

## 一様温度の正方形配列加熱円柱群から軸方向流動流体への層流熱伝達の数値解析

宮武, 修

九州大学大学院総合理工学研究科熱エネルギーシステム工学専攻

岩下, 寛之

九州大学大学院総合理工学研究科熱エネルギーシステム工学専攻

三浦, 靖弘

九州大学大学院総合理工学研究科熱エネルギーシステム工学専攻

<https://doi.org/10.15017/17701>

---

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 9 (2), pp.247-253, 1988-01-01. 九州大学大学院総合理工学研究科

バージョン :

権利関係 :

# 一様温度の正方形配列加熱円柱群から 軸方向流動流体への層流熱伝達の数値解析

宮 武 修\*・岩 下 寛 之\*\*・三 浦 靖 弘\*\*\*

(昭和62年9月30日受理)

## A Numerical Analysis of Laminar-Flow Heat Transfer to a Fluid Flowing Axially between a Square Array of Heated Cylinders with a Uniform Surface Temperature

Osamu MIYATAKE, Hiroyuki IWASHITA and Nobuhiro MIURA

This paper deals with the laminar-flow heat transfer to a fluid flowing axially between a square array of heated cylinders with a uniform surface temperature.

The finite-difference form of the energy equation is solved numerically to obtain the axial variation of temperature distribution by means of a forward-marching, implicit method with iteration, and typical results for the arithmetic mean Nusselt number  $Nu_{am}$  are presented graphically for the Graetz number  $Gz$  up to  $10^5$  and spacing-to-diameter ratios  $\sigma$  of 1.0 to 4.0.

Furthermore, the numerical results of  $Nu_{am}$  are compared at the same values of volume fraction of cylinders  $\epsilon$  with those obtained previously for a triangular array of cylinders with a uniform surface temperature. It is realized that, in general, the rate of heat transfer for the triangular array is higher than that for the square array, especially for the case  $\epsilon > 0.5$ .

### 1. 緒 言

加熱円柱群から軸方向に流動する流体への層流熱伝達に関する知見は、高粘性液等を取り扱う多管型熱交換器の設計、類似幾何形状系内での熱伝達の解析、例えば円柱群蓄熱体を用いる蓄熱装置の解析<sup>1)</sup>の際に必要なとなってくる。著者らは、既に、円柱群が三角形配列で、周方向、軸方向共に円柱壁面一様温度の場合<sup>2)</sup>及び周方向、軸方向共に円柱壁面一様熱流束の場合<sup>3)</sup>の層流熱伝達特性を数値解析した。

本報では、円柱群が正方形配列で、周方向、軸方向共に円柱壁面一様温度の場合の層流熱伝達について数値解析を行い、算術平均ヌセルト数を求めた結果ならびに正方形配列と三角形配列の差異について記述する。

### 2. 基礎方程式

解析系及び座標系を Fig. 1 に示した。正方形配列

(間隔  $2s$ ) の加熱円柱 (直径  $d_0$ , 半径  $r_0$ , 長さ  $l$ ) 群からそれらの間隙を軸方向に層流で流れる流体への熱伝達を数値解析するために、半径方向、周方向、軸方向のそれぞれに対応する円柱座標系  $(r, \theta, z)$  を用いる。流路断面の対称性から、直角二等辺三角柱 (等辺  $s$ , 角度  $\pi/4$ , 長さ  $l$ ) 内が解析する領域の要素となる。

ここで次の仮定を置く。1) 各円柱壁面は、加熱区間  $z \geq 0$  において、周方向、軸方向共に一様温度  $t_w$  に保たれている。2) 流体は一様温度  $t_0$  で、十分に

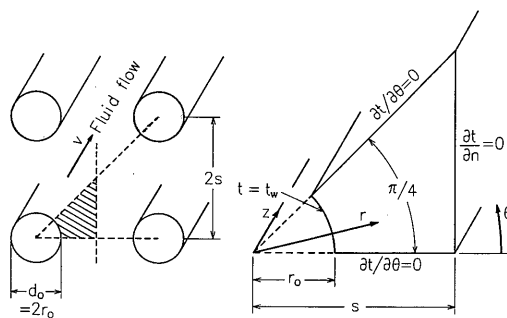


Fig. 1 Analytical system and coordinates

\* 熱エネルギーシステム工学専攻

\*\* 同上 博士後期課程

\*\*\* 同上 修士課程

発達した層流速度分布をもって加熱区間に流入する。  
 3) 流体の物性定数は一定であり、粘性消散は無視できる。  
 4) 流体内の軸方向の熱伝導による熱移動は、対流による熱移動に比べて無視できる。  
 これらの仮定のもとで、無次元化されたエネルギー方程式及び温度境界条件 (Fig. 1 参照) は次式で与えられる。

$$V \frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (1)$$

$$Z=0; T=0 \quad (2)$$

$$R=1; T=1 \quad (3)$$

$$\theta=0, \theta=\pi/4; \partial T/\partial \theta=0 \quad (4)$$

$$R = \frac{\sigma}{\cos \theta}; \frac{\partial T}{\partial (n/r_0)} = \frac{\partial T}{\partial R} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{R} = 0 \quad (5)$$

ここで、

$$R = r/r_0 \quad (6)$$

$$Z = z \alpha / (r_0^2 v_m) \quad (7)$$

$$\sigma = s/r_0 \quad (8)$$

$$V = v/v_m \quad (9)$$

$$T = (t-t_0)/(t_w-t_0) \quad (10)$$

また、Sparrow-Loeffler の解析解<sup>4)</sup>より、無次元軸方向流体速度  $V$  は、次式で与えられる。

$$V = \frac{\sigma^2}{8} (4\sigma^2 - \pi) \left\{ \frac{2}{\pi} \ln R - \frac{R^2 - 1}{4\sigma^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j \cos 4j\theta}{4j\sigma^{4j}} \left( R^{4j} - \frac{1}{R^{4j}} \right) \right\} \times \left\{ \sigma^4 \left[ \frac{1}{2\pi} (\ln 2\sigma^2 - 3) + \frac{1}{6} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j}{4j} \left( \frac{\Lambda_j}{4j+2} + \frac{\beta_j}{4j-2} \cdot \frac{1}{\sigma^{8j}} \right) \right] + \frac{\sigma^2}{4} - \frac{\pi}{64} \right\}^{-1} \quad (11)$$

ここで、 $\delta_j$  は、

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j (\cos \theta)^{1-4j} \{ \cos (4j-1)\theta + \left( \frac{\cos \theta}{\sigma} \right)^{8j} \cos (4j+1)\theta \} + \frac{2}{\pi} (\cos \theta)^2 - \frac{1}{2} = 0 \quad (12)$$

を満足する定数群で、 $\Lambda_j, \beta_j$  はそれぞれ次式から算出される定数群である。

$$\Lambda_j = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 4j\theta}{(\cos \theta)^{4j+2}} d\theta \quad (13)$$

$$\beta_j = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 4j\theta}{(\cos \theta)^{2-4j}} d\theta \quad (14)$$

これらの定数群は  $\sigma = 1.05, 1.1, 1.2, 1.5, 2.0, 4.0$  について  $j=1 \sim 6$  の範囲に対する値が示されている<sup>4)</sup>が、 $\sigma = 1 \sim \infty$  について  $j$  のより大きな範囲に対する値を、 $\delta_j$  についてはガウス-ジョルダン法を用い、 $\Lambda_j, \beta_j$  はシンプソン則を用いてそれぞれ算出し、有効桁数を考慮して Table 1 及び Table 2 に示した。

以上により、式(11)を式(1)に代入し、式(2)~(5)の境界条件のもとで解けば、無次元温度  $T$  が次式の関数として求まる。

$$T = \text{func}(R, \theta, Z, \sigma) \quad (15)$$

### 3. 算術平均ヌセルト数

$z=0 \sim \ell$  の間における熱収支をとることにより、算術平均熱伝達係数  $h_{am}$  は次式で表される。

$$w c_p (t_b - t_0)_{z=\ell} = 2 h_{am} \pi r_0 \ell \Delta t_{am} \quad (16)$$

ここで、 $t_b$  は混合平均流体温度である。また、 $w$  は円柱 1 本当たり (Fig. 1 に示した直角二等辺三角形 8 個分の領域) の流体質量流量、 $\Delta t_{am}$  は算術平均伝熱推進温度差であり、それぞれ、

$$w = r_0^2 v_m \rho (4\sigma^2 - \pi) \quad (17)$$

$$\Delta t_{am} = \frac{(t_w - t_0) + (t_w - t_b)_{z=\ell}}{2} \quad (18)$$

式(16)~(18)を無次元化することにより、算術平均ヌセルト数  $Nu_{am}$  は次式で表される。

Table 1 Values of  $\delta_j$  for various spacing ratios

	$\sigma=1.0$	$\sigma=1.001$	$\sigma=1.01$	$\sigma=1.02$	$\sigma=1.05$	$\sigma=1.1$
$\delta_1$	-0.0803471	-0.0805613	-0.0824661	-0.0845302	-0.0903578	-0.0987211
$\delta_2$	0.0103832	0.0103348	0.0098719	0.0092996	0.0073105	0.0036595
$\delta_3$	0.0024491	0.0024778	0.0027090	0.0029151	0.0032105	0.0029108
$\delta_4$	-0.0005010	-0.0004856	-0.0003418	-0.0001832	0.0002065	0.0004653
$\delta_5$	-0.0003008	-0.0003003	-0.0002871	-0.0002552	-0.0001197	0.0000243
$\delta_6$	-0.0000376	-0.0000407	-0.0000622	-0.0000740	-0.0000579	-0.0000114
$\delta_7$	0.0000243	0.0000226	0.0000076	-0.0000052	-0.0000158	-0.0000053
$\delta_8$	0.0000172	0.0000168	0.0000122	0.0000061	-0.0000028	-0.0000016
$\delta_9$	0.0000051	0.0000053	0.0000057	0.0000041	-0.0000001	-0.0000004
$\delta_{10}$	-0.0000002	0.0000001	0.0000015	0.0000016	0.0000002	-0.0000001
$\delta_{11}$	-0.0000012	-0.0000010	0.0000000	0.0000004	0.0000001	0.0000000
$\delta_{12}$	-0.0000008	-0.0000007	-0.0000003	0.0000001	0.0000001	
$\delta_{13}$	-0.0000003	-0.0000003	-0.0000002	0.0000000	0.0000000	
$\delta_{14}$	-0.0000001	-0.0000001	-0.0000001			
$\delta_{15}$	0.0000000	0.0000000	0.0000000			

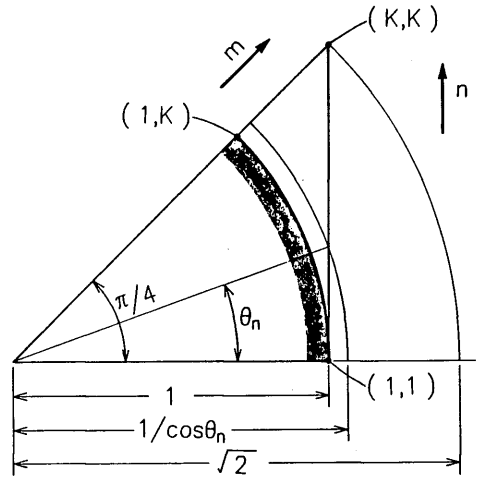
	$\sigma=1.2$	$\sigma=1.5$	$\sigma=2.0$	$\sigma=3.0$	$\sigma=4.0$	$\sigma=\infty$
$\delta_1$	-0.11042085	-0.12259727	-0.12509839	-0.12537162	-0.12538163	-0.12538274
$\delta_2$	-0.00238680	-0.00905979	-0.01042810	-0.01057717	-0.01058263	-0.01058324
$\delta_3$	0.00156634	-0.00020812	-0.00057128	-0.00061060	-0.00061203	-0.00061219
$\delta_4$	0.00035002	0.00003327	-0.00003177	-0.00003873	-0.00003898	-0.00003901
$\delta_5$	0.00005323	0.00000813	-0.00000139	-0.00000239	-0.00000242	-0.00000243
$\delta_6$	0.00000641	0.00000120	-0.00000002	-0.00000015	-0.00000015	-0.00000015
$\delta_7$	0.00000057	0.00000015	0.00000001	-0.00000001	-0.00000001	-0.00000001
$\delta_8$	0.00000001	0.00000002	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
$\delta_9$	-0.00000001	0.00000000				
$\delta_{10}$	0.00000000					

**Table 2** Values of  $\Delta_j$  and  $\beta_j$

j	$\Delta_j$	$\beta_j$
1	$-8.000000000 \times 10^{-1}$	$8.333333333 \times 10^{-2}$
2	1.777777778	$-8.9285714286 \times 10^{-3}$
3	-4.9230769231	$1.4204545455 \times 10^{-3}$
4	$1.5058823529 \times 10^1$	$-2.6041666667 \times 10^{-4}$
5	$-4.8761904762 \times 10^1$	$5.1398026316 \times 10^{-5}$
6	$1.6384000000 \times 10^2$	$-1.0614809783 \times 10^{-5}$
7	$-5.6496551724 \times 10^2$	$2.2605613426 \times 10^{-6}$
8	$1.9859393939 \times 10^3$	$-4.9221900202 \times 10^{-7}$
9	$-7.0849729730 \times 10^3$	$1.0899135045 \times 10^{-7}$
10	$2.5575024390 \times 10^4$	$-2.4453187601 \times 10^{-8}$
11	$-9.3206755556 \times 10^4$	$5.5446181164 \times 10^{-9}$
12	$3.4239216327 \times 10^5$	$-1.2681839340 \times 10^{-9}$
13	$-1.2662049811 \times 10^6$	$2.9217962835 \times 10^{-10}$
14	$4.7093939649 \times 10^6$	$-6.7732553417 \times 10^{-11}$
15	$-1.7602324984 \times 10^7$	$1.5785125525 \times 10^{-11}$

1 に漸近するので、式(19)に  $T_b = 1$  を代入し、式(22)の関係を用いると、 $Nu_{am}$  は次式に漸近することがわかる。

$$Nu_{am} = 2Gz / \pi \tag{24}$$



(a)  $\sigma = 1.0$

$$Nu_{am} = \frac{h_{am} d_o}{k} = \frac{4\sigma^2 - \pi}{\pi L} \left( \frac{2T_b}{2 - T_b} \right)_{z=L} \tag{19}$$

ここで、 $T_b$  は無次元混合平均流体温度で、

$$T_b = \frac{t_b - t_0}{t_w - t_0} = \frac{\int_0^{\pi/4} \int_1^{\sigma/\cos\theta} VTR \, dR \, d\theta}{\int_0^{\pi/4} \int_1^{\sigma/\cos\theta} VR \, dR \, d\theta} \tag{20}$$

また、 $L$  は円柱の無次元長さであり、

$$L = \ell \alpha / (r_o^2 v_m) \tag{21}$$

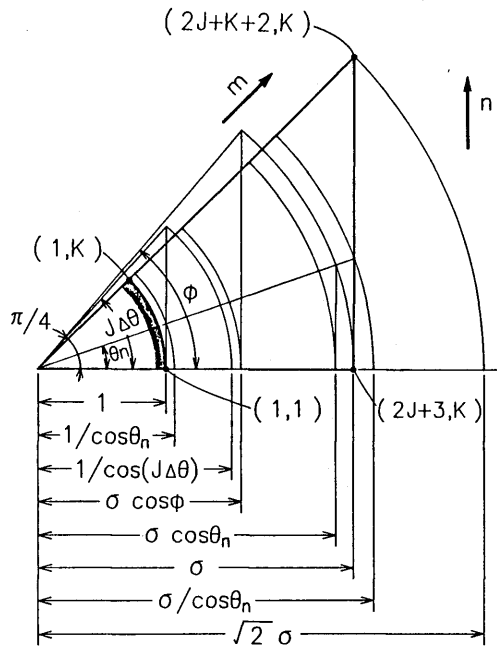
さらに、長さ  $\ell$  の円柱を対象としたグレッツ数  $Gz$  を、

$$Gz = wc_p / (k \ell) = (4\sigma^2 - \pi) / L \tag{22}$$

のように定義すると、式(11)、(15)の関係から、式(20)で表される無次元混合平均流体温度  $T_b$  は  $Z, \sigma$  の関数として表されるので、式(19)から算術平均ヌセルト数  $Nu_{am}$  は次式の関数として求まる。

$$Nu_{am} = \text{func}(Gz, \sigma) \tag{23}$$

$Gz$  が小さい場合、すなわち円柱が長い場合、 $T_b$  は



(b)  $\sigma \neq 1.0$

**Fig. 2** Finite difference grid system

4. 数値解析法

本数値解析では、三角形配列の場合<sup>2,3)</sup>と同様、Zの各レベルにおいて差分化した基礎方程式の収束解を陰解法による反復計算で求めながら、Zをしだいに増加させていく方法、すなわち反復を伴う前進・陰解法を適用した。数値解法は前報<sup>3)</sup>に詳述したものと本質的に同じなので、ここではその概要を述べるに留める。

差分格子数は、Fig. 2 に示したように、θ方向にはθ=0~π/4の範囲を等間隔でK個、R方向にはR=1~√2σの範囲を不等間隔で約K(1+2.5cos<sup>-1</sup>√1/σ)個、Z方向には不等間隔でZの値が10倍になるごとに50個をとった。また、反復計算の前後における全格子点での温度の変化率が10<sup>-8</sup>以下であれば、解は収束とみなした。格子数Kはσ=1.0~1.02の範囲ではK=46, 61, σ=1.05~4.0の範囲ではK=31, 46にとった。これら2個のKによるNu<sub>am</sub>の値の差異は2%程度に納まるので、K=61またはK=46を用いると数値解は十分な精度で算出できる。

5. 数値解析結果

円柱間隔比σ=1.0, 1.2, 1.5, 2.0, 4.0の場合について、算術平均ヌセルト数Nu<sub>am</sub>とグレッツ数Gzの関係を、Fig. 3 に示した。Gzが小さくなると、Nu<sub>am</sub>は式(24)に漸近していく。またFig. 4には、σ=1.0~1.2の範囲 (Fig. 3 上では判別の困難な範囲) について、Nu<sub>am</sub>をσ=1.0の場合のNu<sub>am</sub>で規格化したNu<sub>am</sub>/Nu<sub>am,σ=1</sub>とGzの関係を示した。これらの図からわかるように、σが小さくなるにつれて、Nu<sub>am</sub>は増大した後に減少する傾向が現れる。この理由は、σが小さくなるにつれて、流路断面積が減少するために壁面における速度勾配が増大するが、σがある程度小

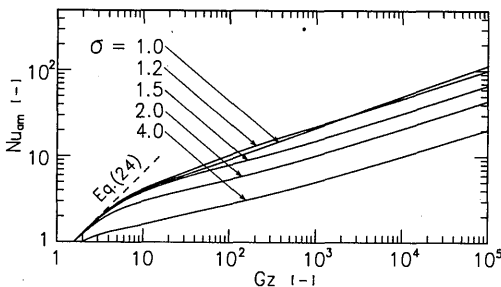


Fig. 3 Variation of arithmetic mean Nusselt number with Graetz number

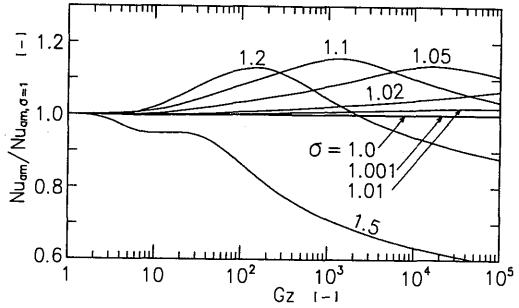


Fig. 4 Normalized arithmetic mean Nusselt number for small values of spacing ratio

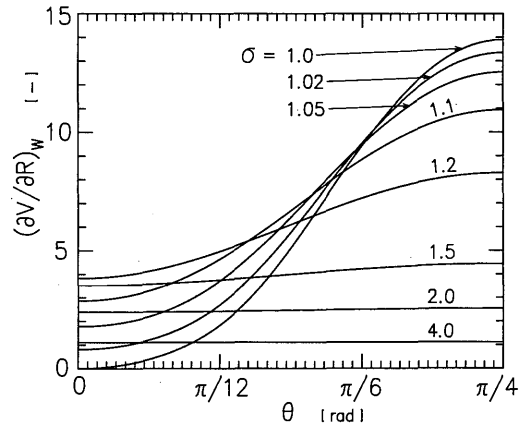


Fig. 5 Peripheral variation of wall velocity gradient

くなってくると、Fig. 5 に示したように、θ=0の所の壁面における速度勾配が減少するからである。なお、Fig. 5 は、式(11)をRで微分してR=1とおき、Table 1 及び Table 2 に示した値を用いて算出した結果を示したものである。

6. 三角形配列の場合との比較

正方形配列の場合と既に解析を行っている三角形配列の場合の差異をここで比較検討する。

全体積のうち円柱群の体積が占める割合、すなわち円柱充填率εは、次式で表される。

$$\epsilon = \pi / (4 \sigma^2); \text{ 正方形配列の場合} \quad (25)$$

$$\epsilon = \pi / (2\sqrt{3} \sigma^2); \text{ 三角形配列の場合} \quad (26)$$

配列の差異の比較は、所定空間の内に同数の円柱が充填される場合を基準に、すなわち同一のεのもとで

行われるべきものである。そこで、さらに  $\epsilon = 0.25, 0.50, 0.75$  に対応する正方形配列と三角形配列の双方の場合の  $\sigma$  について、数値解析を行った。これらの  $\epsilon$  の場合における速度分布の解析解<sup>4)</sup>に含まれる定数群  $\delta_j$  (正方形配列の場合)、 $\Delta_j$  (三角形配列の場合) を Table 3 に示した。ここで、 $\Delta_j$  は次式を満足する定数群である。

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j (\cos \theta)^{1-6j} \left\{ \cos(6j-1)\theta + \left(\frac{\cos \theta}{\sigma}\right)^{12j} \cos(6j+1)\theta \right\} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} (\cos \theta)^2 - \frac{1}{2} = 0 \quad (27)$$

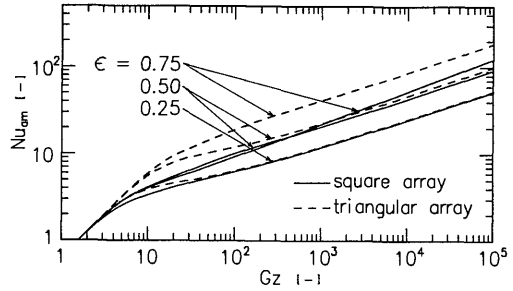
**Table 3** Values of  $\delta_j$  and  $\Delta_j$  for various volume fractions

(a) Values of  $\delta_j$

	$\epsilon = 0.75$ ( $\sigma = 1.0233$ )	$\epsilon = 0.50$ ( $\sigma = 1.2533$ )	$\epsilon = 0.25$ ( $\sigma = 1.7725$ )
$\delta_1$	-0.0852040	-0.11442734	-0.12463808
$\delta_2$	0.0090971	-0.00457097	-0.01017677
$\delta_3$	0.0029715	0.00099391	-0.00050487
$\delta_4$	-0.0001323	0.00025185	-0.00001998
$\delta_5$	-0.0002417	0.00004072	0.00000031
$\delta_6$	-0.0000752	0.00000543	0.00000019
$\delta_7$	-0.0000084	0.00000064	0.00000003
$\delta_8$	0.0000044	0.00000006	0.00000000
$\delta_9$	0.0000035	0.00000001	
$\delta_{10}$	0.0000015	0.00000000	
$\delta_{11}$	0.0000005		
$\delta_{12}$	0.0000001		
$\delta_{13}$	0.0000000		

(b) Values of  $\Delta_j$

	$\epsilon = 0.75$ ( $\sigma = 1.0996$ )	$\epsilon = 0.50$ ( $\sigma = 1.3468$ )	$\epsilon = 0.25$ ( $\sigma = 1.9046$ )
$\Delta_1$	-0.0415404	-0.04956359	-0.05049215
$\Delta_2$	0.0028135	-0.00041448	-0.00080263
$\Delta_3$	0.0003787	0.00003773	-0.00001182
$\Delta_4$	0.0000106	0.00000352	-0.00000014
$\Delta_5$	-0.0000025	0.00000020	0.00000000
$\Delta_6$	-0.0000005	0.00000001	
$\Delta_7$	-0.0000001	0.00000000	
$\Delta_8$	0.0000000		



**Fig. 6** Comparison of arithmetic mean Nusselt number between square array and triangular array of cylinders

Fig. 6 に、 $\epsilon = 0.25, 0.50, 0.75$  の場合について、算術平均ヌセルト数  $Nu_{am}$  とグレッツ数  $Gz$  の関係を、正方形配列の場合は実線で、三角形配列の場合は破線で示した。この図からわかるように、三角形配列の方が  $Nu_{am}$  は大きく、同じ充填率では三角形に配列した方が有利である。しかし、 $\epsilon$  が小さくなるにつれて、配列による  $Nu_{am}$  の差は小さくなり、 $\epsilon < 0.5$  では  $Nu_{am}$  に及ぼす配列の差異はないとみなしてよい。

### 7. 結 言

正方形に配列された一様温度の加熱円柱群から軸方向に流動する流体への層流熱伝達に関して、差分法による数値解析を行い、グレッツ数  $Gz$  が  $10^5$  までの範囲、円柱間隔比  $\sigma = 1.0 \sim 4.0$  の範囲において、算術平均ヌセルト数  $Nu_{am}$  に関する数値解を得た。

さらに、三角形配列の場合との比較検討を行った。

数値計算は九州大学大型計算機センターの高速度デジタル計算機 FACOM M-382 を用いた。

### 使用記号

- $c_p$  : 流体比熱 [J/(kg · K)]
- $d_o$  : 円柱直径 (=  $2r_o$ ) [m]

$G_z$ : グレツ数 式(22)で定義	[—]	$w$ : 円柱1本当りの流体質量流量	[kg/s]
$h_{am}$ : 算術平均熱伝達係数 式(16)で定義	[W/(m <sup>2</sup> ·K)]	$Z$ : 無次元軸方向座標 式(7)で定義	[—]
$K$ : 周方向格子数	[—]	$z$ : 軸方向座標	[m]
$k$ : 流体熱伝導度	[W/(m·K)]	(ギリシャ文字)	
$L$ : 無次元円柱長さ 式(21)で定義	[—]	$\alpha$ : 流体温度伝導度 (=k/( $\rho c_p$ ))	[m <sup>2</sup> /s]
$\ell$ : 円柱長さ	[m]	$\beta_j, \Delta_j, \delta_j$ : 速度分布の解析解に含まれる定	
$m$ : 半径方向格子番号 (Fig. 2)	[—]	数群	[—]
$Nu_{am}$ : 算術平均ヌセルト数 式(19)で定義	[—]	$\theta$ : 周方向座標	[rad]
$n$ : 法線方向座標 (Fig. 1)	[m]	$\rho$ : 流体密度	[kg/m <sup>3</sup> ]
$n$ : 周方向格子番号 (Fig. 2)	[—]	$\sigma$ : 円柱間隔比 式(8)で定義	[—]
$R$ : 無次元半径方向座標 式(6)で定義	[—]	(添字)	
$r$ : 半径方向座標	[m]	$b$ : 流体混合平均値	
$r_o$ : 円柱半径	[m]	$w$ : 円柱壁面における値	
$s$ : 円柱間隔の半分	[m]		
$T$ : 無次元流体温度 式(10)で定義	[—]		
$t$ : 流体温度	[K]		
$t_0$ : 流入流体温度	[K]		
$V$ : 軸方向無次元流体速度 式(9)で定義	[—]		
$v$ : 軸方向流体速度	[m/s]		
$v_m$ : 軸方向平均流体速度	[m/s]		

## 参 考 文 献

- 1) 神本正行ら：電子技術総合研究所研究報告，第850号 (1984)
- 2) 宮武 修，岩下寛之：化学工学論文集，**12**，654 (1986)
- 3) 宮武 修，岩下寛之：化学工学論文集，**13**，152 (1987)
- 4) Sparrow, E. M. and A. L. Loeffler, Jr.: *A. I. Ch. E. J.*, **5**, 325 (1959)
- 5) 宮武 修，岩下寛之：九州大学生産科学研究所報告，80号，51 (1986)