

二酸化炭素における衝撃波の反射の数値解析

松尾, 一泰
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

青木, 俊之
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

近藤, 信昭
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

平原, 裕行
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

<https://doi.org/10.15017/17573>

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 5 (1), pp. 49-55, 1983-06-30. 九州大学大学院総合理工学
研究科
バージョン :
権利関係 :

二酸化炭素における衝撃波の反射の数値解析

松尾一泰*・青木俊之*

近藤信昭*・平原裕行**

(昭和 58 年 3 月 31 日 受理)

Numerical Analysis of Shock Wave Reflections in Carbondioxide

Kazuyasu MATSUO, Toshiyuki AOKI, Nobuaki KONDOH
and Hiroyuki HIRAHARA

When a plane moving shock wave encounters a sharp compressive corner in a shock tube, regular reflection or Mach reflection occurs, depending upon the Mach number of the incident shock wave, the corner wedge angle, and the initial thermodynamic state of the gas. These reflections have been investigated theoretically and experimentally by many researchers. Unfortunately, however, most of these investigations were done on diatomic gases such as air, oxygen and nitrogen.

In the present paper, numerical computation is made for obtaining the quantities of carbondioxide behind incident shock wave as well as the reflected shock wave from an inclined wall. It is assumed that the vibrational temperature of molecules is in equilibrium with the translational temperature, and some dissociation occurs instantaneously behind the shock waves. The analytical results taking into account these real gas effects are compared with those in the case of perfect gas.

1. ま え が き

アルゴンやヘリウムなどの単原子気体と異なり、酸素などの二原子気体や二酸化炭素などの三原子気体、あるいはそれ以上の多原子気体では、内部エネルギーとして、並進エネルギーに加えて、回転及び振動のエネルギーをもつが、一般に、分子の振動の特性温度は並進や回転運動の特性温度に比べ極めて高い。このため、常温付近の状態では気体の物性に対して、分子の振動の影響はほとんど現れず¹⁾、通常、気体は完全気体として取り扱われる。

しかるに、衝撃波を取り扱う場合、その下流の気体は高温・高圧になるから、分子振動の励起や、解離あるいは電離などの実在気体効果が無視できなくなる。特に衝撃波が壁面で斜め反射する場合には、気体分子は入射衝撃波と反射衝撃波によって加熱されるから、

入射衝撃波マッハ数がある程度高い場合には、実在気体効果を考慮しなければならない。

本論文は、二酸化炭素における衝撃波の反射を数値解析したもので、衝撃波の反射角や反射衝撃波の強さなどについて、完全気体と仮定した場合と実在気体効果を考慮した場合とを比較し、衝撃波の反射における実在気体効果の影響を明らかにした。

2. 計 算 方 法

完全気体では、二酸化炭素などの三原子気体あるいはそれ以上の原子から構成される多原子気体の比熱比 γ は 1.33 である²⁾。しかし実際には、二酸化炭素の比熱比は温度 273 K で $\gamma=1.301$ であるから³⁾、本論文では二酸化炭素を完全気体として取り扱う場合、 $\gamma=1.301$ とした。

与えられた圧力 p と温度 T に対して、内部エネルギーなどの他の諸量を求めることがまず必要である。本論文では二酸化炭素に対し、次の三つの計算モ

* エネルギー変換工学専攻

** エネルギー変換工学専攻修士課程

デルを使用した。

(1) 完全気体モデル (モデル P)

この計算モデルでは気体を比熱比一定 ($\gamma=1.301$) の完全気体として考え、気体は常に熱的に平衡であるとする。この場合の状態方程式は次式で与えられる。

$$p = \rho RT = \frac{\rho \bar{R}T}{m} \quad (1)$$

ここで、 ρ は密度、 R は気体定数、 \bar{R} は一般気体定数 (8314.3 J/kmol K)、 m は分子量 (44.01) である。

気体のもつ単位質量当りの内部エネルギー e 及びエンタルピ h は次式で与えられる。

$$e = \frac{RT}{\gamma-1} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \quad (2)$$

$$h = \frac{\gamma RT}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \quad (3)$$

p と T が与えられると、式 (1)~(3) より密度 ρ 、内部エネルギー e 、エンタルピ h が求められる。

(2) 振動平衡モデル (モデル V)

この計算モデルでは、気体分子の並進及び回転モードがともに熱的平衡にあり、更に振動モードも平衡状態であると仮定し、各モード間ではエネルギーの等分配則が成り立つものとする。また気体の解離及び電離は無視する。温度 T で平衡状態にある気体の単位質量当りの内部エネルギー e は分子の並進及び回転の運動、振動の励起によるエネルギーの和であるから、

$$e = \frac{3}{2} RT + RT + R \sum_i \frac{\theta_i}{e^{\theta_i/T} - 1} \quad (4)$$

ここで θ_i は振動の特性温度である。直線形状の三原子気体である二酸化炭素の振動モードは四つあり、それぞれの振動特性温度は、 $\theta_1 = \theta_2 = 960.2$ K、 $\theta_3 = 1932.8$ K、 $\theta_4 = 3380.7$ K である¹⁴⁾。同様に単位質量当りのエンタルピ h は

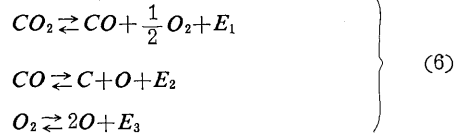
$$h = \frac{7}{2} RT + R \sum_i \frac{\theta_i}{e^{\theta_i/T} - 1} \quad (5)$$

式 (1) の状態方程式及び式 (4) と (5) を用いて、気体の ρ, e, h が求められる。

(3) 解離平衡モデル (モデル D)

この計算モデルでは、前項の分子の並進、回転、振動に加えて、二酸化炭素の解離を考慮に入れる。二酸化炭素の解離生成物は、 $\text{CO}_2, \text{CO}, \text{O}_2, \text{O}, \text{C}$ の5種

類として、固体の炭素粒子の生成は考えない。また各成分は個々について熱的に完全気体として取り扱えるものとする。予想される平衡反応式は次式である¹⁾。



ここで、 E_1, E_2, E_3 は各反応に対する解離エネルギーである。各成分の濃度を X_i で表し、次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} X_i &= \frac{n_i}{\sum_i n_i} \\ \sum_i X_i &= 1 \\ i &= \text{CO}_2, \text{CO}, \text{O}_2, \text{O}, \text{C} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、 n_i は i 成分の数密度 (1/mol) である。平衡状態での各成分に含まれる炭素原子と酸素原子の数の比は 1:2 であるから、

$$\frac{2X_{\text{CO}_2} + 2X_{\text{O}_2} + X_{\text{CO}} + X_{\text{O}}}{X_{\text{CO}_2} + X_{\text{CO}} + X_{\text{C}}} = 2 \quad (8)$$

これらの化学反応では、およそ 10000 K 以下では化学反応平衡定数に含まれる分配関数の項が温度変化に対してほぼ一定であるという関係を適用すると、各成分の濃度が容易に計算される¹⁾。また、各成分が熱的に完全であるから、次の状態方程式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\bar{\rho} \bar{R}T}{\bar{m}} \\ \bar{m} &= \sum_i X_i m_i \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、 $\bar{\rho}$ は平均密度、 \bar{m} は平均分子量、 m_i は i 成分の分子量である。単位質量当りの内部エネルギー e は、各成分の並進、回転、振動のエネルギーの総和であるから、

$$\begin{aligned} e &= \frac{3kT}{2\rho} (3n_{\text{CO}_2} + 2n_{\text{CO}} + 2n_{\text{O}_2} + n_{\text{O}} + n_{\text{C}}) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left\{ (n_{\text{C}} + n_{\text{CO}}) E_1 + n_{\text{C}} E_2 + \frac{1}{2} (n_{\text{O}} - n_{\text{C}}) E_3 \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで k はボルツマン定数である。またエンタルピ h は、

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (11)$$

である。式 (6)~(11) を用いて、解離を考慮した場合の二酸化炭素の諸量が計算される。

3. 衝撃波の計算

前述の計算モデルを用いて、二酸化炭素における衝撃波の前後の諸量を求める。垂直衝撃波における質量、運動量、エネルギーの保存則は次式で与えられる。

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (12)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (13)$$

$$h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (14)$$

ここで、添字 1, 2 はそれぞれ、衝撃波を静止した座標系での衝撃波の前方と後方の状態を表す。式(12)~(14)に前述の三つの計算モデルを適用すると衝撃波の前後の諸量が計算される。

解離平衡モデルに従って計算した場合の衝撃波後方

の解離生成物の濃度比 X_i と衝撃波前方の流れマッハ数 M_1 の関係を Fig. 1 に示す。衝撃波前方の温度 $T_1=300$ K, 圧力 $p_1=10$ Torr として計算した。 M_1 が約 6 で解離が起り始め、 M_1 が増加するにつれて CO_2 分子濃度が減り CO と O_2 の濃度が急速に増加する。また C 原子はこの M_1 の範囲ではほとんど存在しないことがわかる。

前節の計算モデルを用いて計算した垂直衝撃波の前後の温度比 T_2/T_1 と流れのマッハ数 M_1 の関係を Fig. 2 に示す。曲線①は完全気体モデル、曲線②は振動平衡モデルによる。また曲線③, ④, ⑤は解離平衡モデルで、衝撃波前方の圧力 p_1 がそれぞれ 100 Torr, 10 Torr, 1 Torr の場合である。いずれの曲線も衝撃波前方の温度は $T_1=300$ K として計算した。図からわかるように、分子振動の励起により、曲線②は完全気体の曲線①の下側にあり、 M_1 の増加とともにその差は増加する。また解離平衡モデルの曲線③, ④, ⑤は $M_1=7.0$ 付近まで曲線②と一致するが、 $M_1>7.0$ では M_1 が大きいほど曲線②との差が大きくなり、衝撃波前方の圧力が小さいほど差が大きくなる。

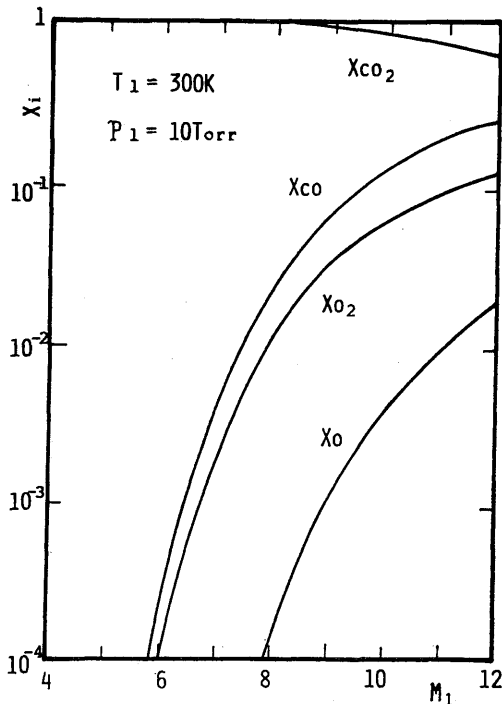


Fig. 1 Fractions of dissociated species ($\text{CO}_2, \text{CO}, \text{O}_2, \text{O}$) versus inlet Mach number

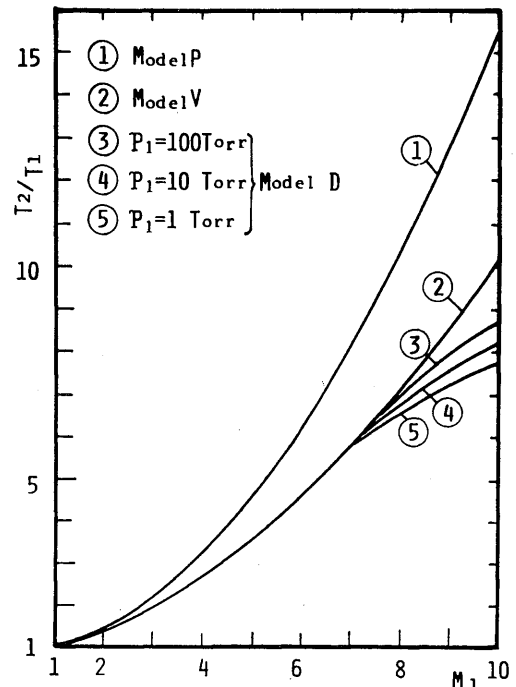


Fig. 2 Temperature ratio versus inlet Mach number

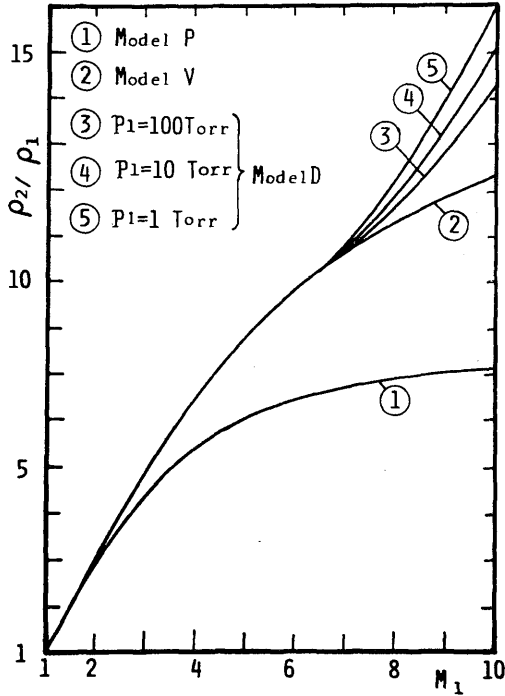


Fig. 3 Density ratio versus inlet Mach number

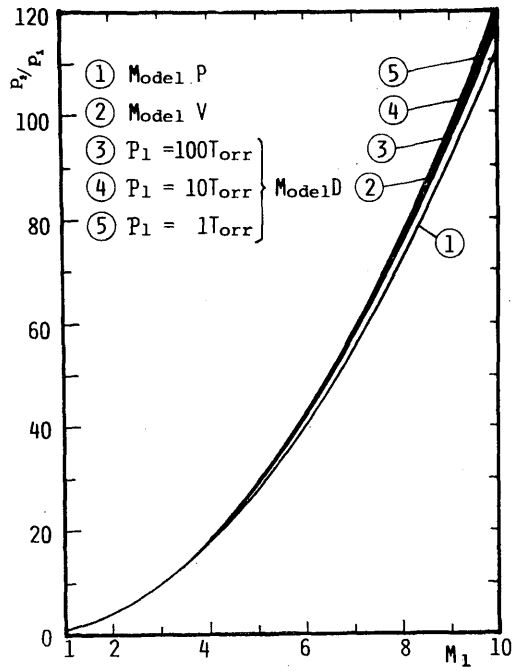


Fig. 4 Pressure ratio versus inlet Mach number

Fig. 3 と 4 は、同様にして求めた垂直衝撃波の前後の密度比 ρ_2/ρ_1 と圧力比 p_2/p_1 で、曲線①～⑤の意味は Fig. 2 と同じである。Fig. 3 より、 ρ_2/ρ_1 の振動平衡モデルの曲線②は完全気体の曲線①の上側にあり、 M_1 が大きいほどその差は大きい。曲線③、④、⑤は $M_1=6.5$ 付近まで曲線②と一致するが、 $M_1 > 6.5$ では M_1 が大きいほど曲線②との差は大きい。一方、Fig. 4 より、圧力比 p_2/p_1 の各モデルによる計算値は、温度比 T_2/T_1 や密度比 ρ_2/ρ_1 ほどの差はなく、特に曲線③、④、⑤の値はこの M_1 の範囲では、曲線②の値とほとんど一致する。

4. 衝撃波の反射の数値解析

4.1 正常反射における反射角と反射衝撃波の強さ

衝撃波の斜め反射は、超音速風洞や超音速ディフューザなどのような流路内の定常な超音速流れにおいて、斜め衝撃波が固体壁で反射する場合、あるいは爆発による爆風波が周囲気体中を伝ばし、構造物で反射する場合などに観察される。後者は非定常流れであるが、伝ば衝撃波がくさび面で反射する場合のように、

入射衝撃波と傾斜面のなす角が一定であれば、変数変換により運動方程式から時間という独立変数を消去でき、定常流れとして取り扱うことができる。このような流れを擬定常流れ⁵⁾⁶⁾ という。

正常反射における流れの諸量の記号を Fig. 5 に示す。IP は入射衝撃波、PR は反射衝撃波で、両者は反射点 P で壁面と交わる。定常流れでは領域①の流れのマッハ数 M_1 が衝撃波上流マッハ数である。一方、擬定常流れでは、衝撃波は左から右へ伝ばするか

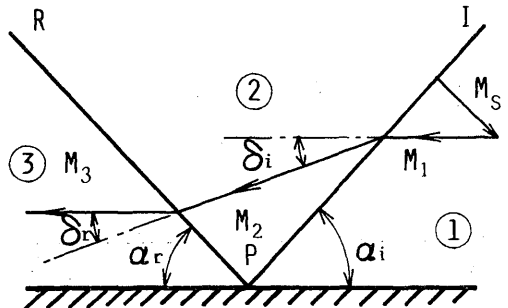


Fig. 5 Schematic diagram of regular reflection

ら、入射衝撃波のマッハ数 M_s は、 M_1 の IP に垂直な方向の成分 $M_s = M_1 \sin \alpha_i$ である。Fig. 5 の領域①の壁面に平行な流れは入射衝撃波と反射衝撃波で曲げられ、反射衝撃波の下流の流れは再び壁面に平行でなければならない。すなわち、入射衝撃波による流れの偏角 δ_i と反射衝撃波による流れの偏角 δ_r は向きが逆で大きさが等しいことが必要である。式で表すと、

$$\delta_i + \delta_r = 0 \quad (15)$$

計算手順は次の通りである。与えられたマッハ数 M_1 と入射角 α_i に対し、入射衝撃波 IP に斜め衝撃波の関係式と2節の計算モデルを適用し δ_i を求める。同様の方法を反射衝撃波 PR に適用し δ_r を求め、式(15)を満足するまで反射角 α_r を繰返し計算にて求める。 α_r が決定されると正常反射の各領域の諸量が計算できる。

上述の計算法により求めた正常反射の入射角 α_i と反射角 α_r の関係を完全気体モデルと解離平衡モデル ($T_1=300\text{ K}$, $p_1=10\text{ Torr}$) に対し、それぞれ Fig. 6 と 7 に示す。パラメータは擬定常流れにおける入射衝撃波マッハ数 M_s で、定常流の場合 $M_1 = M_s / \sin \alpha_i$ の関係から衝撃波上流のマッハ数が得られる。図からわかるように、各 M_s に対して解が存在し得る

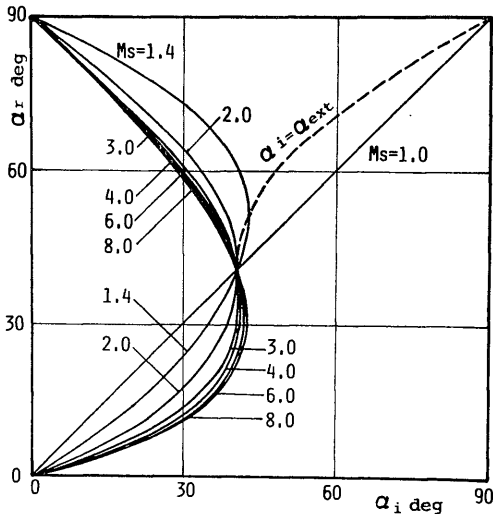


Fig. 6 Incident angle versus reflected angle for shocks of different strength undergoing regular reflection (Model P)

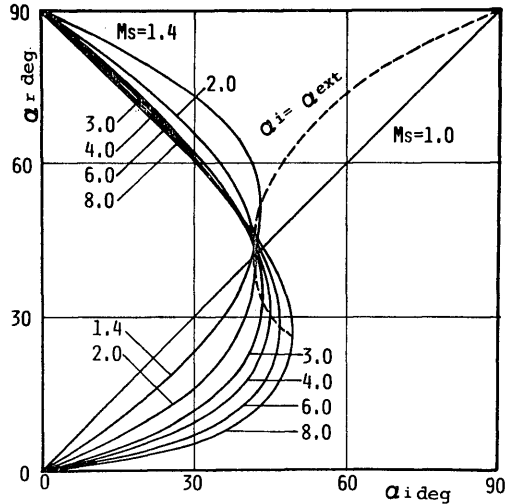


Fig. 7 Incident angle versus reflected angle for shocks of different strength undergoing regular reflection (Model D)

最大の入射角 α_i がある。この入射角を極限角 α_{ext} , $\alpha_i = \alpha_{ext}$ の時、正常反射からマッハ反射への遷移が起こるとする基準を離脱基準⁷⁾と呼ぶ。図中の破線は各 M_s に対する α_{ext} を結んだ線である。Fig. 6 と 7 より次のことがいえる。同じ M_s に対する α_{ext} の値は Fig. 7 の解離平衡モデルの方が大きく、この傾向は M_s が大きいほど顕著である。また同じ M_s と α_i に対する α_r の値は弱い反射衝撃波に対して Fig. 7 の方が小さく、その傾向は M_s が大きいほど著しい。

次に正常反射における反射衝撃波後方の圧力 p_3 と入射衝撃波前方の圧力 p_1 の比 p_3/p_1 と入射角 α_i の関係を、完全気体モデルと解離平衡モデルについてそれぞれ Fig. 8 と 9 に示す。パラメータは M_s で、計算は弱い反射衝撃波について行った。破線は各 M_s に対する $\alpha_i = \alpha_{ext}$ の状態の p_3/p_1 を結んだ線である。図より、 M_s が小さい場合、 p_3/p_1 の値は α_i が変化してもほとんど変化せず、 α_i が α_{ext} に近づくと急に増大する。また M_s が大きい場合、 p_3/p_1 は α_i の増加とともに減少し、 $\alpha_i \approx \alpha_{ext}$ で増大する。すなわち、実在気体効果によって圧力比 p_3/p_1 は大きくなり、 α_i に対する変化量も大きくなる。

4.2 マッハ反射における反射角と反射衝撃波の強さ

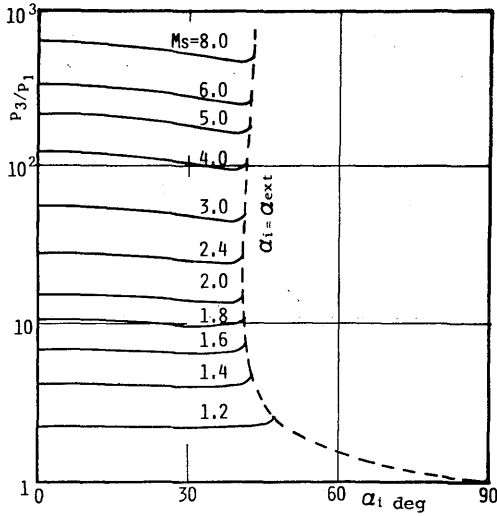


Fig. 8 Pressure ratio versus incident angle for shocks of different strength undergoing regular reflection (Model P)

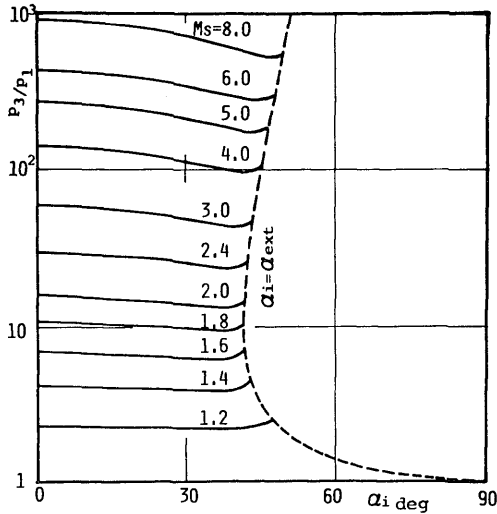


Fig. 9 Pressure ratio versus incident angle for shocks of different strength undergoing regular reflection (Model D)

マッハ反射における衝撃波系に対する流れの諸量の記号を Fig. 10 に示す。 $\delta_i, \delta_r, \delta_m$ はそれぞれ入射衝撃波 IT , 反射衝撃波 TR , マッハ衝撃波 TM による流れの偏角である。このような衝撃波系において、すべり面 TC の両側の領域③と④の流れの方向と圧力は

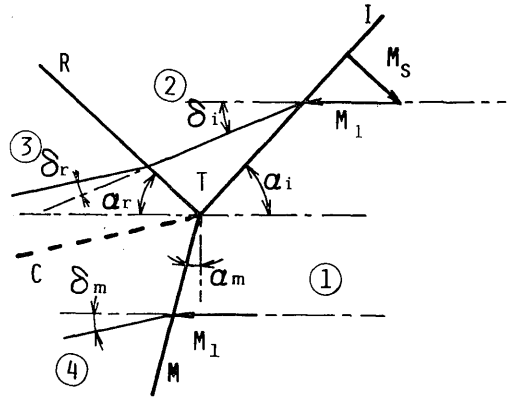


Fig. 10 Schematic diagram of Mach reflection

等しくなければならない。すなわち

$$\delta_i + \delta_r = \delta_m \quad (16)$$

$$p_3 = p_4 \quad (17)$$

計算手順は次の通りである。まず与えられた M_1 と α_i に対し、斜め衝撃波の関係式と2節の計算モデルを適用し、 δ_i を求め同様の方法を TR と TM に適用して $\delta_r, \delta_m, p_3, p_4$ を求め、式 (16) と (17) を満足するまで繰返し計算にて、 α_r あるいは α_m を求める。

領域①の状態を一定とし、入射角 α_i を次第に減少させると、ある α_i の値でマッハ衝撃波が流れに垂直になる。すなわち

$$\alpha_m = 0 \quad (18)$$

このときマッハ反射から正常反射へ移行すると考え、これを力学的平衡基準⁹⁾、このときの入射角を定置角 $\alpha_i = \alpha_{st}$ と呼ぶ。

上述の計算により求めた、マッハ反射の入射角 α_i と反射角 α_r の関係を完全気体モデルと振動平衡モデルに対し、それぞれ Fig. 11 と 12 に示す。パラメータは擬定常流れにおける入射衝撃波マッハ数 M_s で、Fig. 6 の場合と同様に定常流れのマッハ数は $M_1 = M_s / \sin \alpha_i$ で求まる。曲線①は各 M_s に対する α_{st} の値を結んだ線で、力学的平衡基準によれば、この曲線の右側でマッハ反射が存在し、左側ではマッハ反射は存在しない。曲線②は入射衝撃波背後の流れのマッハ数 $M_2 = 1$ で、この右側の領域では $M_2 < 1$ であるからマッハ反射は存在しない。従って曲線①と②の間がマッハ反射の起こり得る領域である。なお曲線③は

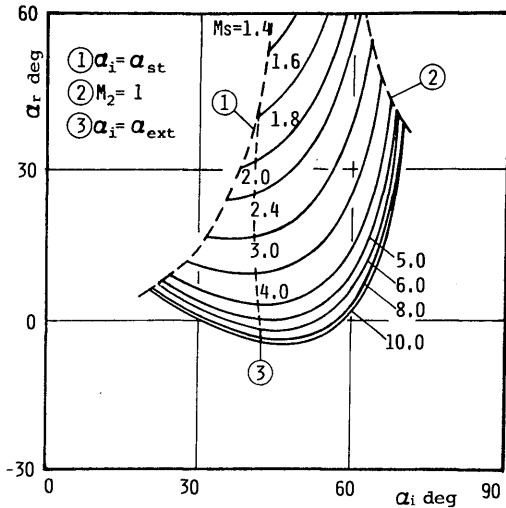


Fig. 11 Incident angle versus reflected angle for shocks of different strength undergoing Mach reflection (Model P)

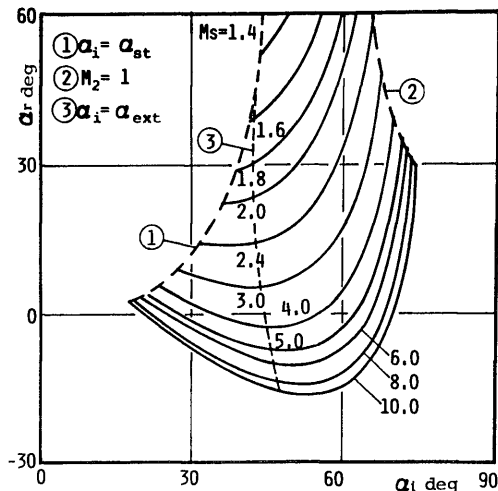


Fig. 12 Incident angle versus reflected angle for shocks of different strength undergoing Mach reflection (Model V)

$\alpha_i = \alpha_{ext}$ の値を結んだ線である。

Fig. 11 と 12 より次のことがわかる。入射角 α_i を一定に保ち、 M_s を増加させると反射角 α_r が減少する。Fig. 11 の完全気体モデルでは M_s が 5 以上にならないと α_r は負にならないが、Fig. 12 では M_s

が 4 ですでに α_r が負になる領域が存在する。 M_s が一定の場合、マッハ反射から正常反射への遷移の入射角、すなわち定置角 α_{st} は、Fig. 12 の方が小さく、その傾向は M_s が大きいほど小さくなる。

5. 結 論

二酸化炭素における衝撃波の反射について反射角や反射衝撃波の強さなどを実在気体効果を考慮して数値解析し、完全気体と仮定した場合と比較した。得られた結果を要約すると次の通りである。

(1) 入射衝撃波マッハ数 M_s が一定の場合、離脱基準による正常反射からマッハ反射への遷移の入射角（極限角）は実在気体効果を考慮すると大きくなり、この傾向は M_s が大きいほど顕著である。

(2) M_s と入射角 α_i が一定の場合、正常反射における反射角は、実在気体効果を考慮すると小さくなる。

(3) M_s が一定の場合、正常反射における反射衝撃波の強さは、 α_i の増加とともに減少する。実在気体効果を考慮するとその傾向が顕著になり、反射衝撃波の強さが増加する。

(4) M_s が一定の場合、力学的平衡基準によるマッハ反射から正常反射への遷移の入射角（定置角）は実在気体効果を考慮すると小さくなる。

(5) マッハ反射の場合、 α_i を一定にし M_s が増加すると反射角 α_r が減少し、 α_r が負になる M_s と α_i の領域が存在する。その領域は実在気体効果を考慮する場合の方が大きい。

参 考 文 献

- 1) 神元, 松為, 航空学会誌, 15-166(1967), 366.
- 2) 生井, 松尾, 圧縮性流体の力学, (1977), 理工学社.
- 3) Thompson, P. A., Compressible-Fluid Dynamics, (1972), McGraw-Hill.
- 4) Ando, S., UTIAS Tech. Note 231, (1981).
- 5) Jones, D. M., ほか 2 名, Proc. Roy. Soc. Sec. A. 205 (1951), 238.
- 6) 生井, ほか 3 名, 総理工報告, 2-2(1981), 61.
- 7) Neumann, J. von, Collected Works, 6 (1963), 238.
- 8) Henderson, L. F. and Lozzi, A., J. Fluid Mech., 68-1 (1975), 139.