

ある拘束条件をもつ双線形レギュレータ問題に対する安定化手法

相良, 節夫
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

中野, 和司
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

宮内, 秀和
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

<https://doi.org/10.15017/17519>

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告．2（2），pp.79-86，1981-01-20．九州大学大学院総合理工学研究科
バージョン：
権利関係：



ある拘束条件をもつ双線形レギュレータ問題 に対する安定化手法

相良 節夫*・中野 和司*・宮内 秀和**

(昭和55年10月31日 受理)

A Stabilization Method for a Bilinear Regulator Problem with a Constraint

Setsuo SAGARA, Kazushi NAKANO
and Hidekazu MIYAUCHI

Abstract

This paper is concerned with the optimal start-up control for one-point approximate nuclear reactor systems described by homogeneous bilinear differential equations. This problem can be formulated as a bilinear regulator problem with a constraint. But it is usually impossible to obtain the optimal control from the theoretical and computational viewpoints.

The proposed method is composed of two steps: in the first step, the optimal regulator problem is solved with the performance index on the only controlled variable, in the second, the optimal regulator problem is solved in order to determine the control which stabilizes all state variables. These control schemes make it possible to realize both the optimization and stabilization of the systems.

A numerical example is given to show the effectiveness of the proposed method.

まえがき

双線形システム: $\dot{x} = Ax + Bux$ の制御問題は主に安定化と最適化の2つの観点から研究されている。安定化の立場では、状態フィードバックによる平衡点近傍の漸近安定領域の推定問題¹⁾あるいは漸近安定性を保証するフィードバック則の設計問題²⁾として考察されている。最適制御の立場では、最短時間問題や燃料最小問題など³⁾が解かれているが、行列 A と B が可換である場合を除いて⁴⁾、双線形レギュレータ問題は未だ解決されていない⁵⁾。

原子炉システムは双線形システムのうちでも最も重要な応用対象であるが、その最適起動問題を双線形レギュレータ問題として取り扱った例はない。これは、最適レギュレータ問題が非線形2点境界値問題に帰着されるということ以外に、原子炉の安全性からの状態

に関するある拘束条件のために、問題が非常に複雑になるという事実に基づくものと思われる。

本論文では、1点近似原子炉モデルを対象として、その最適起動問題を双線形レギュレータ問題の観点から考察する。まず、ある状態拘束条件からシステムの最短起動時間を求め、最適レギュレータ問題の成立条件を求める。次に、このような条件を考慮して、次の2つのステップから成る安定化制御則を提案する。

(i) 制御量(中性子密度)のみに着目した最適レギュレータ問題を設定し、最適制御則を求める。

(ii) システムの状態を平衡領域に移す安定化制御則を求め、これを目標値と見なして、(i)と同様な評価をもつ最適レギュレータ問題を設定し、最適制御則を求める。

最適レギュレータの立場からいえば、(i)の方策で十分であるが、状態拘束と安定性を考慮した(ii)の方策によって、システムの最適化と安定化が実現できるという点が本手法の特長である。最後に、提案した

* エネルギー変換工学専攻

** エネルギー変換工学専攻修士課程

手法の有効性を計算機シミュレーションにより確かめている。

2. 対象とするシステムとその平衡領域

2.1. システムの記述

対象とするシステムは一点近似原子炉モデルとし、

(1) 式のような同次双線形微分方程式により表わされるものとする。

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^1 \quad (1)$$

ここに、

$$\mathbf{x} = [N \mid C_1 \cdots C_{n-1}]^T = [x_1 \mid x_2 \cdots x_{n-1}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1} \\ \alpha_1 & -\lambda_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n-1} & 0 & & -\lambda_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_i > 0 (i=0, \dots, n-1), \quad \lambda_i > 0 (i=1, \dots, n-1)$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j; i, j=1, \dots, n-1)$$

$$\alpha_i = r \beta_i / l, \quad \alpha_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i, \quad b = l^{-1}$$

N, C_i, u はそれぞれ中性子密度、 i 番目の種類の先行核密度、反応度である。また、 r, l はそれぞれ遅発中性子の減速途中で失われない確率と即発中性子のそれとの比、中性子生成時間、 β_i, λ_i はそれぞれ i 番目の種類の先行核の生成される割合、その崩壊定数である。 $\mathbb{R}^1$ は1次元 Euclid 空間、 $\mathbb{R}^n$ は n 次元 Euclid 空間の $x_i > 0 (i=1, \dots, n)$ なる部分集合を表わす。

なお、記述の簡単化のため、次の記号を用いることにする。

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & A_{22} \end{bmatrix}}_{1 \quad n-1} \begin{matrix} 1 \\ n-1 \end{matrix}, \quad \mathbf{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{1 \quad n-1}$$

2.2. システムの平衡領域

(1) 式で記述されるシステムに対して、次のように平衡状態、平衡領域を定義する。

【定義1】 ある入力 u_e に対して、システムの状態遷移関数を $\phi(t, \mathbf{x}_0, u_e, t_0)$ とするとき、 u_e に対する平衡状態とは、次の式を満足する状態である。

$$\phi(t, \mathbf{x}_e, u_e, t_e) = \mathbf{x}_e, \quad \forall t \geq t_e \quad (2)$$

また、このときの平衡状態の集合を u_e に対する平衡領域という。

(1) 式で記述されるシステムに対して、次の補題が成立する。

〔補題〕

$$\det(A + Bu) = 0 \quad (3)$$

とする入力は、

$$u = -(\det A) / b(\det A_{22}) \quad (4)$$

により与えられる。

(証明)

$$\begin{aligned} \det(A + Bu) &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} + bu & a_{12} \\ a_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= bu(\det A_{22}) + \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= bu(\det A_{22}) + \det A \quad (5) \end{aligned}$$

したがって、 $\det(A + Bu) = 0$ とする入力は、

$$u_e = -(\det A) / b(\det A_{22}) \quad (\text{証明終})$$

補題より、次の平衡領域に関する定理が得られる。

《定理1》 (1) 式で記述されるシステムに対して

$$u_e = -(\det A) / b(\det A_{22}) \quad (4')$$

なる入力を加えると、平衡領域が存在して、それは次式で表わされる。

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{e2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{e2} = -A_{22}^{-1} a_{21} x_1, \quad x_1 \in (0, \infty] \right\} \quad (6)$$

(証明) まず、(4') 式より、

$$\begin{aligned} (A + Bu_e) &= \begin{bmatrix} a_{11} - b(\det A) / b(\det A_{22}) & a_{12} \\ a_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - \det(a_{11} - a_{12} A_{22}^{-1} a_{21}) & a_{12} \\ a_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{c|c} \hline a_{12}^T A_{22}^{-1} a_{21} & a_{12}^T \\ \hline a_{21} & A_{22} \\ \hline \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \hline a_{12}^T & \\ \hline A_{22} & a_{21} \\ \hline \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)
\end{aligned}$$

ところで、 A_{22} のランクは $n-1$ であるから次式は明らかに成立する。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} a_{12}^T \\ A_{22} \end{bmatrix} = n-1 \quad (8)$$

(7) 式と (8) 式より、 $(A+Bu_e)x=0$ は次式と等価である。

$$x_2 = -A_{22}^{-1} a_{21} x_1 \quad (9)$$

さらに、(9)式と a_{21}, A_{22} の条件より $x_1 \in (0, \infty]$ ならば $x_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ である。したがって、(6)式で表されるような平衡領域が存在する。 (証明終)

(1) 式で記述されるシステムは (4') 式の入力でのみ平衡領域が存在するので、以下 u_e に対する平衡状態、および u_e に対する平衡領域を単に平衡状態、平衡領域と呼ぶことにする。

システムの起動問題では起動後のシステムの安定性がしばしば重要な問題となる。したがって、次章ではある平衡状態 x_0 から他の平衡状態 x_d への起動問題を考察する。

3. 最適起動問題

本章では (1) 式で記述されるシステムに対して、ある平衡状態から他の平衡状態への起動問題を設定する。ただし、このとき 1 状態変数 x_1 のみに不等式拘束が課せられているとする。これは、中性子密度をある安全値以下に押えたいという条件である。

〔問題 1〕 (1) 式で記述されるシステム方程式を動的拘束として、(11) 式の不等式拘束のもとで、次の 2 次形式評価を最小にする操作量 $u(t), t \in [0, t_f]$ を決定する。

$$\begin{aligned}
J = & \frac{1}{2} \bar{x}^T(t_f) S \bar{x}(t_f) \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ \bar{x}^T(t) Q(t) \bar{x}(t) + u^2(t) r(t) \} dt \quad (10)
\end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= x(t) - x_d, \quad x_d \in \mathcal{S} \\
x_1 &\leq x_l \quad (11)
\end{aligned}$$

ただし、(1) 式で記述されるシステムの初期状態は

$x_0 \in \mathcal{S}$ とし、 $x_{10} < x_{1d}$ 、 $x_0 = [x_{10} : x_{20}^T]^T$ 、 $x_d = [x_{1d} : x_{2d}^T]^T$ とする。

問題 1 において、 $x_1 \leq x_l$ なる拘束が存在しているので、初期状態 x_d より目標状態 x_d へ任意の時間で起動することはできない。たとえば (1) 式で記述される $n=2$ のシステムにおいて、ある平衡状態 x_0 より他の平衡状態 x_d (ただし、 $x_{1d} > x_{10}$) へ起動するとき、 $x_1 \leq x_l$ なる状態拘束条件がある場合には起動に少なくとも

$$t_m = a_{22}^{-1} \ln \left(\frac{x_l - x_{1d}}{x_l - x_{10}} \right) \quad (12)$$

時間必要となる ((12) 式の導出は付録に示す)。このとき、 t_m を最短起動時間と呼ぶことにする。問題 1 における制御時間 t_f が t_m よりも大きいならば、問題 1 の不等式拘束条件付最適化問題を解くことにより最適解を得ることになるが、これは非常に難しく容易に解くことはできない。また、 t_f が t_m よりも小さいという保証は一般になく、もし t_f が t_m よりも小さいならば、問題 1 の設定自体が無意味になる。そこで、この点を解消するために、状態変数のうち 1 変数のみに注目し、制御時間 t_f にその制御量を起動させ、 t_f 時刻以後にシステムの安定性を保証すること、すなわち状態を平衡状態 x_d へ漸近的に近づけることを考える。これは原子炉の場合、中性子密度のみを目標値にしたいという要請とシステムを安定にしたいという要請に基づいている。

本章では、最適起動問題を設定し、最短起動時間を計算することにより問題設定の妥当性について考察した。次章では、この考察に基づき、システムの特徴を利用した問題の再設定を行なう。

4. 安定化と安定化制御

4.1. 安定化

問題を再設定する前に、システムの安定化について議論する。

【定義 2】 (1) 式で記述されるシステムに対して、 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ に初期状態をとるとき、

$$\phi(t, x_0, u, t_0) \rightarrow x_e, \quad t \rightarrow \infty \quad (13)$$

なる条件を満たす入力が存在するならば、状態 x_0 は x_e に安定化可能であるという。ここに、 $x_e \in \mathcal{S}$ である。

(1) 式で記述されるシステムに対して、次の入力に

より状態 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_1$ は $\mathbf{x}_e \in \mathcal{E}$ に安定化可能である。
ここに、 $\mathcal{R}_1$ は $\mathcal{R}_1 = \{\mathbf{x} | \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{1e}\}$, $\mathbf{x}_e = [\mathbf{x}_{1e} | \mathbf{x}_{2e}]^T$ である。

《定理2》 (1) 式で記述されるシステムに対し、 $\mathbf{x}_1$ を一定とする入力は、

$$u_c = -(a_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{x}_2) / b x_{1e} \quad (14)$$

であり、この入力をシステムに加えるとき、

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_e, \quad t \rightarrow \infty \quad (15)$$

$$u_c(t) \rightarrow u_e, \quad t \rightarrow \infty \quad (16)$$

となる。ここに、 $\mathbf{x}_e \in \mathcal{E}$, u_e は (4') 式で与えられる入力である。

(証明) $\mathbf{x}_1$ を一定とする入力は (1) 式で $\dot{\mathbf{x}}_1 = 0$ とおくことにより、(14) 式で与えられる。この入力を (1) 式に代入すると次のようになる。

$$\mathbf{x}_1(t) = \text{const.} \triangleq \mathbf{x}_{10} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t) &= e^{A_{22}t} \mathbf{x}_2(0) + \int_0^t e^{A_{22}(t-\tau)} \mathbf{a}_{21} \mathbf{x}_1(\tau) d\tau \\ &= e^{A_{22}t} \mathbf{x}_2(0) - A_{22}^{-1} (I_n - e^{A_{22}t}) \mathbf{a}_{21} \mathbf{x}_{10} \quad (18) \end{aligned}$$

A_{22} が安定行列であることにより、(18) 式から次式を得る。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_2(t) = -A_{22}^{-1} \mathbf{a}_{21} \mathbf{x}_{10} \quad (19)$$

(17) 式と (19) 式より、

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_e, \quad t \rightarrow \infty, \quad \mathbf{x}_e \in \mathcal{E} \quad (20)$$

となる。また、(14) 式へ (17) 式と (18) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} u_c(t) &= -[a_{11} \mathbf{x}_{10} + \mathbf{a}_{12}^T \{e^{A_{22}t} \mathbf{x}_2(0) \\ &\quad - A_{22}^{-1} (I_n - e^{A_{22}t}) \mathbf{a}_{21} \mathbf{x}_{10}\}] \quad (21) \end{aligned}$$

A_{22} が安定行列であることにより、(22) 式から次式を得る。

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} u_c(t) &= -(a_{11} \mathbf{x}_{10} - \mathbf{a}_{12}^T A_{22}^{-1} \mathbf{a}_{21} \mathbf{x}_{10}) / b x_{10} \\ &= -(\det A) / b (\det A_{22}) \\ &= u_e \quad (22) \end{aligned}$$

したがって、

$$u_c(t) \rightarrow u_e, \quad t \rightarrow \infty \quad (23)$$

となる。(証明終)

さらに、(1) 式で記述されるシステムに対して、次の入力により任意の状態 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_1^*$ は $\mathbf{x}_e \in \mathcal{E}$ に安定化可能である。

《定理3》 (1) 式で記述されるシステムに対し

て、任意の状態 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_1^*$ は

$$u_s(t) = -[a_{11} \mathbf{x}_{1e} + \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{x}_2(t)] / b x_{1e} \quad (24)$$

なる入力を加えるとき、

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_e, \quad t \rightarrow \infty \quad (25)$$

$$u_s(t) \rightarrow u_e, \quad t \rightarrow \infty \quad (26)$$

となる。ここに、 $\mathbf{x}_e \in \mathcal{E}$, $\mathbf{x}_e = [\mathbf{x}_{1e} | \mathbf{x}_{2e}]^T$ である。

(証明) (1) 式と (24) 式より次式を得る。

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = (a_{11} + b u_s)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1e}) \quad (27)$$

いま、

$$\bar{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_{1e} \quad (28)$$

とおけば、 $\bar{\mathbf{x}}_1(t)$ は次式で表わされる。

$$\bar{\mathbf{x}}_1(t) = \exp \left[\int_0^t (a_{11} + b u_s(\tau)) d\tau \right] \bar{\mathbf{x}}_1(0) \quad (29)$$

ところで、(24) 式と $(\mathbf{a}_{12}^T \mathbf{x}_2(t)) > 0$, $\mathbf{x}_{1e} > 0$ より次式を得る。

$$a_{11} + b u_s(t) = -\mathbf{a}_{12}^T \mathbf{x}_2(t) / \mathbf{x}_{1e} < 0 \quad (30)$$

したがって、(29) 式と (30) 式より次式を得る。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{x}}_1(t) = 0 \quad (31)$$

すなわち、

$$\mathbf{x}_1(t) \rightarrow \mathbf{x}_{1e}, \quad t \rightarrow \infty \quad (32)$$

このとき、

$$\mathbf{x}_2(t) \rightarrow \mathbf{x}_{2e}, \quad t \rightarrow \infty \quad (33)$$

$$u_s(t) \rightarrow u_e, \quad t \rightarrow \infty \quad (34)$$

となることは (1) 式と (24) 式より明らかである。

(証明終)

4.2. 安定化制御

前節で考察したシステムの特性を利用し、問題の再設定を行なう。前章で説明したように、起動を2ステップで行ない、前半で最適化、後半で安定化を考え、次のように問題を設定する。

[問題2] (1) 式で記述されるシステム方程式を動的拘束として、次の2次形式評価を最小とする操作量 $u(t)$, $t \in [0, \infty]$ を決定する。

$$J = J_1 + J_2 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}^T(t_f) S_1 \bar{\mathbf{x}}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ \bar{\mathbf{x}}^T(\tau) Q_1(\tau) \bar{\mathbf{x}}(\tau) \\ &\quad + u^2(\tau) r(\tau) \} d\tau \quad (36) \end{aligned}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{t_f}^{\infty} \{ \bar{x}^T(\tau) Q_2 \bar{x}(\tau) + \bar{u}^2(\tau) r(\tau) \} d\tau \quad (37)$$

ここに,

$$Q_1 = \left\{ \begin{array}{c|c} q_1 & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o} & \mathbf{O} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ n-1 \end{array}, \quad Q_2 = \left\{ \begin{array}{c|c} q_2 & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o} & \mathbf{O} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ n-1 \end{array}$$

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{c|c} s & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o} & \mathbf{O} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ n-1 \end{array}$$

$$\bar{x}(t) = x(t) - x_d, \quad \bar{u}(t) = u(t) - u_s(t),$$

$$x_d \in \mathcal{G}$$

$u_s(t)$ は (24) 式で $x_e = x_d$ として与えられる入力である。また, (1) 式のシステムの初期状態 x_0 は $x_0 \in \mathcal{G}$ とする。

次に, 問題 2 で得られる最適軌道 $x^*(t)$ は $x_d \in \mathcal{G}$ に安定化されることを示す。

《定理 4》 (1) 式で記述されるシステムに対して, (37) 式の J_2 を最小とする入力により任意の初期状態 $x_s \in \mathbb{R}_+^n$ は $x_d \in \mathcal{G}$ に安定化可能である。

(証明) J_2 を最小とする最適軌道を $x^*(t)$ と表わすことにする。いま, $x^*(\infty) = x_d$ と仮定する。このときの評価値 J_2^* は非有界である。ところで, (1) 式より有限時間 t_g で x_1 を x_{1d} にする有界な入力が存在することは明らかである。このときの t_g 時刻の状態を x_g とする。定理 2 より状態 x_g は (14) 式の $u_c(t)$ で x_d に安定化可能である。また, このとき $u_s(t) = u_c(t)$ ($t \geq t_g$) となる。この x_s から x_g を経由して x_d へ漸近的に近づく軌道の評価値 J_2' は次のようになる。

$$\begin{aligned} J_2' &= \frac{1}{2} \int_{t_f}^{\infty} \{ \bar{x}^T(\tau) Q_2(\tau) \bar{x}(\tau) + \bar{u}^2(\tau) r(\tau) \} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_f}^{t_g} \{ \bar{x}^T(\tau) Q_2(\tau) \bar{x}(\tau) + \bar{u}^2(\tau) r(\tau) \} d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_g}^{\infty} \{ \bar{x}^T(\tau) Q_2(\tau) \bar{x}(\tau) + \bar{u}^2(\tau) r(\tau) \} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_f}^{t_g} \{ \bar{x}^T(\tau) Q_2(\tau) \bar{x}(\tau) + \bar{u}^2(\tau) r(\tau) \} d\tau \\ &< \infty \end{aligned}$$

ゆえに, $J_2^* > J_2'$ となり仮定に反する。したがって, 最適軌道 $x^*(t)$ は

$$x^*(t) \rightarrow x_d, \quad t \rightarrow \infty \quad (38)$$

となる。 (証明終)

定理 4 より次の系が得られる。

[系] 問題 2 の最適軌道 $x^*(t)$ は

$$x^*(t) \rightarrow x_d, \quad t \rightarrow \infty \quad (39)$$

となる。

(証明) 最適性の原理と定理 4 より明らかである。 (証明終)

系により問題 2 の最適軌道は目標値 x_d に漸近的に近づくことが示された。すなわち, 問題 2 で得られる最適制御入力はシステムの安定化を考慮した制御入力ということができる。なお, t_f 以後の安定化において, 定理 3 の入力 (24) 式を用いることもできるが, ここでは安定化と最適化の両点を考慮しているので, (24) 式の入力より望ましい入力を得ることができる。

また, 問題 2 の最適軌道 $x^*(t) = [x_1^*; x_2^{*T}]^T$ は $x_1^*(t) \leq x_{1d} < x_1$, $t \in [0, \infty]$ を満足することは明らかである。

本章では (1) 式のシステムに対して安定化可能にする入力について考察し, それを利用した問題設定を行った。また, その問題の最適軌道が目標値に漸近的に近づくことを示した。

5. 計算機シミュレーション

本章では問題 2 の解法および計算機シミュレーションの結果を示す。双線形レギュレータ問題の解析解は得られないので, ここでは次のような準最適解を得る。まず, 問題 2 は最適性の原理より次式のように最小化が行なわれる。

$$\min_{u(t), t \in [0, \infty]} J = \min_{u(t), t \in [0, t_f]} \{ J_1 + \min_{u(t), t \in [t_f, \infty]} J_2 \} \quad (40)$$

ところが, J_1 に t_f 時刻の評価が入っているため, 一般に $J_1 \gg J_2$ と仮定でき, 最小化を次のように行なっても差支えないと考えられる。

$$\min_{u(t), t \in [0, \infty]} J = \min_{u(t), t \in [0, t_f]} J_1 + \min_{u(t), t \in [t_f, \infty]} J_2 \quad (41)$$

さらに, 各段における最適入力 $u^*(t)$ はあるノミナル制御を用いた摂動制御により, 準最適解として得ることにする。

$n=2$ のときのシミュレーション結果を示す。各パ

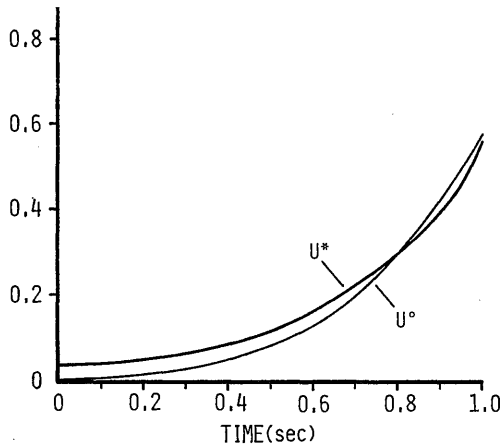


Fig. 1 Sub-Optimal Control in the 1st Step.

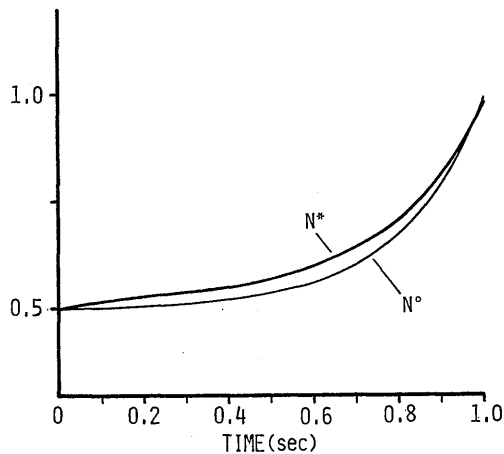


Fig. 2 Sub-Optimal Trajectories of N in the 1st Step.

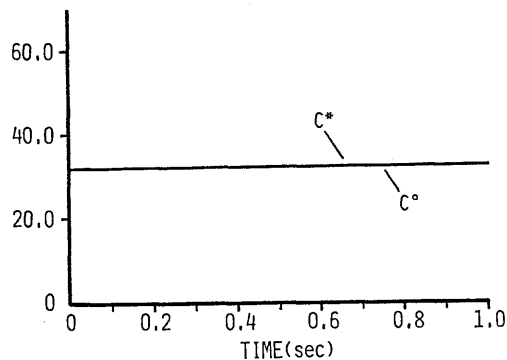


Fig. 3 Sub-Optimal Trajectories of C in the 1st Step.

ラメータの値は $\beta=6.4 \times 10^{-3}$, $\lambda=0.1[\text{sec}^{-1}]$, $l=10^{-3}[\text{sec}]$ に設定し, 初期状態値 $\mathbf{x}_0=[0.5 \ 32.0]^T$ から目標状態値 $\mathbf{x}_d=[1.0 \ 64.0]^T$ への起動問題とした。ここに, $t_f=1.0[\text{sec}]$ とし, t_f 以後の無限時間レギュレータ問題は十分長いとみなせる時間 $t_c=10.0[\text{sec}]$ で打ち切った。また, 評価の重みは $q_1=0$, $r_1(t)=e^{1.4t}$, $s_1=10^{-3}$, $q_2=10^{-7}$, $r_2=10^{-4}$, $s_2=10^{-5}$ としている。ノミナル制御としては前段および後段にそれぞれ Sage の手法⁶⁾, 定理3で得られた $u_s(t)$ を用いた。

Fig. 1, Fig. 2 および Fig. 3 に前段のノミナル制御 u^0 , ノミナル軌道 $\mathbf{x}^0$, 本手法で得られた準最適制御 u^* , 準最適軌道 $\mathbf{x}^*$ を示した。同様に, Fig. 4, Fig. 5 および Fig. 6 に後段のそれぞれの値を示し

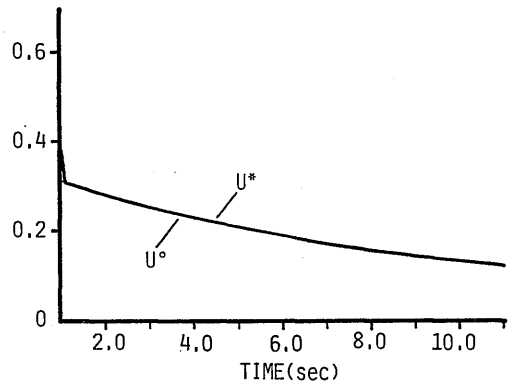


Fig. 4 Sub-Optimal Control in the 2nd Step.

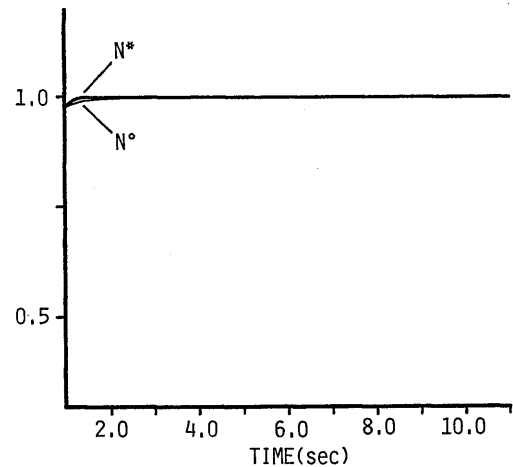


Fig. 5 Sub-Optimal Trajectories of N in the 2nd Step.

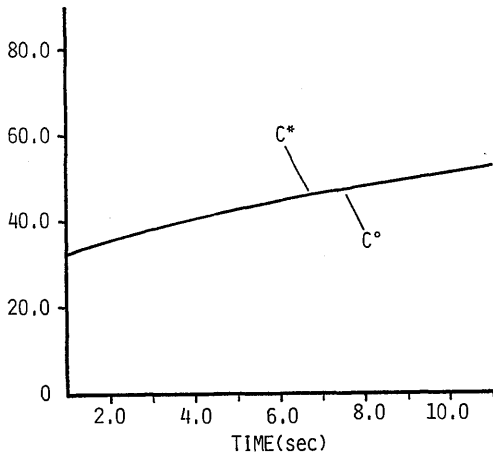


Fig. 6 Sub-Optimal Trajectories of C in the 2nd Step.

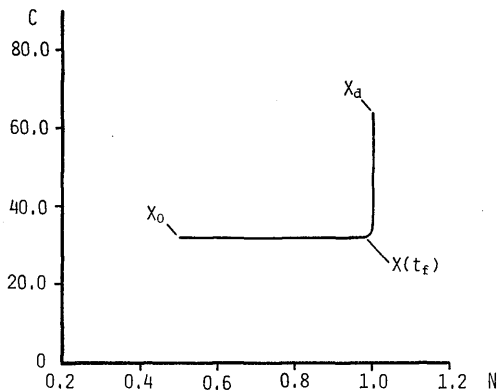


Fig. 7 Sub-Optimal State Trajectories.

た。また、Fig. 7 にこのときの状態軌道を示した。この結果から前段で中性子密度に対して十分に満足できる起動が得られ、後段で状態が目標値 x_d に漸近的に近づくことが確かめられた。なお、前段での評価値はノミナル制御に対して 5%改善され、後段では 65%改善されている。しかし、評価の絶対値は前段の方がはるかに大きい。

また、(12) 式の t_m を計算すると、たとえば $x_1 = 2.0$ のとき $t_m = 4.05[\text{sec}]$ となる。したがって、この問題の設定では問題 1 は無効であることがわかる。もし、目標値 $x_d \sim t_f = 1.0[\text{sec}]$ で到達するためには $x_1 > 5.76$ でなければならない。これは現実では不経済であると考えられる。一方、本手法ではこのような問題に対しても十分有効であることが確かめられた。

6. あとがき

双線形システムの重要な型の 1 つである 1 点近似原子炉モデルを対象として、その最適起動問題を双線形レギュレータの観点から定式化し、その 1 解法を与えた。提案した手法は、起動問題に付随する状態拘束条件と安定化条件を同時に満足するもので、前半で、制御量（中性子密度）のみを評価し、後半で、さらに安定化をはかるといった 2 つのステップからなるものであった。また、本手法の有効性については、計算機シミュレーションにより確かめた。なお、5 章で述べたノミナル制御値の有効な計算手法の開発は今後の問題として残されている。

参 考 文 献

- 1) 森, 桑原: 双線形システムの安定化可能領域に関する考察, 電気学会論文誌, **99c**, 257/264 (1979).
- 2) I. Derese and E. Noldus: Design of Linear Feedback Laws for Bilinear Systems, Int. J. Control, **31**, 219/237 (1980).
- 3) R. R. Mohler: Bilinear Control Process, Academic Press (1973).
- 4) K. C. Wei and A. E. Pearson: On Minimum Energy Control of Commutative Bilinear Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-23**, 1020/1023 (1978).
- 5) R. R. Mohler: Bilinear Systems in Theory and Applications, Preprints JACC, 1/6 (1979).
- 6) A. P. Sage: Optimum Systems Control, Prentice-Hall, Inc. (1968).
- 7) 古田: 線形システム制御理論, 昭晃堂(1973).

《付 録》

((12) 式の導出) (1) 式で記述される $n=2$ のシステムを次の記号を用いて表わす。

$$\dot{x} = Ax + Bux, \quad x(0) = x_0, \quad x \in R^2, \quad u \in R^1 \quad (\text{付 1})$$

ここに,

$$x = [x_1 \quad x_2]^T = [N \quad C]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \lambda \\ \alpha & -\lambda \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_0 より x_d へ起動させるときに要する時間は x_0 を含む領域 $\mathcal{D}_0$ より x_d を含む領域 $\mathcal{D}_d$ へ移動させるときの最短時間より長いまたは等しい。したがって、

$\mathcal{S}_0 = \{x | x_2 = x_{20}\}$, $\mathcal{S}_d = \{x | x_2 = x_{2d}\}$ とし, 次の最短時間制御問題を考える.

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \quad x_2(0) = x_{2d} \quad (\text{付 2})$$

に対して x_1 を入力とみなし,

$$J = \int_0^{t_m} dt \quad (t_m: \text{free}) \quad (\text{付 3})$$

なる評価を最小とする $x_1(t)$ にみつける. ただし, 起動問題を考えているため, $x_{10} \leq x_1(t) \leq x_1$, $(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \geq 0$ とする.

この問題を最大原理により解く. ハミルトニアンは

$$H(t) = 1 + \psi(t)\{a_{22}x_2(t) + a_{21}x_1(t)\} \quad (\text{付 4})$$

ここに,

$$\dot{\psi} = a_{22}\psi \quad (\text{付 5})$$

である. (付4) 式を最小とする x_1 は次式で与えられる.

$$x_1^*(t) = \begin{cases} x_1 & (\psi(t)a_{21} < 0) \\ x_{10} & (\psi(t)a_{21} > 0) \end{cases} \quad (\text{付 6})$$

(付5) 式より $\psi(t)$ は次式となる.

$$\psi(t) = e^{a_{22}t}\psi(0) \quad (\text{付 7})$$

また, 一般化境界条件より次式を得る.

$$H(t_m) = 1 + \psi(t_m)\{a_{22}x_2(t_m) + a_{21}x_1(t_m)\} \quad (\text{付 8})$$

(付8) 式より次式が得られる.

$$\psi(t_m) = -\{a_{22}x_2(t_m) + a_{21}x_1(t_m)\}^{-1} \leq 0 \quad (\text{付 9})$$

(付7) 式と (付9) 式より

$$\begin{aligned} \psi(t) = & -e^{a_{22}(t-t_m)}\{a_{22}x_2(t_m) \\ & + a_{21}x_1(t_m)\}^{-1} \leq 0, \quad t \in [0, t_m] \end{aligned} \quad (\text{付 10})$$

ゆえに, $a_{21} > 0$, (付10) 式および (付6) 式より, 最適解 $x_1^*(t)$ は次式となる.

$$x_1^*(t) = x_1, \quad t \in [0, t_m] \quad (\text{付 11})$$

このときの t_m を求める. まず, (付2) より

$$\begin{aligned} x_2(t_m) = & e^{a_{22}t_m}x_{20} + \int_0^{t_m} e^{a_{22}(t_m-\tau)} a_{21}x_1^*(\tau) d\tau \\ = & e^{a_{22}t_m}x_{20} + \int_0^{t_m} e^{a_{22}(t_m-\tau)} a_{21}x_1 d\tau \\ = & e^{a_{22}t_m}x_{20} + (e^{a_{22}t_m} - 1)a_{22}^{-1}a_{21}x_1 \end{aligned} \quad (\text{付 12})$$

ところで,

$$a_{21}x_{10} + a_{22}x_{20} = 0, \quad a_{21}x_{1d} + a_{22}x_{2d} = 0 \quad (\text{付 13})$$

また, 終端条件より

$$x_2(t_m) = x_{2d} \quad (\text{付 14})$$

(付12) 式, (付13) 式および (付14) 式より

$$\begin{aligned} t_m = & a_{22}^{-1} \ln \left(\frac{a_{22}a_{22}^{-1}x_{2d} + x_1}{a_{22}a_{21}^{-1}x_{20} + x_1} \right) \\ = & a_{22}^{-1} \ln \left(\frac{x_1 - x_{1d}}{x_1 - x_{1s}} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

(導出終)