

## フラウンフォーファ回折像の厳密解の数値計算による解析

松尾, 敬二  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

五所, 嘉宏  
九州電力株式会社 | 九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

園田, 義人  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

村岡, 克紀  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

他

<https://doi.org/10.15017/17629>

---

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 7 (1), pp.75-81, 1985-08-01. 九州大学大学院総合理工学研究科  
バージョン：  
権利関係：

# フラウンホーファ回折像の厳密解の 数値計算による解析

松尾敬二・五所嘉宏\*\*・園田義人

村岡克紀・赤崎正則

(昭和60年3月30日 受理)

## Numerical Analysis of Fraunhofer-Diffraction Profiles

Keiji MATSUO\*, Yoshihiro GOSHO\*\*, Yoshito SONODA,  
Katsunori MURAOKA and Masanori AKAZAKI

For the precise extraction of the plasma-wave information from the Fraunhofer-diffraction method, the general solutions of the Fraunhofer-diffraction profiles were numerically integrated, and the results were compared with the previously obtained approximate analytical solutions. It was found that, (i) the wave intensity is greatly reduced in the numerical solution, and (ii) the overall Fraunhofer-profiles by numerical solutions, and therefore  $(\vec{k}, \omega)$  information obtained from it, are much different from analytical solutions when the incident electromagnetic wave obliquely crosses the plasma-waves. It is indicated that numerical results should be used in interpreting experimental data for these cases.

### 1. ま え が き

プラズマ内の密度揺動は、プラズマの磁界による閉じ込め及び加熱特に高周波加熱に関連して、非常に重要である。この測定法として、従来からブラッグ散乱の原理に基づく電磁波散乱法があり確立されている。一方、我々が開発しているフラウンホーファ回折法は、プラズマ中に入射した電磁波が密度揺動により位相変調作用を受けた結果生じるフラウンホーファ回折像のプロファイルから、そのプラズマ波動の  $(\vec{k}, \omega)$  スペクトルや位置の情報を得る方法であり、散乱法と比較し、次の利点を有している。(i) 長波長密度揺動の測定に優れる。(ii) 密度揺動の絶対値が容易に求まる。(iii) 光学系が簡単で、大型装置への設置も容易であり、また最近注目されてきたプラズマ端での密度揺動の測定にも適している。

著者らはこれまでに、フラウンホーファ回折法について Evans らが発表した基礎理論<sup>1)</sup> を初めてプラズマ中の波動実験に適用して結果を得<sup>2)</sup>、その後 Evans の基礎理論で取り扱えなかったプラズマ波動への入射角

が  $90^\circ$  でない場合の効果や波動幅の効果を取り入れた一般理論を示し、放電管中のイオン音波で同理論の検証を行った<sup>3)</sup>。また、フラウンホーファ回折法が透過形の計測法であるため、被測定プラズマに多数の波動が存在する場合の得られたデータの解釈に関する問題を、実用上遭遇する機会の多い円筒対称で、方向角方向に伝搬するプラズマ波について、フラウンホーファプロファイル上の二点の時間位相をとることにより二波動間の位相差を求め、有用なデータにし得ることを理論的実験的に示した<sup>4)</sup>。また、波動強度の絶対値測定の精度・検出下限について実験的に検討を加えた<sup>5)</sup>。これら計測法としての確立の上にならば現在は同法を大形プラズマ閉じ込め装置(名大プラズマ研のトカマク装置 JIPP T-II U、及びミラー・カスプ装置 RFC-XX-M、京大ヘリオトロンセンターの Heliotron E、更に筑波大プラズマセンターの GAMMA-10 等)での波動測定への適用を行っている。

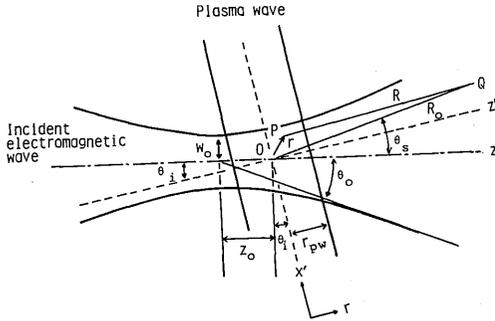
しかし、上記一般理論から解析解を求める際に、入射電磁波(ガウスモード)の位相項を平面波とし、また散乱角自身及び入射角の  $90^\circ$  からいずれの両方もが十分小さいと仮定しており、これらの近似がプロファイル及び回折波強度に与える効果は充分検討されてこなかった。今後、本法を本格的に大形プラズマ装

エネルギー変換工学専攻

\* 同上博士後期課程

\*\* 同上修士課程(現九州電力(株))

置に適用し有用なプラズマ波動の情報を得ようとする際、これらの検討が不充分な点を解明しておくことが是非必要である。この問題は解析的には行えないので、一般解の数値積分によらざるを得ない。本論文は、この目的のために行った数値解析と、それが実験データの解釈に及ぼす効果の検討結果を述べたものである。



**Fig. 1** Geometry for calculation of the Fraunhofer-diffraction pattern.  $\theta_i$ : incident angle,  $\theta_s$ : scattering angle,  $P$ : scattering point,  $Q$ : observing point,  $\mathbf{r}$ : position-vector of  $P$ ,  $\mathbf{R}_0$ : position vector of  $Q$ ,  $\mathbf{R}$ : position vector directed from  $P$  toward  $Q$ ,  $z_0$ : distance between the beam-waist and the origin,  $r_{pw}$ : effective radius of the plasma wave.

## 2. フラウンホーファ回折法の理論

基礎理論<sup>1)</sup>を包含した一般理論<sup>3)</sup>は、プラズマ波動の幅や傾きの効果を取り入れるために、回折領域の個々の電子による放射波を体積分する方法を用いている。入射電磁波（ガウスモード）、プラズマ波動、及び観測点の相対関係を **Fig. 1** のように設定する。ボルン近似によれば、観測点  $Q$  での散乱波  $E_s$  は次式で与えられる<sup>6)</sup>。

$$E_s = E_0 r_e \int \frac{1}{R \rho_q} \Psi_i(x') \bar{n}_e(x', r', t') e^{j(\omega_i t' - k_i \cdot r)} dV \quad (1)$$

ここで、 $E_0$ : 入射電磁波の中心電界、 $r_e$ : 古典電子半径、 $\Psi_i(x')$ : 入射電磁波の  $x'$  方向空間プロファイル、 $\bar{n}_e(x', r', t')$ : プラズマ波動空間プロファイル、 $t'$ : 遅延時間

$\Psi_i(x')$  をガウス型とし、

$$\Psi_i(x') = e^{-c'^2 x'^2 + j \psi(x'_0)}$$

$$c'^2 = \frac{\cos^2 \theta_i (1 + j \rho')}{w^2(z)} = \frac{\cos^2 \theta_i}{w_0^2 (1 - j \rho')} \quad (2)$$

とおく。ただし

$$\rho' = 2z_0 / k w_0^2$$

$$z'_0 = z + z_0$$

$$\psi = \tan^{-1}(\rho')$$

$w_0$ : ビームウエストでのスポットサイズ

$w(z)$ : 座標  $z$  でのスポットサイズ

さらに  $\bar{n}_e(x', r', t')$  は  $x'$  軸対称で  $r'$  方向にガウス型の空間プロファイルをもつ単色波動であるとして、つぎのように置く。

$$\bar{n}_e(x', r', t') = \bar{n}_{e0} e^{-\left(\frac{r'}{r_{pw}}\right)^2} \cos(\omega t' - k x') \quad (3)$$

但し  $r_{pw}$  は波動半径である。式 (2), (3) を式 (1) に代入して

$$E_s = E_0 r_e \int \frac{1}{R} \frac{w_0}{w} \exp\left\{-\left(\frac{1 + j \rho'}{w^2}\right)(x^2 + y^2)\right. \\ \left. + \tan^{-1} \rho'\right\} e^{j(\omega_i t' - k \cdot r)} \\ \times \bar{n}_{e0} e^{-\frac{((x+z_0) + x \tan \theta_s)^2}{r_{pw}^2 (1 + \tan^2 \theta_s)^2}} \cos(\omega t' - k x') dV \quad (4)$$

フラウンホーファ回折領域での  $E_s$  は式 (4) で  $R = \infty$  とすることにより次式で与えられる。

$$(E_s)_\infty = \frac{\bar{n}_{e0} E_0 r_e}{2R_0} \int C [e^{j(\omega_s t + A)} + e^{j(\omega'_s t + B)}] dV \quad (5)$$

ここで、 $\omega_s = \omega_i + \omega$ 、 $\omega'_s = \omega_i - \omega$  である。また  $A, B, C$  はそれぞれ

$$A = (k_s \cos \theta_s - k_i)(z_0 + z) + k \sin \theta_i z \\ + (k_s \sin \theta_s - k \cos \theta_i) x$$

$$- \frac{\rho'}{w^2}(x^2 + y^2) + \tan^{-1} \rho'$$

$$B = (k_s \cos \theta_s - k_i)(z_0 + z) - k \sin \theta_i z \\ + (k_s \sin \theta_s + k \cos \theta_i) x$$

$$- \frac{\rho'}{w^2}(x^2 + y^2) + \tan^{-1} \rho'$$

$$C = \frac{w_0}{w} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{w^2} - \frac{y^2}{r_{pw}^2} - \frac{((z+z_0) + x \tan \theta_s)^2}{r_{pw}^2 (1 + \tan^2 \theta_s)}\right\} \quad (6)$$

論文 (3) で得られた近似解は、入射角の強度分布を一次のガウスianと仮定し、更に  $\rho' \approx \rho$ 、 $\sin(\theta_s) \ll 1$ 、 $\sin(\theta_i) \ll 1$  を仮定して得られる解析解

$$E_s = E_0 \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \gamma_{cl} w_0 \rho_{pw}^2}{2R_0} \times \left\{ e^{-(1-j\rho)(u-\theta)^2/(1-\theta^2)+j\omega_s t} + e^{-(1-j\rho)(u+\theta)^2/(1-\theta^2)+j\omega_s t} \right\} \quad (7)$$

を基にしている。ただし、ここで用いたパラメータは

$$u \equiv \frac{x_f}{w_f} : \text{規格化空間座標}$$

$$\theta \equiv \frac{k w_0}{2} : \text{規格化波数}$$

$$\rho \equiv \frac{z_0}{Z_R} : \text{規格化波動位置}$$

$$q^{-1} \equiv \frac{\gamma_{pw}}{2Z_R} : \text{規格化波動幅}$$

$$Z_R \equiv \frac{k w_0^2}{2} : \text{レーリゾーン}$$

$$\theta_0 \equiv \frac{2}{k w_0} : \text{入射ビームの広がり角}$$

である。\$x\_f, w\_f\$ は前方焦点面での \$x\$ 座標及びスポットサイズである。一方、観測点での搬送波 \$E\_f\$ は次式で与えられる。

$$E_f = E_0 \frac{w_0}{w_f} e^{-u^2 - j\omega_s t + \frac{\pi}{2}} \quad (8)$$

したがって搬送波によるホモダイン検出信号強度 \$I\$ は式(7)、(8)を用いて \$I = |E\_s E\_f + E\_s^\* E\_f^\*|/2\$ より次式で与えられる。

$$I = |B'|^2 e^{-[1+(u+2\theta_s/\theta_0)^2/q^2]u^2} \times \left\{ e^{-(u-\theta)^2/(1-\theta^2)} \sin \left\{ \rho \frac{u^2 - (u-\theta)^2}{(1-\theta^2)} + \omega t \right\} + e^{-(u+\theta)^2/(1-\theta^2)} \sin \left\{ \rho \frac{u^2 - (u+\theta)^2}{(1-\theta^2)} - \omega t \right\} \right\} \quad (9)$$

ただし、 $|B'|^2 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} \gamma_{cl} w_0^2}{R_0 w_f} Z_R E_0^2$

これに対し、以下に述べる数値解は、近似する前の \$\sin(\theta\_s), \cos(\theta\_s), \sin(\theta\_s), \cos(\theta\_s)\$ や位相項目及び曲率の効果を含む式(5)を数値積分することにより求めた。検出信号強度は近似解と同様にして \$I = |E\_s E\_f + E\_s^\* E\_f^\*|/2\$ より求めた。特に \$\sin(\theta\_s), \sin(\theta\_s) \ll 1\$ が成り立つ範囲では

$$\begin{aligned} A &= (-X^2 - Y^2 - 2u^2 + 2\Theta_i \theta)(Z + Z_0) \\ &\quad + \tan^{-1} Z + 2(u - \theta)X \\ B &= (-X^2 - Y^2 - 2u^2 - 2\Theta_i \theta)(Z + Z_0) \\ &\quad + \tan^{-1} Z + 2(u + \theta)X \\ C &= \exp \left\{ -(X^2 + Y^2) - \frac{Z + Z_0}{R_{pw}} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

である。ここで

$$X \equiv \frac{x}{w_0}$$

$$Y \equiv \frac{y}{w_0}$$

$$Z \equiv \frac{z}{Z_R}$$

$$\Theta_i \equiv \frac{\theta_i}{\theta_0}$$

$$R_{pw} \equiv \frac{\gamma_{pw}}{Z_R}$$

とおいた。

数値積分法としては、無限積分に適している台形公式を用いた。

### 3. 結果と考察

解析解と数値解は、フラウンホーファ回折法の入射電磁波として最も適し<sup>3)</sup>、\$\sin(\theta\_s), \sin(\theta\_s) \ll 1\$ が成り立つ \$CO\_2\$ レーザの波長で計算して比較した。フラウンホーファ回折法では、Fig. 2 に示すようにプロファイ

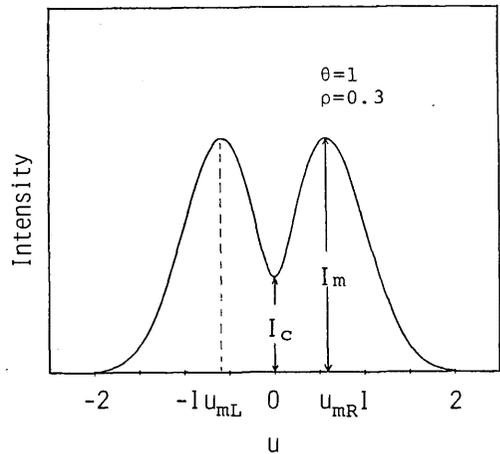
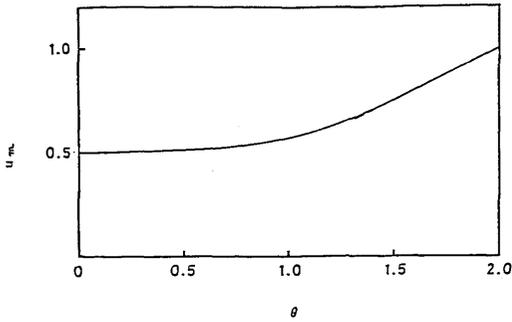


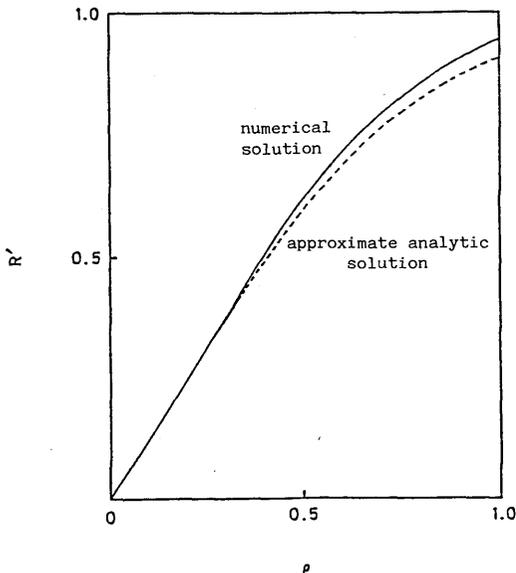
Fig. 2 Fraunhofer-diffraction profile



**Fig. 3**  $u_m$ - $\theta$  curve. The results were for  $\theta_i=0$ ,  $\rho=0$ , and  $q=4$ . Numerical results completely overlap with appropriate analytical ones.

ルのピーク点座標より波数を求め、ピーク点強度より波動強度、また中心点とピーク点の強度比  $R'$  より波動位置を求めるので、これらのパラメータに注目し近似項の効果を調べる。以下では、 $\theta_i$ によって (i)  $\theta_i=0$  の場合、(ii)  $\theta_i \neq 0$  の場合、に分けて考察する。  
(i)  $\theta_i=0$  の場合

数値解のピーク点の規格化座標  $u_m$  と規格化波数  $\theta$  の関係を **Fig. 3** に示す。近似解は数値解と全く重なっており結果に及ぼす近似項の効果は小さい。ここで



**Fig. 4**  $R'$ - $\rho$  curve. The results were for  $\theta_i=0$ ,  $\theta=1$ , and  $q=4$ .

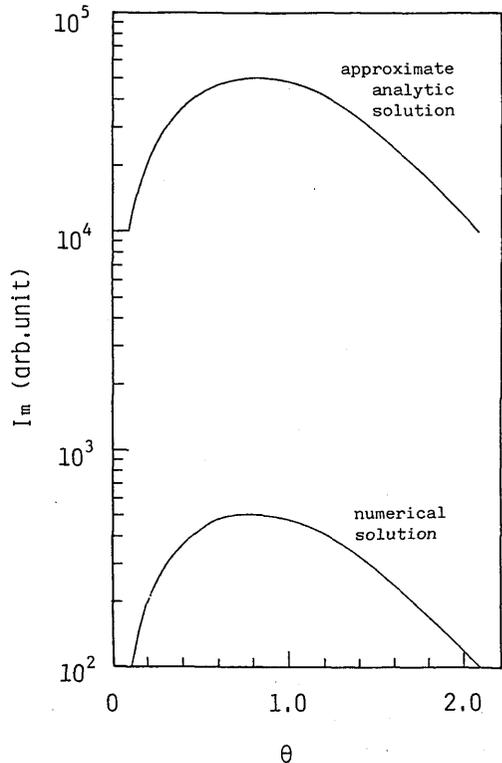
は、規格化波動幅  $q=4$  を用いたが、波動幅の  $u_m$ - $\theta$  曲線に与える影響は小さいので上の結果は一般的に成り立つ。

波動位置を決定するパラメータ  $R'$  の数値解と近似解を **Fig. 4** に示す。規格化波動位置  $\rho$  は本計測法で用いる  $0 \leq \rho \leq 1$  の範囲で調べた。 $\rho$  が 1 付近で約 4% の誤差がある程度で、近似解を用いて測定しても大きな誤差は生じないことがわかる。

信号強度については、 $\theta$  に対する変化の傾向は **Fig. 5** に示すように同じであるが、近似解は数値解より非常に大きい。これは、式 (6) に示すように、数値解が入射電磁波の強度分布を

$$C = \frac{w_0}{w} \left\{ \frac{-x^2 + y^2}{w^2} - \frac{y^2}{r_{p0}^2} - \frac{((z+z_0) + x \tan \theta_i)^2}{r_{p0}^2 (1 + \tan^2 \theta_i)} \right\}$$

としているのに対し、近似解ではスラブ状 (二次元) の gaussian ビームを仮定し



**Fig. 5**  $I_m$ - $\theta$  curve. The results were for  $\theta_i=0$ ,  $\rho=0$ , and  $q=4$ .

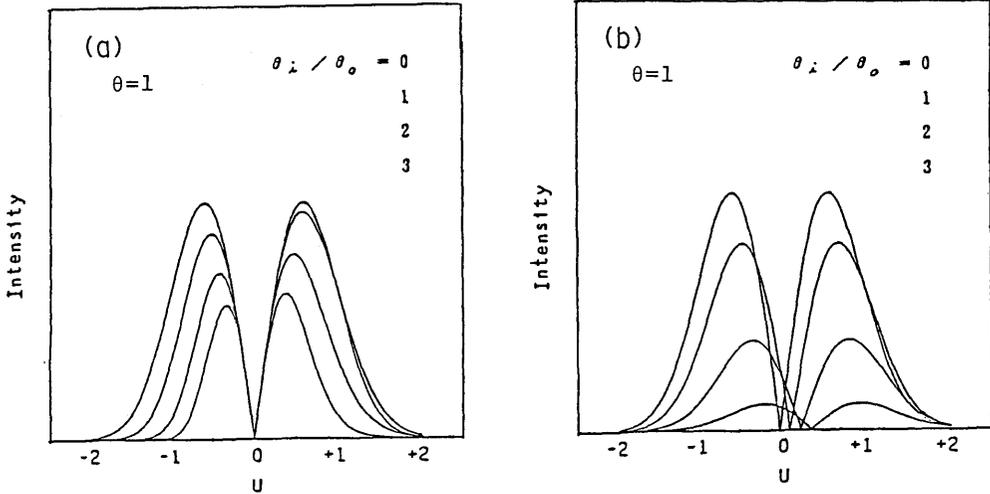


Fig. 6 Profile comparison between approximate analytic solutions(a) and numerical ones(b). The results were for  $\rho=0$  and  $q=4$ .

$$C = \frac{x^2}{w_0^2} \frac{y^2}{r_{pw}^2} \frac{((z+z_0)+x \tan \theta_i)^2}{r_{pw}^2 (1 + \tan^2 \theta_i)}$$

としたため生じたものであり、 $w_0 \ll r_{pw}$  のときに顕著に現われることがわかる。入射電磁波をスラブ状として近似するのは精度が悪いので、信号強度の絶対値は数値解で評価する必要がある。

(ii)  $\theta_i \neq 0$  の場合

$\theta_i$  をパラメータにとった近似解析解及び数値解によるプロファイル例を Fig. 6 に示す。両者を比較すると、数値解ではピーク点・中心点が移動しているが、近似解ではそれがない。特に近似解で見られた非対称性が数値解ではみられないことが大きく異なっている。 $q \geq 2$  の範囲で波動幅を増加させるにつれ、同一の  $\theta_i / \theta_0$  に対し、Fig. 6 と同様にピーク点の移動は大きくなるが非対称性は現われない。これは、近似解で無視されていた入射電磁波の曲率・位相項による修正と考えられる。従って、近似解では非対称性によって波動伝搬方向が測定可能であると結論していたが<sup>3)</sup>、数値解の解析によりそれができないことがわかった。一方、近似解では正負のピーク点規格化座標  $u_{mL}, u_{mR}$  が  $|u_{mL}| \neq |u_{mR}|$  となり、またその値も  $\theta_i$  の増加とともに減少するため  $u_{mL}, u_{mR}$  からの波数の決定を困難にしていた。しかし、数値解では、Fig. 7 に示すようにピーク点間の座標差  $u_{p-p}$  は、 $\theta_i$  によらずほぼ一定となる。したがって、波数は  $u_{p-p}/2$  から  $\theta_i=0$  の  $u_m - \theta$  曲線

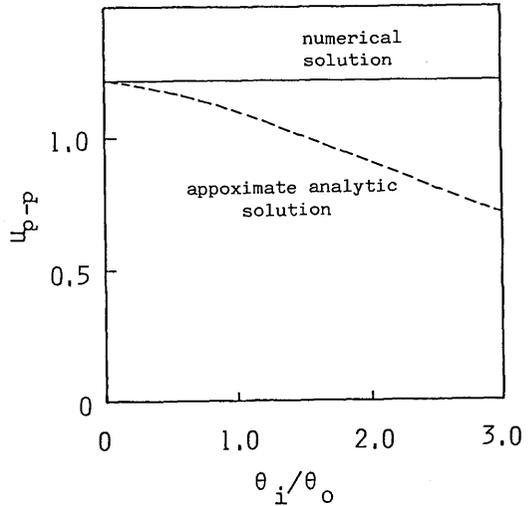


Fig. 7 Dependence of  $u_m$  against  $\theta_i / \theta_0$ . The results were for  $\theta = 1$ ,  $\rho = 0.3$ , and  $q = 4$ .

より求められることがわかった。また、信号強度は  $\theta_i$  の増加に従い波動幅が厚い程速く減少するが、Fig. 8 に示すように数値解の方が急速に減少する。 $q=4$  では、 $\theta_i = 0.6^\circ$  で  $\theta_i=0$  の場合の  $1/10$  となる。さらに波動位置がビームウェストからずれた場合も非対称性は現われない。また、Fig. 9 に示すように、近似解

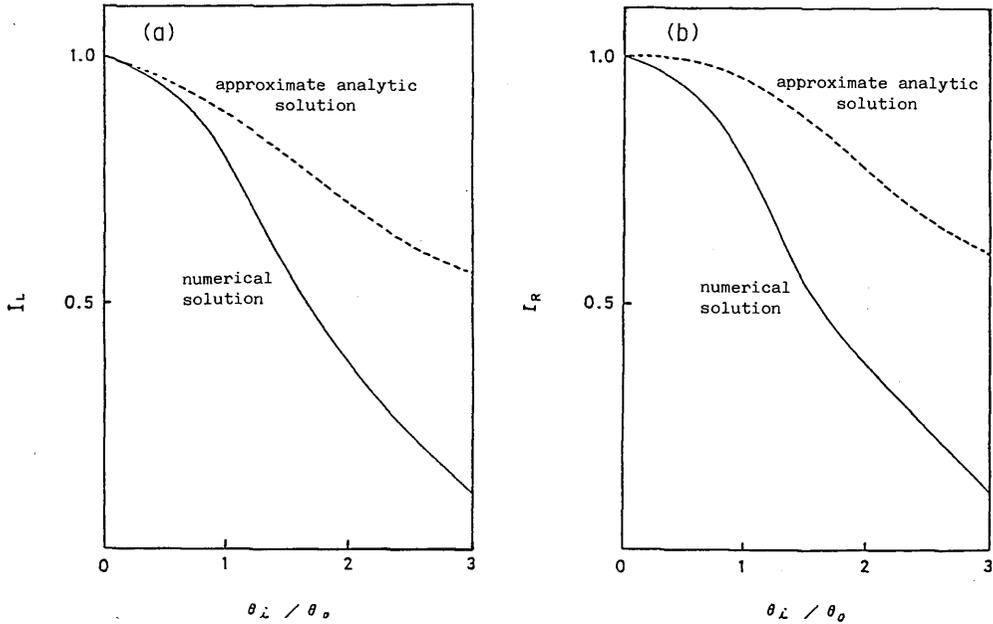


Fig. 8 Intensity of peak point against  $\theta_i / \theta_0$  ( $I_L$  and  $I_R$  are peak values at  $u < 0$  and  $u > 0$ , respectively). Intensities are normalized at  $\theta_i / \theta_0 = 0$ . The results were for  $\theta = 1$ ,  $\rho = 0$ , and  $q = 4$ .

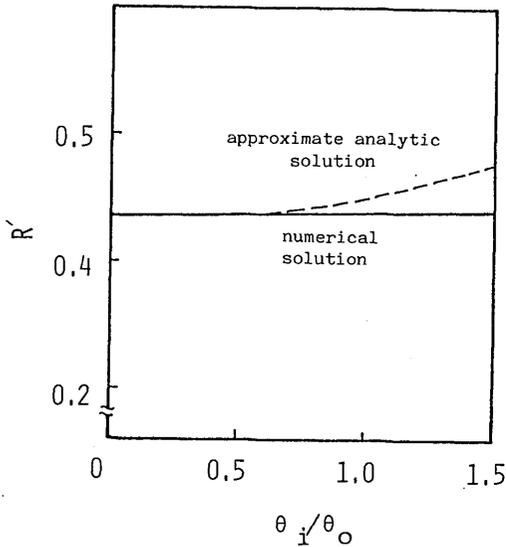


Fig. 9 Dependence of  $R'$  on  $\theta_i / \theta_0$ . The results were for  $\theta = 1$ ,  $\rho = 0.3$ , and  $q = 4$ .

では  $\theta_i$  が大きくなるにつれて  $R'$  の大きさも変化するが、数値解では一定となりこの場合も  $\theta_i = 0$  の近似解より  $\rho$  が決定できることがわかった。

#### 4. あとがき

解析解を求めるために置いた近似のために、厳密には求められなかったフラウンホーファ回折プロファイルを、数値積分を用いて求めた。その結果  $\theta_i = 0$  のときは信号強度を除いて近似解は大きな誤差を与えないことがわかった。しかし、 $\theta_i \neq 0$  のときは、近似されていた入射電磁波の位相項や曲率の効果が現われ、中心点の移動がみられたが、近似解で現れていた非対称性はほとんど現われなかった。したがって、 $\theta_i = 0$  のときは波動強度について、 $\theta_i \neq 0$  のときは強度、 $(k, \omega)$  スペクトルとも、数値密解による波動解析を行う必要があることがわかった。

#### 参考文献

- 1) D. E. Evans, M. von Hellermann and E. Holzhauser: Plasma Phys. **24** (1982) 819.

- 2) Y. Sonoda, A. Sakurai, K. Muraoka, and M. Akazaki: Jpn. J. Appl. Phys. **21** (1982) L372.
- 3) Y. Sonoda, Y. Suetsugu, K. Muraoka and M. Akazaki: Plasma Phys. **25** (1983) 1113.
- 4) Y. Sonoda, S. Othi, K. Matsuo, K. Muraoka, M. Akazaki and D. E. Evans: Jpn. J. Appl. Phys. **23** (1984) 1412.
- 5) K. Matsuo, Y. Sonoda, K. Muraoka and M. Akazaki: Jpn. J. Appl. Phys. **24** (1985) 634
- 6) C. B. Wharton and J. H. Malmberg: Phys. Fluid **11** (1968) 2655.