

## 非定常膨張波におけるよどみ点状態量の変化

川越, 茂敏  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

権, 純範  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

松尾, 一泰  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

<https://doi.org/10.15017/17608>

---

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 6 (2), pp.199-202, 1985-01-01. 九州大学大学院総合理工学研究科  
バージョン :  
権利関係 :

# 非定常膨張波におけるよどみ点状態量の変化

川越 茂敏\*・権 純範\*\*・松尾 一泰\*

(受理年月日 昭和59年9月25日)

## Variation of Stagnation Quantities in Unsteady Expansion Waves

Shigetoshi KAWAGOE, Soon Bum KWON  
and Kazuyasu MATSUO

In the steady, isentropic expansion of a perfect gas, stagnation quantities such as pressure, temperature, and density are constant. In case of unsteady, isentropic expansion, however, they are not constant but changed. The variation of these stagnation quantities which is essential to unsteady flows is not yet well understood.

The problem considered in this report is the variation of static and stagnation quantities through unsteady, centered expansion waves which are generated by the impulsive motion of a piston inside a cylinder. The calculated results are discussed in detail in view point of energy conservation law. Furthermore, the results are compared with those in case of steady, isentropic expansion, and the characteristics of unsteady expansion are made clear.

### 1. ま え が き

気体が定常かつ断熱的に膨張する場合、エネルギーの保存則から明らかのように、気体粒子の全エンタルピは一定に保たれる。しかるに、たとえば衝撃波管の高圧室の気体が破膜後膨張する場合のように、気体が非定常的に膨張する場合には、その膨張過程は断熱的であるにもかかわらず、気体粒子の全エンタルピは一定に保たれず<sup>1)2)</sup>、非定常膨張波の強さに依存して変化する。全エンタルピが変化すれば、全温度、全圧、全密度なども当然変化するが、非定常膨張波を通して、気体のエントロピは一定に保たれる。

上述のような非定常でかつ断熱の流れにおけるよどみ点状態の諸量の変化は、衝撃波管ではもちろんルトビーク管<sup>3)4)</sup>やウェイブリアクタ<sup>5)6)</sup>で見られる重要でかつ基本的な問題であるが、従来、系統的な考察はなされていないようである。

本研究は非定常でかつ断熱流れの代表的な例として、非定常膨張波によって誘起される気体の流れにつ

いて考え、全エンタルピの変化などについて考察するとともに、定常膨張の場合と比較し、非定常膨張波の特性を明らかにした。

### 2. 非定常膨張波による状態量の変化

図1に示すように、左端が閉じた断面積一定の長い管内にピストンを置き、その位置を原点として、右向きに座標  $x$  をとる。いまピストンを時刻  $t=0$  の瞬間から一定速度  $U_p$  で  $x$  の正の方向に動かすと、非定常の後退膨張波が  $x$  の負の方向に伝ばする。図1の

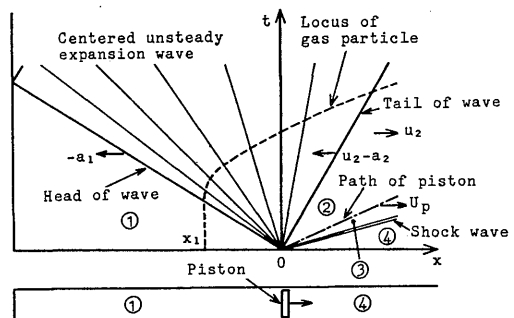


Fig. 1 Wave diagram by impulsive motion of piston

\* エネルギー変換工学専攻

\*\* エネルギー変換工学専攻  
博士後期課程

$x-t$  平面に示すように、管内の初期状態を①とすると、領域①の気体は上述の後退膨張波によって右向きに加速され、一様流れの状態②となる。状態②の流速  $u_2$  はピストンの速度  $U_p$  に等しい。

領域①と②の諸量にそれぞれ添字 1 と 2 を付して表し音速を  $a$ 、流速を  $u$  とすると、膨張波の波頭と波尾の伝ば速度は、それぞれ  $-a_1, u_2 - a_2$  である。図には  $u_2 > a_2$  で、波尾が右向きに進む場合が示してある。図の破線は最初  $x = x_1$  にあった気体粒子の軌跡を表す。非定常膨張波を通しての状態量の変化を求めるため、独立変数  $x$  と  $t$  を組み合わせた無次元の相似変数  $\eta = x/a_1 t$  を用いると、後退膨張波を構成する任意の特性曲線に沿って、次式が成り立つ。

$$\eta = \frac{x}{a_1 t} = \frac{1}{a_1} (u - a)$$

また後退膨張波のみが存在する流れ場では、次式が成り立つ<sup>1)</sup>。

$$\frac{u}{a_1} + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{a}{a_1} = \frac{2}{\kappa - 1}$$

ここに  $\kappa$  は比熱比である。上の二つの式から領域②の流速  $u_2$  と音速  $a_2$  を求めると

$$\frac{u_2}{a_1} = \frac{2}{\kappa + 1} (1 + \eta) \quad (1)$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{\kappa + 1} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \eta \quad (2)$$

式 (1) と (2) の比をとると、領域②のマッハ数  $M_2$  は

$$M_2 = \frac{2(1 + \eta)}{2 - (\kappa - 1)\eta} \quad (3)$$

また膨張波を通過する流れは等エントロピ流れであるから、この関係と式 (3) を用いると、領域②の温度  $T_2$ 、圧力  $p_2$ 、密度  $\rho_2$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2\right)^{-2} \\ &= \left\{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \frac{2(1 + \eta)}{2 - (\kappa - 1)\eta}\right\}^{-2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2\right)^{-\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} \\ &= \left\{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \frac{2(1 + \eta)}{2 - (\kappa - 1)\eta}\right\}^{-\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2\right)^{-\frac{2}{\kappa - 1}} \\ &= \left\{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \frac{2(1 + \eta)}{2 - (\kappa - 1)\eta}\right\}^{-\frac{2}{\kappa - 1}} \end{aligned} \quad (6)$$

さらに領域②の全温度  $T_{02}$ 、全圧  $p_{02}$ 、全密度  $\rho_{02}$  は

$$\begin{aligned} \frac{T_{02}}{T_1} &= \frac{T_{02}}{T_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left\{\frac{2(1 + \eta)}{2 - (\kappa - 1)\eta}\right\}^2\right] \\ &\times \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \frac{2(1 + \eta)}{2 - (\kappa - 1)\eta}\right]^{-2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_{02}}{p_1} &= \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} = \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left\{\frac{2(1 + \eta)}{2 - (\kappa - 1)\eta}\right\}^2\right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \\ &\times \left\{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \frac{2(1 + \eta)}{2 - (\kappa - 1)\eta}\right\}^{-\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{02}}{\rho_1} &= \frac{\rho_{02}}{\rho_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left\{\frac{2(1 + \eta)}{2 - (\kappa - 1)\eta}\right\}^2\right]^{\frac{1}{\kappa - 1}} \\ &\times \left\{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \frac{2(1 + \eta)}{2 - (\kappa - 1)\eta}\right\}^{-\frac{2}{\kappa - 1}} \end{aligned} \quad (9)$$

$\kappa = 1.4$  として式 (1), (3)~(6) より求めた非定常膨張波による静的状態量の変化を、相似変数  $\eta$  に対して図 2 に示す。図の横軸の  $\eta = -1$  は、膨張波の波頭を示し、波尾の位置は膨張波の強さの程度により  $\eta = (u_2 - a_2)/a_1$  で与えられる。 $\eta$  の最大値は式 (2) において  $a_2 = 0 (T_2 = 0)$  とおくと  $\eta = 2/(\kappa - 1) = 5$  となる。すなわち  $\eta$  は  $-1 \leq \eta \leq 5$  の範囲で変化する。図より流速  $u_2/a_1$  は  $\eta$  とともに直線的に増加し、 $\eta = 5$  では  $u_2/a_1 = 5$  となるのがわかる。マッハ数  $M_2$  は 0 より急激に増加して  $\eta = 5$  では無限大となる。また圧力比  $p_2/p_1$ 、密度  $\rho_2/\rho_1$ 、及び温度比  $T_2/T_1$

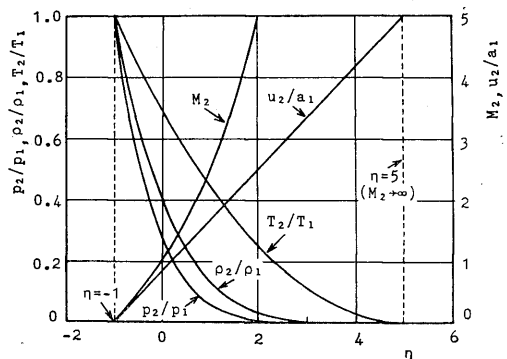


Fig. 2 Variation of static quantities in unsteady expansion wave ( $\kappa = 1.4$ )

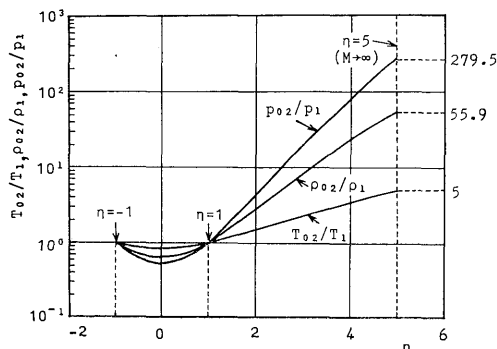


Fig. 3 Variation of stagnation quantities in unsteady expansion wave ( $\kappa=1.4$ )

$T_1$  は、 $\eta$  の増加とともに急激に減少して0に漸近するが、圧力の変化が最も大きい。

式(7)~(9)より得られる領域②の流れのよどみ点状態量を $\eta$ に対して示すと図3のようになる。図より全圧比  $p_{02}/p_1$ 、全温度比  $T_{02}/T_1$ 、及び全密度比  $\rho_{02}/\rho_1$  は、いずれも  $\eta = -1$  における初期値1より $\eta$ の増加とともに初め減少し、 $\eta = 0$  で最小値に達した後増加して、 $\eta = 1$  で初期値に等しくなる。その後 $\eta$ とともに増加し、 $\eta = 5$  で最大となる。

定常等エントロピ膨張の場合には、全圧、全温度、全密度はいずれも流れ場を通して一定であるが、非定常等エントロピ膨張の場合には、全圧、全温度、全密度は、一定に保たれず、 $\eta$  に対して上述のように変化する。これは次のように説明される。一次元非定常等エントロピ流れに対するエネルギーの式は、静エンタルピを  $h$  とすると

$$\frac{D}{Dt} \left( h + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (10)$$

ここに  $D/Dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$  は、流れに沿っての時間的変化を表す実質微分である。よどみ点エンタルピを  $h_0$  とすると、 $h_0 = h + u^2/2$  であるから、上式は

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (11)$$

非定常流れでは、 $\partial p/\partial t \neq 0$  であるから、上式より、 $Dh_0/Dt \neq 0$  で、よどみ点エンタルピ  $h_0$  は流れに沿って変化する。従って  $T_0, p_0, \rho_0$  も変化する。

式(5)を  $t$  で偏微分すると

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p \cdot 2\kappa(\kappa+1) \left\{ \frac{\kappa+1}{2-(\kappa-1)\eta} \right\}^{\frac{1-3\kappa}{\kappa-1}} \times$$

$$\{ 2 - (\kappa-1)\eta \}^{-2} \cdot \frac{\eta}{t} = p_1 f(\eta) \cdot \frac{\eta}{t} \quad (12)$$

上式の  $f(\eta)$  は、任意の  $\eta (-1 \leq \eta \leq 5)$  に対して、つねに  $f(\eta) > 0$  である。従って  $t > 0$  なる任意の時間に対して

$$-1 \leq \eta < 0 \text{ のとき } \frac{\partial p}{\partial t} < 0 \quad (13)$$

従って  $-1 \leq \eta < 0$  では、式(11)より  $Dh_0/Dt < 0$  となり、全温度  $T_0 = h_0/c_p$  の関係より、 $DT_0/Dt < 0$  であることも明らかである。また等エントロピの関係より、 $DT_0/Dt < 0$  であれば、全圧  $p_0$  と全密度  $\rho_0$  についてもその実質微分が負となることが示される。従って、図3に示すように  $-1 \leq \eta < 0$  の範囲では、 $\eta$  の増加とともに全温度、全圧、全密度は減少する。また式(12)より

$$0 \leq \eta \leq 5 \text{ のとき } \frac{\partial p}{\partial t} \geq 0 \quad (14)$$

従って、この場合には、式(11)より  $Dh_0/Dt \geq 0$  であるから、全温度、全圧、全密度は $\eta$ とともに増加する。

次に領域②の全エンタルピ  $h_{02} = c_p T_{02}$ 、静エンタルピ  $h_2$ 、及び運動エネルギー  $u_2^2/2$  をそれぞれ領域①のよどみ点エンタルピ  $h_{01} = h_1$  で無次元化した値を $\eta$ に対して図4に示す。図より  $h_2/h_1$  の値は1より減少して、 $\eta$  の増加とともに0に漸近するが、 $u_2^2/2h_1$  の値は0より単調に増加して $\eta = 5$  において  $u_2^2/2h_1 = 5$  となる。全エンタルピ  $h_{02}/h_1$  の値が  $-1 \leq \eta < 0$  において減少するのは、この範囲における運動エネルギー

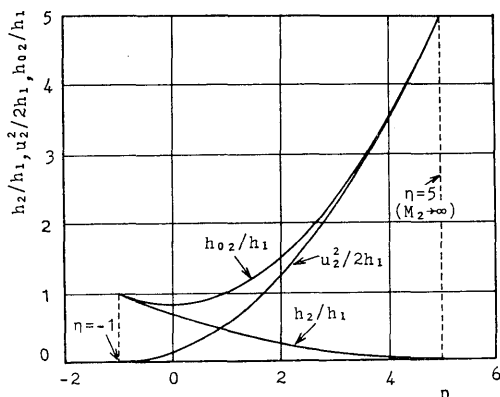


Fig. 4 Contribution of kinetic energy and static enthalpy to stagnation enthalpy ( $\kappa=1.4$ )

ギの増加割合より静エンタルピの減少割合が大きいため<sup>7)</sup>,  $0 \leq \eta \leq 5$  の範囲で  $\eta$  が大きくなると, 全エンタルピの大部分は運動エネルギーで占められる.

### 3. 定常膨張と非定常膨張の比較

図 1 における領域①の静止状態の気体をノズルにより状態②まで定常等エントロピ的に膨張させた場合と, 非定常膨張波により等エントロピ的に加速した場合の領域②における状態量の比較を図 5 に示す. 図の横軸は領域②の気流マッハ数  $M_2$  で, 縦軸の諸量は領域①の状態量で無次元化してあり, 実線は非定常膨張

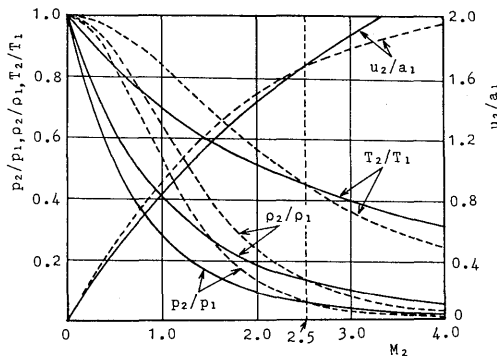


Fig. 5 Comparison of flow properties in steady and unsteady expansions ( $\kappa=1.4$ )

波の場合, 破線はノズルによる定常膨張の場合を示す. 流速  $u_2/a_1$  は非定常, 定常のいずれの場合にも  $M_2$  とともに単調に増加するが,  $M_2=2.5$  を境として両者の大小関係が反対となる. すなわち  $0 \leq M_2 < 2.5$  の範囲では  $u_2/a_1$  の値は定常膨張の場合の方が大きく,  $M_2 > 2.5$  では非定常膨張の方が大きい. また圧力比  $p_2/p_1$ , 温度比  $T_2/T_1$ , 及び密度比  $\rho_2/\rho_1$  の値はいずれも  $M_2$  の増加とともに一様に減少するが,  $M_2=2.5$  を境として定常膨張の値と非定常膨張の値の大小関係が反対となり,  $M_2 < 2.5$  では定常膨張の場合の方が大きく,  $M_2 > 2.5$  では非定常膨張の方が大きい. これは次のように説明される. 例えば  $u_2/a_1$  と  $p_2/p_1$  を書きかえると

$$\frac{u_2}{a_1} = \frac{u_2}{a_{02}} \cdot \frac{a_{02}}{a_1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_{02}} \cdot \frac{p_{02}}{p_1}$$

上式において  $u_2/a_{02}$  と  $p_2/p_{02}$  は  $M_2$  のみの関数であるが,  $a_{02}/a_1$  と  $p_{02}/p_1$  は膨張過程が定常であるか非定常であるかによって異なる. すなわち定常流の場合には,  $\frac{a_{02}}{a_1} = 1, \frac{p_{02}}{p_1} = 1$  であるが, 非定常膨張の場合には,  $0 \leq M_2 \leq 2.5$  の範囲では  $a_{02}/a_1 = (T_{02}/T_1)^{1/2} \leq 1, p_{02}/p_1 \leq 1$  で,  $M_2 > 2.5$  では  $a_{02}/a_1 > 1, p_{02}/p_1 > 1$  である. このため, 上述のような現象が起こる.

### 4. 結 論

気体が非定常等エントロピ的に膨張する場合の状態量の変化を求めるとともに, 定常等エントロピ膨張による状態量の変化と比較し, 非定常膨張波の特性を明らかにした. 主な結論は次の通りである.

(1) 静止気体が非定常膨張波によって加速される流れ場を, 二つの独立変数, すなわち距離  $x$  と時間  $t$ , 及び初期音速  $a_1$  を組み合わせた無次元の相似変数  $\eta = x/a_1 t$  を用いて解析し, 非定常膨張波の内部及びその背後の流れの諸量を明らかにした.

(2) 非定常膨張波によって誘起される流れのよどみ点状態の圧力, 密度, 温度はいずれも  $-1 \leq \eta < 0$  では減少し,  $\eta > 0$  では増加する. このようなよどみ点状態量の変化の理由を, 一次元非定常のエネルギーの式を用いて説明した.

(3) 定常膨張と非定常膨張の場合の流れの状態量の変化を, 膨張後の気流マッハ数に対して比較すると, あるマッハ数で両者の大小関係が反対になる. これは非定常膨張波によりよどみ点状態量が変化することに起因する.

### 参 考 文 献

- 1) 生井・松尾, 圧縮性流体の力学, 理工学社 (1977), 113, 115.
- 2) Emanuel, G., AIAA J., 19-8 (1981), 1015.
- 3) Barbour, N. M., AIAA J., 13-10 (1975), 1394.
- 4) 鹿毛・ほか3名, 機論 B, 49-440(1983), 837.
- 5) Rose, P. H., Proc. 12th Int. Symp. on Shock Tubes and Waves, (1979), 3.
- 6) Eidelman, S., et al., AIAA J., 22-7(1984), 1010.
- 7) 鹿毛・薬師寺, 大分大学工学部研究報告, Vol. 10(1983), 23.