異常分散媒質中の波束の伝播速度

田中, 雅慶
九州大学大学院総合理工学研究科高エネルギー物質科学専攻

https://doi.org/10.15017/17667

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 8 (2), pp.201-207, 1987-01-26. Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University
バージョン：

異常分散媒質中の波束の伝播速度

田　中　雅　慶

（昭和61年9月30日　受理）

On the Velocity of a Wave Packet in an Anomalous Dispersion Medium

Masayoshi TANAKA

The velocity of a wave packet travelling in an anomalous dispersion medium is derived using the saddle point method. It is found that the propagation velocity is given by

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c}{\dfrac{\partial n\omega'}{\partial\omega}-\dfrac{\partial n\omega''}{\partial\omega}\dfrac{\partial^2 n\omega'}{\partial\omega^2}\Big/\left(\dfrac{\partial^2 n\omega''}{\partial\omega^2}+\dfrac{c}{x}\varDelta^2\right)}$$

and shows good agreements with numerical results. Comparison is also made for the group velocity and Gintzburg's velocity in a model medium. It reveals that these velocities fail in describing the wave packet propagation in an anomalous dispersion medium.

1. はじめに

分散媒質中の波束の伝播が群速度によって記述される事はよく知られている．波束を構成する Fourier 成分波は，媒質の分散関係によって決まる各々の位相速度で伝播し，結果として波束は幅を広げながら伝わっていく（分散効果）．分散の程度が弱ければ，そのような波束のふるまいも１つのかたまりとして記述する事が可能で，その伝播速度が群速度

$$\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{c}{n+\omega\dfrac{\partial n}{\partial\omega}} \tag{1}$$

で与えられる，ここで ω は角周波数，k は波数，c は光速，n は屈折率である．媒質が正常分散（$\partial n/\partial\omega>0$）を示す場合には，(1) 式は光速を超えない事が証明され[1]，波束のエネルギー伝播速度という物理的意味を持っている．では，媒質が異常分散性（$\partial n/\partial\omega<0$）の場合はどうであろうか．結論から言えば，群速度では記述できないのである．本論文では，この問題を電子プラズマ中の波束を例に取って明らかにする．

媒質の異常分散は吸収と深く結びついている．屈折率を決定する誘電率 $\varepsilon(\omega)$ は一般に複素数で，その実部と虚部は Kramers-Kronig 関係式でお互いに結びついている．この関係式の存在によって，吸収（共鳴型）のある媒質には異常分散があらわれる．したがって異常分散媒質中の波束伝播は，吸収媒質中の波束伝播の問題でもある。

高エネルギー物質科学専攻

プラズマには，種々の共鳴吸収が存在する（サイクロトロン共鳴）．最近の核融合指向プラズマでは，このような共鳴吸収域の周波数を用いて，大出力電磁波による波動加熱が行われている．そこでは，吸収領域の電磁波の伝播解析が不可欠なものとなっている．現在，群速度に基礎を置く幾何光学近似の手法が広く用いられているが，前にも述べたように，吸収領域（異常分散領域）では，この手法は破綻するのである．

では，なぜ破綻するのか，簡単に考えて見る．異常分散の場合 $\partial n/\partial\omega<0$ である．特にその程度が強ければ，(1) 式の分母は，

$$n+\omega\frac{\partial n}{\partial w}\longrightarrow 0\quad \frac{\partial n}{\partial w}\ll 0$$

という事が可能である．これに伴って，群速度は無限大に発散する．異常分散の程度がさらに強くなれば，分母全体はマイナスになり，(1) 式は負の無限大を経て負の有限値となる事も可能である．このように，異常分散の場合，群速度の値には制限がないのである．現時点では，波のかたまり，即ちエネルギーの伝播速度としての群速度は，異常分散媒質においてはその物理的意味を失うと考えられている[2]．

群速度発散の困難は Sommerfeld, Brillouin[3] らの指摘に端を発し，現在までいろいろと議論されてきたが，未だ解決されていない．最近になって，ピコ秒飛行時間法（time of flight method）を用いて，半導体中を伝播するレーザー光の波束を直接測定し，伝播速度を求める実験が行われるようになってきた．Ulbrich, Fehrenbach[4] らの実験では，伝播速度は光速の1/3～1/2,000に減少するとの報告があり，一方 Chu, Wong[5] らの実験では，逆に増加するとの報告がある．実験結果は一見矛盾したものとなっている．

一方理論においても，現在まで様々な定式化が行われてきた．これらの理論に共通する点は，波束を記述するFourier 積分を近似する際に，数学的厳密さを欠く近似法（実軸上での展開近似）が採用されてきた事である．このため波束の伝播速度は常に群速度に等しいという結論が得られ，実験結果をうまく説明するものとはなっていなかった．

我々は文献6において，鞍点法を用いれば上記難点を解決でき，異常分散媒質中においても波束の漸近的なふるまいを記述できる事を示した[6]．本論文は，この鞍点法の枠組の中で波束の伝播速度に対する表式を求め，数値計算結果との比較を行うものである．

2.　鞍点法による波束の記述

単一の共鳴吸収周波数を持つ電子プラズマ中を，Gauss 分布した電磁波束が伝播している問題を考える．誘電率 $\varepsilon(\omega)$，及び屈折率 $n(\omega)$ は以下のように与えられる，

$$\varepsilon(\omega)=1+\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_0^2-2i\rho\omega}\ ,\quad n(\omega)=\sqrt{\varepsilon(\omega)}\tag{2}$$

ここで，ω_0 は共鳴吸収周波数，ω_p は電子プラズマ周波数，ρ は吸収率である．このような媒質中を伝播する波束は，一般に Fourier 積分表示で

$$\phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)e^{i\left(\frac{n(\omega)\omega}{c}x-\omega t\right)}\times d\omega+c.c.\tag{3}$$

と表わす事ができる．ここで $A(\omega)$ は波束の Fourier 成分で，

$$A(\omega)=\frac{\Delta}{4}e^{-(\omega-\omega_c)^2\Delta^2/2}\tag{4}$$

である．ここで ω_c は波束のスペクトルの中心周波数，Δ は波束の幅である．いま波束を観測する地点 x が波長に比べて十分遠方であるとして，鞍点法を用いて $\phi(x,t)$ の漸近形を求める事にする．（通常，(3) 式の漸近形を求めるには，屈折率 $n(\omega)$ を中心周波数のまわりで展開して積分を実行する．この場合，結果は常に群速度が得られるが，数学的には正しい近似法ではない．）鞍点法による記述の詳細は文献6に述べてあるので，ここでは結果だけを示す．まず $\phi(x,t)$ を変形する

$$\phi(x,t)=\frac{\Delta/4}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{x}{x_0}P(\omega)}d\omega+c.c.\tag{5}$$

$$P(\omega)=i\frac{\omega}{\omega_0}\left(n(\omega)-\frac{ct}{x}\right)+\frac{x_0}{x}\ln A(\omega)\tag{6}$$

ここで，$x_0=c/w_0$，$|x/x_0|\gg1$．上式の実軸上の積分を複素 ω 平面上の径路積分におきかえ，積分路が $P(\omega)$ の鞍点を通るように選ぶと，$\phi(x,t)$ は以下のように与えられる，

$$\begin{aligned}\phi(x,t)&=\frac{\Delta/4}{\sqrt{\frac{x}{x_0}\left|\frac{\partial^2 p}{\partial\omega^2}\right|}}e^{\frac{x}{x_0}P(\omega_s)+i\alpha}+c.c.\\&=\frac{A(w_s)}{\sqrt{\frac{x}{x_0}\left|\frac{\partial^2 P}{\partial\omega^2}\right|}}e^{i\left(\frac{n(\omega_s)\omega_s}{c}x-\omega_s t+\alpha\right)}+c.c.\end{aligned}\tag{7}$$

ここで鞍点 ω_s は

$$\frac{\partial P(\omega)}{\partial\omega}=\frac{i}{\omega_0}\left(\frac{\partial n\omega}{\partial\omega}-\frac{ct}{x}\right)-\frac{x_0}{x}(\omega-\omega_c)\Delta^2=0\tag{8}$$

によって定義される．(7) 式は指数関数的に小さな誤差の範囲内で $\phi(x,t)$ の漸近形を与える．ω_s は一般に複素数で，x 及び t の関数である．

いま，固定された地点 x で，波束 $\phi(x,t)$ を時間的に観測する場合を考える．鞍点 ω_s は，この場合，それぞれの時刻において複素 ω 平面上のある点として定まり，その値を (7) 式に代入すれば，時間の関数として $\phi(x,t)$ を定める事ができる．これらの鞍点のうち，波束のピーク値に対応する鞍点は，常に実軸上に位置する．波束のピークは (7) 式の指数部の実部が最小になる点であるから

$$\frac{\partial}{\partial t}Re[P(\omega_s)]=Re\left[\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial\omega_s}\frac{\partial\omega_s}{\partial t}\right]=0\tag{9}$$

によって与えられる．第2項は鞍点の定義 (8) 式により0となるから，結果的に

$$Re\left(-i\frac{\omega_s}{\omega_o}\frac{c}{x}\right)=0\tag{10}$$

となる．したがって，ピーク値に対応する鞍点 ω_s は

$$\mathrm{Im}(\omega_s)=0\ (=\mathrm{const})\tag{11}$$

である事がわかる．

さて，波束の伝播速度を導く問題に移ろう．ピーク位置に対応する鞍点を ω_1 とする．鞍点 ω_1 は常に

$$\frac{\partial P(\omega_1)}{\partial\omega}=0\tag{12}$$

を満している必要がある．今，ある時刻 t において(12)式が満されているとして，無限小時刻経過後 $(t+\delta t)$ に鞍点 ω_1 が満すべき条件を求めて見る．$t+\delta t$ においては，ピーク位置は $x\longrightarrow x+\delta x$，鞍点は $\omega_1\longrightarrow\omega_1+\delta\omega_1$ になっているとして (12) 式を展開すると，

$$\frac{\partial^2P}{\partial\omega^2}\delta\omega_1+\frac{\partial^2P}{\partial t\partial\omega}\delta t+\frac{\partial^2P}{\partial x\partial\omega}\delta x=0\tag{13}$$

を満している必要がある．上式を δt でわって，実部，虚部をそれぞれ書き下すと，

$$\frac{\partial n\omega''}{\partial\omega}\frac{dx}{dt}-x\frac{\partial^2P'}{\partial\omega^2}\frac{d\omega_1'}{dt}=0$$

$$\frac{\partial n\omega'}{\partial\omega}\frac{dx}{dt}+x\frac{\partial^2P''}{\partial\omega^2}\frac{d\omega_1'}{dt}=c\tag{14}$$

となる．ここで，′及び″は実部及び虚部を示し，(11)式を考慮して

$$\frac{d\omega_1''}{dt}=0\tag{15}$$

を用いた．(14)式は dx/dt，$d\omega_1'/dt$ について解く事ができて，それぞれ

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c}{\dfrac{\partial n\omega'}{\partial\omega}+\dfrac{\partial n\omega''}{\partial\omega}\dfrac{\partial^2P''}{\partial\omega^2}\Big/\dfrac{\partial^2P'}{\partial\omega^2}}=\frac{c}{\dfrac{\partial n\omega'}{\partial\omega}-\dfrac{\partial n\omega''}{\partial\omega}\dfrac{\partial^2n\omega'}{\partial\omega^2}\Big/\left(\dfrac{\partial^2n\omega''}{\partial\omega^2}+\dfrac{c}{x}\Delta^2\right)}\tag{16}$$

$$\frac{d\omega_1'}{dt}=\frac{c/x}{\dfrac{\partial^2P''}{\partial\omega^2}+\dfrac{\partial^2P'}{\partial\omega^2}\dfrac{\partial n\omega'}{\partial\omega}\Big/\dfrac{\partial n\omega''}{\partial\omega}}=\frac{x_0/x}{\dfrac{\partial^2n\omega'}{\partial\omega^2}-\left(\dfrac{\partial^2n\omega''}{\partial\omega^2}+\dfrac{c}{x}\Delta^2\right)\dfrac{\partial n\omega'}{\partial\omega}\Big/\dfrac{\partial n\omega''}{\partial\omega}}\tag{17}$$

となる．(16)式が我々の求めるべき結論，即ち，異常分散媒質中における波束の伝播速度（正確にはピーク位置の伝播速度）である．ここで注意すべき点は，(16)式の微分を取るべき点 ω_1 は x 及び t の関数であって，時間とともに変化するという事である．今，伝播軌道上のある点で (16) 式を用いて伝播速度を求めようとすると，その点における ω_1 の値を知る必要がある．ω_1 の時間変化は (17) 式によって与えられているので，(16)，(17)式を連立して考え，伝播速度を計算する事になる．この点，群速度の場合のように，固定した周波数（スペクトルの中心周波数）で微分を取るのと異っている．

媒質に吸収がない場合，(16)式は通常の群速度に一致する．この場合，実軸上で屈折率 $n(\omega)$ は虚数部を持たないので，$\partial n\omega/\partial\omega''$，$\partial^2n\omega/\partial\omega^{2''}$ は 0 と置いてよい．したがって，(16)，(17) 式は

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c}{\dfrac{\partial n\omega'}{\partial\omega}}\tag{18}$$

$$\frac{d\omega_1'}{dt}=0\tag{19}$$

となる．また，この場合 ω_1 は (8) 式を用いて

$$\omega_1=\omega_c\ (=\mathrm{const.})$$

となる事が証明できるので，結局 (18) 式は通常の群速度に一致する．

波束の任意の場所についても，速度の表式を求める事ができて，以下のように与えられる．

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c}{\dfrac{\partial n\omega'}{\partial\omega}+Q(\omega_s,\omega_1)}\tag{20}$$

となる．ここで ω_s は，今考えている波束の位置に対応する鞍点である．(20) 式の導出はやや長くなるので，紙面の都合上，ここでは省略する．

3. 数値計算との比較

この章では，数値計算結果と，前章で導いた表式との比較を行う．数値計算は，まず場所と x を固定し，(8)式を用いて鞍点を時間 t の関数として求め，それを (7) 式に代入する事によって波束を決定した．x を変化させながら上記操作をくりかえしていけば，任意の場所 x，時間 t における波束 $\phi(x,t)$ を求める事ができる．

Fig. 1 に計算に用いた電子プラズマの屈折率を示す．共鳴吸収周波数 ω_0 の付近に異常分散があらわれているのがわかる．**Figs. 2, 3** に $\phi(x,t)$ 及びその等高線図を示す．**Fig. 2** は正常分散の場合，**Fig. 3** は異常分散の場合である．正常分散の場合は，振幅はゆるやかに減衰しながら，波束全体がほぼ一様な速度で伝播

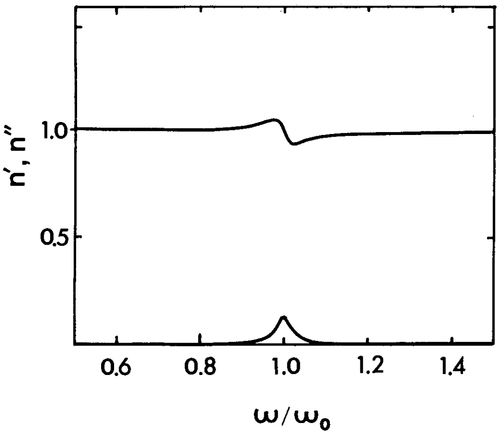

Fig. 1　Refractive index as a function of frequency. $\omega_p=0.1\ \omega_0$, $\rho=0.02\ \omega_0$.

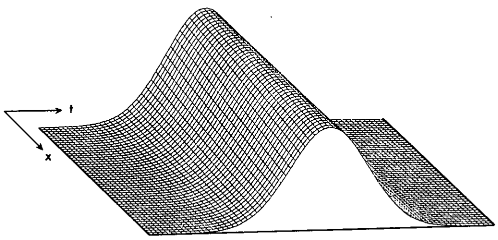

Fig. 2 (a)　Three dimensional representation of wave packet for a normal dispersion case.

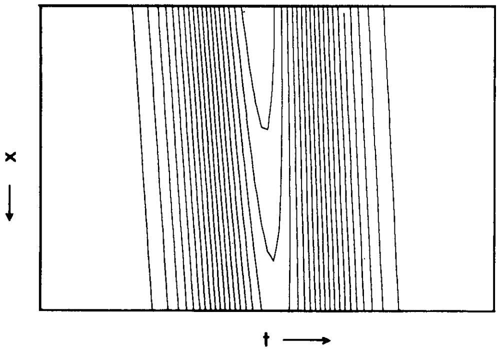

Fig. 2 (b)　Contour map.

する．一方異常分散の場合は，振幅は強く減衰し，波束に著しい変形が見られる．また，後進する（t の負の方向に）伝わるピークが見られるが，x が大きくなると減衰している．この後進するピークについてはこの章の終わりに述べる．

Fig. 3に見られる波束の変形は，次の二点が原因として考えられる．まず第一は分散効果であるが，異常

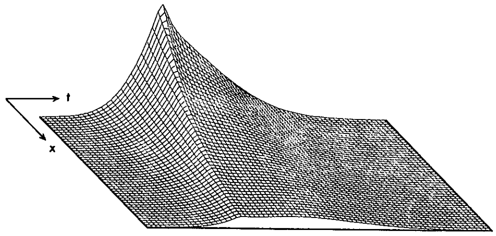

Fig. 3 (a)　Three dimensional representation of wave packet for an anomalous dispersion case.

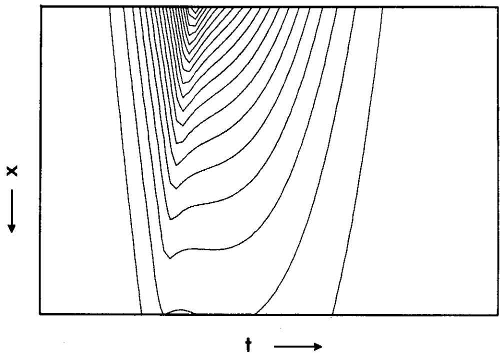

Fig. 3 (b)　Contour map.

分散性媒質の場合 $|\partial n/\partial\omega|\gg 1$ であるため，分散効果はきわめて強くあらわれる．第二に，Fourier 成分波の吸収が考えられる．異常分散の周波数領域では減衰率が大きく，しかも周波数によって大きく変化している．このため，この付近の Fourier 成分波は，伝播するにしたがって別々の減衰率で吸収されていく．即ち，波束は，その Fourier 成分波の構成比を変えながら伝播していく事になる．スペクトル上のこの変化は，実空間では波束の変形となってあらわれる．

異常分散領域の Fourier 成分波が完全に吸収されてしまうと，それ以後は，正常分散領域のみ Fourier 成分波が残り，これらの成分波によるゆるやかな分散効果が期待されるが，数値計算においても，ある距離以上伝播すると，波束の変形はゆるやかになり，ほぼ一定の速度で伝播するのが観測された．

Fig. 4 に異常分散の場合の伝播軌跡を示す．図中実線は(16)，(17)式(又は(20)式)を用いて Runge-Kutta 法で求めた軌跡を示し，それぞれ，ピーク位置，半値位置（２カ所）に対するものである．丸印は数値計算によって求めた波形から読み取った値をプロットしたものである．図に示すように，数値計算結果と，(16) 式（又は (20) 式）の一致は非常によい．また，この

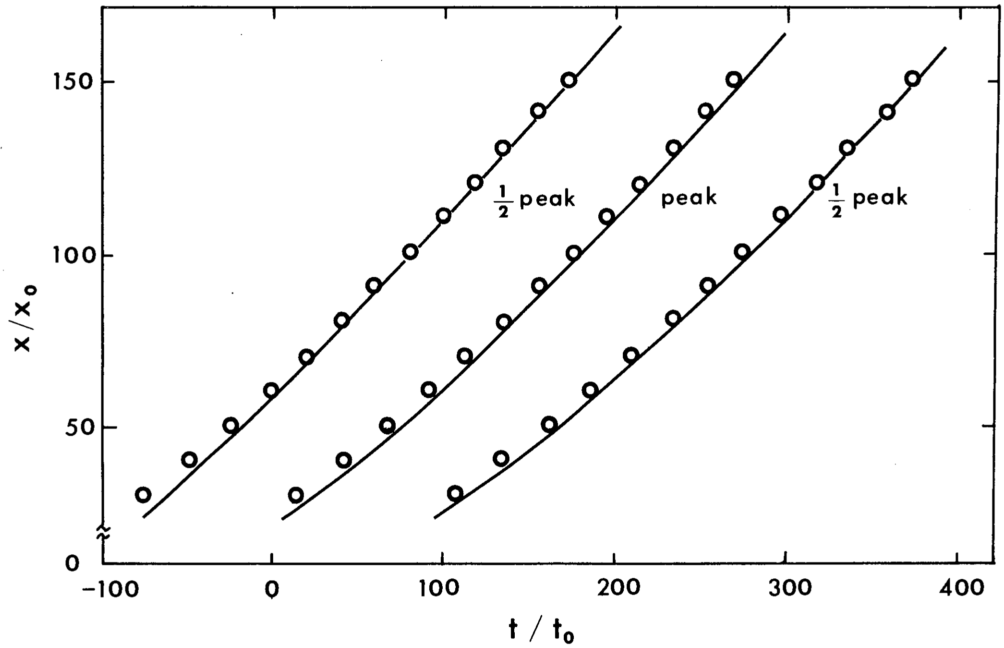

Fig. 4 Trajectory of a wave packet for an anomalous dispersion case. $\omega_p=0.25\omega_0$, $\rho=0.05\omega_0$.

場合分散式より求めた群速度は負の値になっており，数値計算結果とはまったく異っている．このように，異常分散媒質中では群速度は波束の伝播を記述しない．

Fig. 3 において，後進するピークが存在する事はすでに述べた．このピークのふるまいをより詳しく調べるため，波束伝播の初期段階の様子を求めた．**Fig. 5**に伝播初期の波形，**Fig. 6** に軌跡を示す．**Fig. 5** は最大値で規格化された波形である．**Fig. 5** に示すように，伝播初期のピークは後進しながらやがて減衰していき，かわって別の前進するピークがあらわれる．この前進するピークは，(16)式から求めた軌跡に漸近的に一致していく．後進するピークは群速度に一致しているように見えるが，伝播距離とともに，ずれが大きくなっていく．

Fig. 5 に示された波形を Fourier 変換すれば，各点における Fourier 成分波の分布を調べる事ができる．FFT を用いた解析では，後進するピークは異常分散領域に位置する Fourier 成分波によるものである事がわかっている．

4. 考　　察

前章までの議論から，異常分散媒質中の波束の伝播について一般的な描像を得る事ができる．まず **Fig. 6** において光錐を描き，それぞれ領域 I，II，III とする．領域 I は異常分散領域の Fourier 成分波が優勢な伝播初期に対応するもので，後進するピークによって特徴づけられる．領域 II はピーク位置が光錐の中にはいる異常伝播領域で，ピーク位置から計算した見かけ上の伝播速度は光速より速く見える．領域 III は正常な伝播領域で，前進するピークと光速より遅い伝播速度によって特徴づけられる．いま，異常分散媒質に波束を入射したとすると，波束は伝播するにしたがって，領域 I，II，III をこの順に経験する事になる．このように，媒質が一様であっても，異常分散の場合は多様な伝播形態を示す．

上記伝播形態はすべて波束が強く変形する事と深く関連している．そして，その変形は，異常分散媒質の強い分散効果と Fourier 成分波の吸収によるスペクトル分布の変化が原因となっている．特に後者は，正常分散媒質には見られない新しい効果である．

序論に述べた実験結果も，上記描像に立てば矛盾なく説明できる．即ち，Chu, Wong らの実験は，領域 II に対応する場所（試料の厚さ）で行われたのに対し，Ulbrich, Fehrenbach らの実験は領域 III で行われたのである．

最後に，Gintzburg[7] の与えた表式と我々の得た表式（(16) 式）との比較を行っておく．Gintzburg は異常

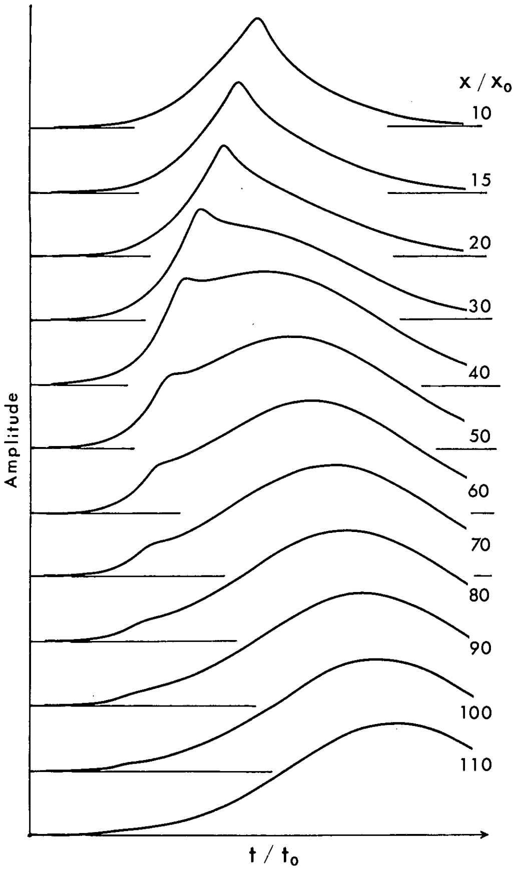

Fig. 5 Wave forms in the initial stage of propagation. $\omega_p=0.1\omega_0$, $\rho=0.02\omega_0$.

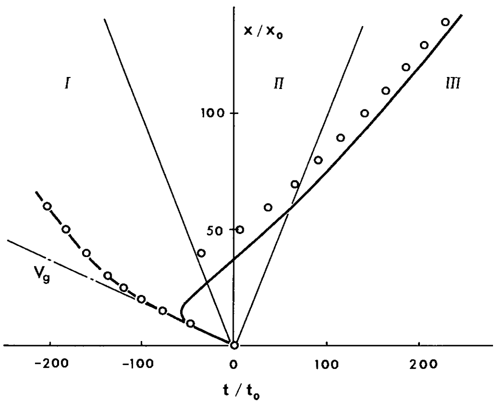

Fig. 6 Trajectory of a wave packet in the initial stage of propagation.

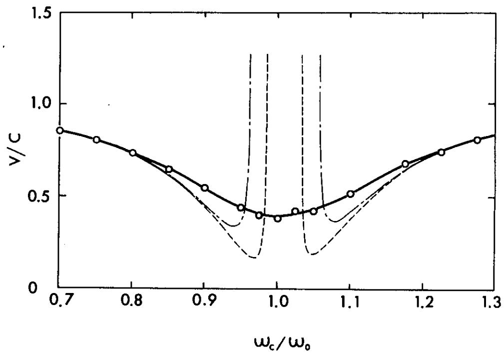

Fig. 7 Velocities as a function of frequency. ——: eq. (16), – – –: group velocity, —・—: Gintzburg's velocity. $\omega_p=0.25\omega_0$, $\rho=0.02\omega_0$.

分散媒質中の伝播速度として，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c}{\dfrac{\partial n\omega'}{\partial\omega}-\left(\dfrac{\partial n\omega''}{\partial\omega}\right)^2\Big/\dfrac{\partial n\omega'}{\partial\omega}} \tag{21}$$

を与えている．**Fig. 7** に周波数の関数としての伝播速度を示す．図中実線は (16) 式，点線は群速度，一点鎖線は Gintzburg の表式である．図に示すように，3つの速度とも，ω が ω_0 から遠くはなれている所では一致しているが，ω が ω_0 に近くなると，群速度，Gintzburg の表式とも発散している．丸印は数値計算より求めた点をプロットしたものであるが，(16)式と非常によく一致している．以上より，Gintzburg の表式は，異常分散媒質中の波束の伝播速度の表式として採用できない事がわかる．

5．結　　論

異常分散媒質中における波束の伝播を，電子プラズマの場合を例に取って，明らかにした．入射された波束は，順に，(I) 後進伝播領域，(II) 異常伝播領域及び (III) 正常伝播領域を経験しながら伝播し，群速度や Gintzburg の表式では記述できない事がわかった．我々は，これらの速度にかわって，鞍点法を用いて (16) 式を導出し，数値計算結果と非常によく一致する事を確認した．異常分散媒質中の波束の漸近的ふるまいは，この表式を用いる事によって初めて可能になった．

謝　　辞

本研究の発表の機会を与えて下さった河合良信教授に感謝致します．また，多くの助言や議論をいただい

た，応用力学研究所矢嶋信男教授，河野光雄助教授に感謝致します．

参考文献

1) ランダウ，リフシッツ，電磁気学(東京図書，1962) 第2巻 p. 332
2) J. D. Jackson, Classical Electrodynamics (John Wiley & Sons, 1975) 302
3) L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity* (Academic, 1960)
4) R. G. Ulbrich and G. W. Fehrenbach, Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 963
5) S. Chu and S. Wong, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 738
6) M. Tanaka, M. Fujiwara and H. Ikegami, to be appeared in Phys. Rev. A **34** (1986)
7) V. L. Gintzburg, *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma* (Pergamon, 1964) 496