. Nakamura, Y. Nomura and T. Itoh: Proc. Int. Conf. on Plasma Phys. (1980, Nagoya) **7P-I-17**.
7) G. Popa and M. Oertl: Phys. Lett. **98A** (1983) 110.
8) L. Schott: Phys. Fluids **26** (1983) 3431.
9) L. Schott: Phys. Lett. **100A** (1984) 235.
10) Y. Nishida: Phys. Fluids **27** (1984) 2176.
11) L. Schott: Phys. Fluids **29** (1986) 846.
12) T. Nagasawa and Y. Nishida: Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 2688.
13) S. Raychaundhuri, B. Trieu, E. Tsikis and K. Lonngren: IEEE. Trans. Plasma Science **14** (1986) 42.
14) S. Noda, Y. Nakamura, Y. Kawai and M. Akazaki: Jpn. J. Appl. Phys. **27** (1988) 403.
15) M. Oikawa and N. Yajima: J. Phys. Soc. Jpn. **34** (1973) 1389.
16) C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura: Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1095; Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974) 97.