K41の乱流理論に関連したスケーリング指数関係式およびそれの間欠性モデルへの適用

上之, 和人
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

https://doi.org/10.15017/17474

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 20 (3), pp.295-301, 1998-12-01. Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

九州大学大学院総合理工学研究科報告
第20巻 第3号 295-301頁 平成10年12月

Engineering Sciences Reports, Kyushu University
(KYUSHU DAIGAKU SOGORIKOGAKU KENKYUKA HOKOKU)
Vol. 20, No. 3 pp. 295-301 DEC. 1998

K41の乱流理論に関連したスケーリング指数関係式およびそれの間欠性モデルへの適用

上之和人

(平成10年9月4日 受理)

Scaling Exponent Relations Associated with K41 Theory of Turbulence and Its Application to the Intermittency Models

Kazuto UENO *

In the statistical continuum limit, comparing the asymptotic scaling form of critical phenomena and that of turbulence, it is found that the scaling relation $\gamma = (2-\eta)\nu$ in critical phenomena is also satisfied in Kolmogorov's 1941 theory of turbulence, and applying the scaling relation to the β model, intermittent correction to each exponent is obtained in terms of the codimension d_c-expansion which is analogous to the ϵ-expansion in critical phenomena.

1. 緒　　　言

一般に大きくかけ離れたスケールによって特徴づけられる出来事は，お互いにほとんど干渉し合うことはなく，各々のスケールに関係した現象は独立に扱われることが多い．ところが，多くのスケールの出来事が同等の寄与をなす一連の現象が存在する．このカテゴリーに入るものとして，場の量子論や臨界現象などの問題が挙げられる．これらの問題で最も重要な概念は統計的連続極限[1]であり，それは特徴的なスケールが存在しないということで特徴づけられる．統計的連続極限では，すべてのスケールでの揺らぎがお互いに結合し合い，ある過程へ同等の寄与をする．流体乱流は非常に散逸的であり，自由度間にエネルギーの流れがある．すべての長さスケール，時間スケールは同等の重要性があるとみなされ，しかも高 Reynolds 数の場合には多くのそのようなスケールが存在する．少なくともこの点に関していえば，完全に発達した乱流の問題は，場の量子論や臨界現象の問題と共通したところがあるように思われる．繰り込み群は，そのような多くの長さスケールあるいは時間スケールでの揺らぎが重要である問題を扱う一般的な計算スキームである[1]．

Yakhot と Orszag は，外力項を持つ Navier-Stokes 方程式に Wilson 流の繰り込み群の方法を適用し，ϵ 展開の技法を使って，慣性小領域における渦粘性のスペクトル，Kolmogorov の $-5/3$乗のエネルギースペクトル，Kolmogorov 定数などの値を得た[2]．しかし，彼らによって得られた理論的な値と実験との数値的一致は根拠のないものに思われる．Kolmogorov 定数の値を見積もる際には $\epsilon=0$ を使い，$-5/3$乗のエネルギースペクトルを導く際には $\epsilon=4$ を使うなどして，計算上首尾一貫性に欠けるからである．また，統計的に明確に定義された外力項を持つ Navier-Stokes 方程式に採用した摂動スキームに対する非摂動の状態と，我々が実際に興味を持っている状態とは定性的に異なった性質を持っているからである．物理の他の分野で繰り込み群を適用してうまくいったものは，関心を持っている実際の物理状態に定性的に似た状態から出発してきた．例えば，場の量子論の問題では自由場，臨界現象の問題では平均場を基本場とみなし，最初に裸の質量や結合定数を持つ相互作用のない Green 関数を考えた．その次に，輻射補正や中間揺らぎなどの相互作用の効果をそれからの摂動としてその裸の質量や結合定数に繰り込み，その繰り込まれた Green 関数の漸近形を調べることによって実際の観測量としての散乱断面積や崩壊率や応答関数などを評価した．ところが，高 Reynolds 数での Navier-Stokes 方程式になると，まず非摂動状態としての基本場が何であるのかさえはっきりしていない．今までのどの乱流理論も Navier-Stokes 方程式の非線形項を無視した統計的に処理しやすい外力項を持った拡散方程式を非摂動状態の出発点にしている[3]．それからの摂動として非線形項の前に λ いう形式的パラメーターを導入して λ のべきで展開しているが，十分に発達した乱流状態では λ が小さいという保証はどこにもない．量子電磁力学における微細構造定数 $\alpha=1/137$ や，臨界現象における $\epsilon=4-d$ などのように摂動展開に必要な小さなパ

*大気海洋環境システム学専攻博士課程
紹介者：及川正行　応用力学研究所，大気海洋環境システム学専攻

Table 1　Analogies between scaling in quantum field theory, critical phenomena and turbulence

Quantum field theory	**Critical phenomena**	**Turbulence**
	microscopic characteristic length	
Compton wavelength of heavy particle	lattice spacing	Kolmogorov dissipation length
$\lambda_M = \dfrac{\hbar}{Mc}$	a	$\eta_d = \left(\dfrac{\nu^3{}_{mol}}{\bar{\epsilon}}\right)^{1/4}$
	macroscopic characteristic length	
Compton wavelength of light particle	correlation length	integral length
$\lambda_m = \lambda_M \dfrac{M}{m}$	$\xi = a\tau^{-1/2}$	$l = \eta_d Re^{3/4}$
	dimensionless parameter	
mass ratio	reduced temperature	Reynolds number
$\dfrac{m}{M}$	$\tau = \dfrac{T - T_c}{T_c}$	Re
	statistical continuum limit	
$\dfrac{\lambda_M}{\lambda_m} \ll 1 \left(\dfrac{m}{M} \to 0\right)$	$\dfrac{a}{\xi} \ll 1 \left(\tau \to 0\right)$	$\dfrac{\eta_d}{l} \ll 1 \left(Re \to \infty\right)$
	correlation function or structure function	
vacuum expectation value of a product of two field operators	two point spin correlation function	second order velocity structure function
$\langle 0 \| T\{\phi(x)\phi(y)\} \| 0\rangle$	$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \langle \{S(\boldsymbol{x}) - \langle S(\boldsymbol{x})\rangle\}\{S(\boldsymbol{x}') - \langle S(\boldsymbol{x}')\rangle\}\rangle$	$D(r) = \langle [\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})]^2\rangle$
$\lambda_m \ll r$	$\xi \ll r$	$l \ll r$
$\Delta(r) = \dfrac{e^{-r/\lambda_m}}{4\pi r}$	$G(r) = \dfrac{K_B T e^{-r/\xi}}{4\pi r}$	$D(r) = 16\pi(\bar{\epsilon} l)^{2/3} F_1\left(\dfrac{r}{l}\right)$
$\lambda_M \ll r \ll \lambda_m$	$a \ll r \ll \xi$	$\eta_d \ll r \ll l$
$\Delta(r) = \dfrac{1}{4\pi r}$	$G(r) = \dfrac{K_B T}{4\pi r}$	$D(r) \approx 16\pi C_1(\bar{\epsilon} r)^{2/3}$

ラメーターが存在しないこと自体が，摂動的繰り込み群を用いた首尾一貫した乱流理論が出来ないでいる原因になっている．Yakhot と Orszag は，繰り込み群理論を使って Kolmogorov の－5/3乗のエネルギースペクトルを導いたが，この－5/3という値は普通の次元解析からも得られるのに，なぜ敢えて繰り込み群理論を使わないといけないのかという疑問が生まれる．そもそも繰り込み群理論は，場の量子論や臨界現象において，普通の次元解析では説明のできない異常次元や異常指数を説明するためのものであった．もし乱流においても繰り込み群理論が使われるのなら，－5/3からの指数のずれを説明できるものでなければならない．ここでは，外力項を持つ拡散方程式を非摂動状態とみなす立場をとらずに，Kolmogorov の－5/3乗のエネルギースペクトルが波数空間の広い範囲にわたってすでにできている状態を基本場とみなす立場をとる．そしてその状態からの指数のずれを説明するために，λ という形式的パラメーターの代わりに余次元 d_c というパラメーターを導入する．このような立場をとると臨界現象での ϵ 展開との対応がついて見通しがよくなり，乱流においては余次元 d_c を摂動パラメーターに選んでもいいかもしれない．

この論文は次のように構成されている．第2節では，場の量子論，臨界現象，乱流でのそれぞれの問題に対してミクロとマクロの特徴的な長さを定義する．その各々の場合に対して，これらふたつの特徴的な長さの間の中間的な揺らぎをコントロールするパラメーターを同定する．それぞれの問題での相関関数あるいは構造関数の漸近形が，ふたつの異なった領域で **Table 1** に整理してある．第3節では，特に臨界現象と乱流の漸近的スケーリング形を比較することによって，両方に当てはまるスケーリング関係式のそれぞれの指数の値を求める．次に乱流の間欠性モデルのひとつである β モデルにそのスケーリング関係式を適用して Kolmogorov の1941年（今後 K41 と呼ぶことにする）の乱流理論からの指数のずれを議論する．第4節では結

論と今後の課題を述べる．

2. 特徴的な長さと統計的連続極限

まず，**Table 1** に整理してあることを簡単に解説しよう．場の量子論においてふたつの特徴的な長さとしては，重い粒子の Compton 波長 λ_M と軽い粒子の Compton 波長 λ_m が考えられる．場の量子論の本質的な点のひとつは局所性にある．すなわち，異なった時空点における場は，独立な量子揺らぎをもつ独立な自由度である．局所理論のため，そこにある運動量を持つ決まったカットオフは存在せず，仮想量子という形で任意の高運動量を持つ任意の短い距離スケールでの量子揺らぎが Feynman ダイアグラムに現れる[4]．局所理論のため，決まった物理的なカットオフは存在しないのだが，ここでは質量 M の重い粒子に関係した Compton 波長 $\lambda_M = \hbar/Mc$ を物理的なカットオフとして導入する．この場合統計的連続極限は，極限 $m/M \to 0$ を考えるときに起こり，そのとき，$\lambda_M/\lambda_m \ll 1$ となる．質量比 m/M は，任意の高運動量を持った仮想量子に伴う中間揺らぎをコントロールするパラメーターである．ここで極限 $m/M \to 0$ をとるにはふたつの可能性がある．ひとつは，軽い粒子の質量 m をゼロにもっていく極限，もうひとつは，重い粒子の質量 M を無限大にもっていく極限である．

臨界現象においてふたつの特徴的な長さとしては，格子間隔 a と相関長 ξ が考えられる．実際の磁性体は原子から構成されていて，格子間隔 a が物理的なカットオフを与え，揺らぎが起こりえる最小の距離である．温度が臨界温度から十分離れている限りでは，スピンの統計的揺らぎは原子スケールに制限されている．ところが臨界点近傍では，スピン場の相関長は格子間隔よりずっと長くなる[5]．この場合統計的連続極限は，換算温度 $\tau \to 0$ の極限を考えるときに起こり，そのとき，$a/\xi \ll 1$ となる．τ が中間揺らぎをコントロールするパラメーターである．極限 $\tau \to 0$ では，$\xi \to \infty$ となり，多くの格子サイトを含む領域がある．量子場理論でのカットオフスケール λ_M はいくらでも小さくとれるのと違って，格子間隔 a は固定されているので，極限 $a \to 0$ はとれない．

乱流においてふたつの特徴的な長さとしては，Kolmogorov の散逸長さ η_d と積分距離 l が考えられる．熱平衡から離れた統計的に定常な十分に発達した乱流を考える．またその乱流状態の小さなスケールの速度揺らぎは，統計的にほぼ一様で等方的だと仮定する．Kolmogorov の散逸長さ η_d はミクロな特徴的長さであり，重い粒子の Compton 波長 λ_M や格子間隔 a に対応するものである．一方，乱流での積分距離 l はマクロな特徴的長さであり，軽い粒子の Compton 波長 λ_m や相関長 ξ に対応するものである．この場合統計的連続極限は，Reynolds 数 $Re \to \infty$ の極限を考えるときに起こり，そのとき，$\eta_d/l \ll 1$ となる．量子場理論と同様に，極限 $Re \to \infty$ をとるにはふたつの可能性がある．ひとつは，Kolmogorov の散逸スケール $\eta_d \to 0$ の極限，もうひとつは，積分距離 $l \to \infty$ の極限である．後者の極限の存在は Kolmogorov の仮定でもある[6]．

Table 1 ではすべての問題を実空間は実空間どうし対応させている．これらの問題で共通した点は，$\lambda_m \ll r$, $\xi \ll r$, $l \ll r$ の領域では，相関関数あるいは構造関数はそれぞれひとつの特徴的な長さ λ_m, ξ, l を含んでいるということである．ところが，乱流の問題では，$l \ll r$ の領域で，$F_1\left(\frac{r}{l}\right)$ がどのように変化するかわからないので，決まった漸近的な関数形を書き下すことができない．一方，中間領域 $\lambda_M \ll r \ll \lambda_m$, $a \ll r \ll \xi$ では，2個の場の演算子積の真空期待値や2点のスピン相関関数の中には，特徴的な長さが含まれていないが，乱流では，2点の速度相関関数は領域 $\eta_d \ll r \ll l$ でさえ，特徴的な長さ l を含んでいる[7]．よってその代わりに2次の速度構造関数をあげている．**Table 1** のさらに詳しい説明は文献7に与えられている．

3. スケーリング指数関係式と β モデル

臨界点近傍では，自由エネルギーや感受率や他の熱力学的関数は温度と秩序変数に共役な場の一般化同時関数である．その結果，臨界指数のすべてが独立ではない．例えば指数の満たす関係式のひとつに $\gamma = (2-\eta)\nu$ がある[5]．ここで，γ, η, ν はそれぞれ感受率，相関関数，相関距離に関連した臨界指数である．Nelkin は，臨界現象の実空間でのスケーリング則と乱流の波数空間でのスケーリング則を対応づけて，臨界現象で知られていたスケーリング関係式 $\gamma = (2-\eta)\nu$ のそれぞれの指数 γ, ν, η の乱流に対するものを得た[8]．彼は粘性 ν_{mol} をゼロにもっていく極限が $T \to T_c$ の極限に対応するとみなし，指数 γ の値を得ている．しかし，その対応づけはあまりにも形式的すぎて，指数 γ に関係した物理量が明瞭ではない．また，理想流体を作るために粘性をゼロにもっていくことと，実際の流体で無限大の Reynolds 数の極限をとることは同等ではない．それゆえに，ここでは無次元パラメーターとして $\tau = (T - T_c)/T_c$ に対応するものとして Reynolds 数 Re を考える．無限大の Reynolds 数の極限は，温度を上から臨界温度に近づけるという見方をとる．

最初に，臨界指数が普通の次元解析から得られ，指数の値がすべて有理分数で与えられる場合を考える．

乱流での積分長さ

$$l=\eta_d Re^{\nu_t}, \tag{1}$$

は臨界現象での相関長

$$\xi=a\tau^{-\nu}, \tag{2}$$

に対応している．ここで，$\nu_t=3/4$，$\nu=1/2$である．
2点の速度相関関数

$$Q_{ij}(\boldsymbol{r})=\langle u_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})u_j(\boldsymbol{x})\rangle, \tag{3}$$

に現れる速度場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 自身は大きなスケールの運動によって支配され，すなわち，その領域は流れを駆動する力や境界条件に直接依存するから普遍的ではない．2点の速度相関関数は中間領域 $\eta_d\ll r\ll l$ でさえ普遍的な形をもっていないことをみた[7]．Sweeping という大きなスケールの運動の効果を取り除くことは，乱流での普遍性は速度場それ自身よりも速度差の統計で期待されるという Richardson の考えに基づいている．それでここでは，2点の速度相関関数の代わりに2次の速度構造関数

$$\langle[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})]^2\rangle\approx16\pi C_1(\bar{\epsilon}r)^{2/3} \tag{4}$$

$$=16\pi C_1\bar{\epsilon}r^{2/3}\frac{1}{r^{1+\eta_t}}, \tag{5}$$

が2点のスピン相関関数

$$G(r)=\frac{K_BT}{4\pi r^{1+\eta}}, \tag{6}$$

に直接対応するものとみなす．ここで，$\bar{\epsilon}$は平均散逸率，$\eta_t=-5/3$，$\eta=0$である．$\eta=0$の予言は，数学的に言えば，理論の中に入っている基本的関数が解析的で非特異な性質を持っていると仮定されていて，その関数は臨界点でも自由に微分でき，正の整数べきを持つ Taylor 級数に展開できるという結果であった．物理的に言えば，ずっと小さなスケールの揺らぎだけが重要な役割を果たし，大きなスケールの揺らぎを無視した結果である．そのような状況では，理論の基本的性質を変えることなく，揺らぎの効果は有効的なあるいは繰り込まれた質量や結合定数としてパラメーターの中に取り入れられることになる．次元 d が4より小さければ，異常指数 η はゼロでない値をとることが実験的にも知られている．したがって実際は，Landau理論で前提となっていた臨界点近傍での自由エネルギーの解析性や秩序変数に関する Taylor 展開は妥当でないことがわかる．3次元の Ising 普遍クラスで，実際に実験で測定された η の値は非常に小さいことが知られている．そのため後で述べる Gauss 型固定点のまわりの ϵ 展開のような摂動展開が可能であった[5]．ところが，上でみたように η_t は η に比べて極端に違う値をとっていることがわかる．もし $\eta_t=0$ ならば，速度差の確率分布は Gauss 分布になるが，$\eta_t=-5/3$ ということは，乱流は臨界現象とは比較にならないほどの強い非線形性のために，中間領域 $\eta_d\ll r\ll l$ での速度差の確率分布は Gauss 的性質から極端にかけ離れていることを示唆している．

静的感受率の和の規則から，$\widehat{G}(0)$ は波数に依存しない等温感受率 χ_T に等しい[5]．

$$\chi_T\equiv\lim_{k\to0}\widehat{G}(k)=\lim_{k\to0}\frac{K_BT}{k^2+\xi^{-2}} \tag{7}$$

$$=K_BT\xi^2 \tag{8}$$

$$\sim\tau^{-\gamma}. \tag{9}$$

ここで，$\xi\sim\tau^{-1/2}$ より，$\gamma=1$ である．同様に，乱流でも同じような物理量を定義する．

$$\chi_t\equiv\lim_{kl\to0}Q(k)=\lim_{kl\to0}\bar{\epsilon}^{2/3}l^{11/3}g(kl) \tag{10}$$

$$=C\bar{\epsilon}^{2/3}l^{11/3} \tag{11}$$

$$\sim Re^{\gamma_t}. \tag{12}$$

ここで，$kl\ll1$ のとき，漸近形 $g(kl)=C$ を仮定すると，$l\sim Re^{3/4}$ より，$\gamma_t=11/4$ である．もちろんこの領域は普遍的ではなく，異なった境界条件をもつ流れで異なっている．ところが，同じ境界条件をもつある流れでは，スペクトル密度の大きいスケールの部分の漸近形が $g(kl)=C$ をもつようなものを期待できるかもしれない．

これらの定式化において，ν，η，γ がそれぞれ ν_t，η_t，γ_t に対応していることは明らかである．2点の速度相関関数ではなく2次の速度構造関数のほうが2点のスピン相関関数に対応するとし，領域 $kl\ll1$ でのスペクトル密度に漸近形 $g(kl)=C$ を仮定すると，K41 の乱流理論は指数 $\nu_t=3/4$，$\eta_t=-5/3$，$\gamma_t=11/4$ をもつ固定点に対応していることがわかる．これらの指数の値もまた臨界現象で知られているスケーリング関係式 $\gamma=(2-\eta)\nu$ を満たしている[7]．臨界現象での Laudau の平均場理論とのアナロジーを強調するために，スケーリング関係式を

$$\gamma_t=(2-\eta_t)\nu_t \tag{13}$$

$$=(2-(-5/3-\zeta))\nu_t \tag{14}$$

$$=(11/3+\zeta)\nu_t, \tag{15}$$

の形に書き改めるほうがいい．ここで ζ は，K41で求められた $k^{-5/3}$ のエネルギースペクトルへの間欠性補正であり，実空間では2次の速度構造関数の $r^{2/3}$ からの指数のずれを表している．K41の乱流理論によると，$\zeta=0$ であり，それはちょうどLaudauの平均場理論での $\eta=0$ に対応していることがわかる．

次に指数の値が上で議論したような単純な次元解析からは得られない場合を考える．そのとき一般に指数の値は有理分数をとらない．実験で測定された実際の臨界指数の値は，平均場理論から予想されたものと異なっている．臨界現象では平均場理論が成り立つ限界の空間次元を4として，その4次元のまわりの展開として摂動パラメーター $\epsilon=4-d$ を導入したが，そのときの空間次元 d は変数とみなして非整数値をとるようにした．このように時空の次元もまた新しい自由度とみなす考えは，臨界現象では，ϵ 展開の技法で起こり[9]，場の量子論では，次元正則化法で起こった[10]．特に後者の方法は非可換ゲージ理論の繰り込み可能性の証明やこれら諸理論による高次の摂動計算を実行するとき有効な技法であることが確かめられている．3次元のIsing普遍クラスに，繰り込み群と $\epsilon=4-d$ 展開を併用した結果，$O(\epsilon)$ までで，

$$\nu=\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{12}, \tag{16}$$

$$\eta=0, \tag{17}$$

$$\gamma=1+\frac{\epsilon}{6}, \tag{18}$$

であることがわかっている[5]．η は，$O(\epsilon^2)$ ではじめてゼロでない値をとり，$\eta=\epsilon^2/54$ である．$\nu=1/2$，$\eta=0$，$\gamma=1$ は平均場理論の結果と同じであり，Gauss型固定点と呼ばれている．また ϵ の補正を受けたものは，Wilson-Fisher型固定点と呼ばれている．本来 $\epsilon\ll 1$ なのだが，3次元のIsing普遍クラスについて指数の数値を評価する際には，$d=3$ なので $\epsilon=1$ とおくと，$O(\epsilon)$ で，$\nu=0.583$，$\eta=0$，$\gamma=1.167$ となり，平均場理論の値よりも実験値に非常に近い値になっている．

同じようなアプローチを乱流にも試みると，乱流の場合は，$d_c=3-d_f$ とおく．3は3次元，d_f はフラクタル次元を表す．ここで d_c は余次元[11]と呼ばれていて，ϵ に対応するものとみなす．K41理論では $d_f=3$ であるから，$d_c=0$ となり補正の出る余地はない．これは $\epsilon=4-d$ において，$d=4$ のとき平均場理論が成り立つから $\epsilon=0$ となって補正はないことに対応する．間欠性の効果を取り入れてK41の現象論的モデルを修正する最も簡単なモデルが β モデルであった[12]．このモデルは慣性領域における量として速度差とエネルギー流束だけを使っている点はK41と変わらないが，カスケード過程で大きな渦が小さな渦に分裂するとき，小さな渦が占める体積はもとの体積に比べて β 倍 $(0<\beta<1)$ だけ順々に減少していくという点がK41とは違っていた．すなわち，小さな渦には活動的な渦とそうでない渦が混在しているということであった．K41では常に $\beta=1$ であるからすべて活動的な小さな渦で占められる．渦の回転時間と粘性散逸時間とを等しいとおくと，このモデルにおける散逸長さが得られる．

$$\eta_d=lRe^{-\frac{3}{1+d_f}}. \tag{19}$$

これを次のように変形する．

$$l=\eta_d Re^{\frac{3}{1+d_f}}. \tag{20}$$

これより間欠性による補正を取り入れると

$$\nu_t=\frac{3}{1+d_f}=\frac{3}{4}+\frac{3d_c}{16}, \tag{21}$$

となる．またこのモデルでは，p 次の速度構造関数は

$$\langle[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})]^p\rangle\sim\left(\frac{r}{l}\right)^{\zeta_p}, \tag{22}$$

であり，

$$\zeta_p=\frac{p}{3}+(3-d_f)\left(1-\frac{p}{3}\right), \tag{23}$$

で与えられることがわかっている．よって2次の速度構造関数は，$p=2$ とおいて

$$\langle[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})]^2\rangle\sim r^{\frac{5-d_f}{3}} \tag{24}$$

$$=\frac{1}{r^{1+\frac{d_f-8}{3}}}, \tag{25}$$

となる．したがって補正を取り入れると

$$\eta_t=\frac{d_f-8}{3}=-\frac{5}{3}-\frac{d_c}{3}, \tag{26}$$

となる．3次元のIsing普遍クラスでの実験値は，$\nu=0.625\pm0.010$，$\eta=0.016-0.06$，$\gamma=1.23-1.25$ である[5]．ところが，平均場理論からずれたこれらの指数の値もまた実験での避けられない不確定さの範囲内でスケーリング関係式 $\gamma=(2-\eta)\nu$ を満たしている．同様に ν_t と η_t の値がK41理論からずれていても，3つの指数は依然としてスケーリング関係式 $\gamma_t=(2-\eta_t)\nu_t$ を満たしているものと仮定すると，γ_t

の値も 11/4 からずれるのは自然であろう．このとき，$O(d_c)$ までで，

$$\gamma_t=\frac{11}{4}+\frac{15d_c}{16}, \tag{27}$$

となる．3/4，−5/3，11/4は ν_t，η_t，γ_t の K41 のときの指数の値である．

$$\eta_t=-\frac{5}{3}-\zeta \tag{28}$$

$$=-\frac{5}{3}-\frac{d_c}{3}, \tag{29}$$

より $d_c=3\zeta$ の関係が成り立つ．実験と理論の予言[13][14]では $\zeta=0.03$ であるので，$d_c=0.09$ を使うと，ν_t，η_t，γ_t の K41のときの指数の値への補正はそれぞれ，2.25%，1.80%，3.07%であって非常に小さなものであることがわかる．一方，3 次元の Ising 普遍クラスにおいて，臨界指数の平均場理論の値と実験値との食い違いは，ν については約25%，γ については約23%と大きなものであった．臨界現象では実際の臨界指数の値の平均場理論の値からのずれは，物理的に言えば，平均場理論で無視していた臨界点近傍での秩序変数の揺らぎの異常増大が原因であった．$\xi/a=\tau^{-\nu}$ において，実際の ν の値が1/2ではなく 0.625 に近いということは，格子間隔 a は固定されている量なので，変化するのは相関長 ξ のほうで，それが平均場の予想より大きくなり秩序変数に強い相関が生まれることを言っている．乱流では，$l/\eta_d=Re^{\nu_t}$ において，K41では $\nu_t=0.75$ であり，β モデルでは $\nu_t=0.767$ であるということは，β モデルのほうが K41 の予想よりも，積分距離 l が大きくなるか，あるいは散逸長さ η_d が小さくなることを言っている．大気海洋系のように最初から非常に大きなスケールを扱う現象では積分距離 l を大きくとることは可能であるが，3 次元中性流体乱流の場合は臨界現象とは違って，積分距離 l を自発的に大きくするようなミクロな物理的機構が存在しないので，β モデルでは散逸長さ η_d が K41 に比べて小さくなったとみるほうが自然である．このことは，K41 では η_d が粗視化された最小の長さだったが，β モデルでは η_d よりさらに小さい微細構造の揺らぎが現れることを意味している．実際に渦糸などの秩序が存在するという数値計算や実験による証拠がある[15]．K41 理論が正しく，慣性領域での運動がほぼ全体として無秩序であることを仮定すれば，$Re^{9/4}$ は 3 次元乱流での自由度の数を表している．β モデルのほうが ν_t の値が K41 よりも大きいので，自由度の数で言えば β モデルのほうが K41 よりも多いことがわかる．

4. 結　　論

臨界現象では，$\epsilon=4-d$ を平均場理論が成り立つ4次元のまわりの摂動パラメーターとしたように，乱流では，余次元 $d_c=3-d_f$ を K41 理論のまわりの摂動パラメーターとする見方ができた．平均場を基本場とみなしたように，K41 理論を基本場とみなす考えである．ところが，その摂動による K41 理論へのスケーリング指数の補正は，臨界現象における平均場理論への指数の補正に比べると非常に小さいことがわかった．臨界現象では，平均場理論で無視していた臨界点近傍での秩序変数の揺らぎが異常に増大し，平均場の予想より秩序変数の強い相関が生まれることが指数の値の大きなずれを引き起こす原因であった．乱流では，K41 理論への Landau の批判に対して，エネルギー散逸率の空間的揺らぎを K41 に取り込むことによって，K41 からのスケーリング指数の値のずれを説明する試みがなされてきた[11]．しかし，中性流体乱流ではエネルギー散逸率の揺らぎが，臨界点近傍における秩序変数の揺らぎと同じような意味で極端に異常性を示すような証拠はない．低エネルギー現象を説明する際に，場の量子論がカットオフに依存しない予言を与えるという考えや，臨界点近傍の統計的揺らぎの巨視的スケールの振る舞いが，系が磁性体，流体，合金であるかどうかには依存しないという普遍性の考えがある[1]．同じような考えは乱流についてもあてはまるであろう．実際に巨視的スケールでの乱流輸送を考える上で応用上重要なパラメーターとしての乱流拡散係数や乱流粘性などに，高波数領域の間欠的な散逸率の揺らぎの効果がどれほどの影響を与えるのか検討する必要がある．またここでは余次元 d_c を摂動パラメーターとみなして現象論的な議論に限ってきたが，K41 理論を基本場として Navier-Stokes 方程式に基づいた摂動的繰り込み群理論を作ることが望まれる．

参 考 文 献

1) K.G. Wilson, Rev. Mod. Phys., **47** (1975) 773.
2) V. Yakhot and S.A. Orszag, J. Sci. Comput., **1** (1986) 3.
3) W.D. McComb, "The Physics of Fluid Turbulence", (Clarendon, Oxford, 1990).
4) M.E. Peskin and D.V. Schroeder, "An Introduction to Quantum Field Theory", (Addison-Wesley, New York, 1995).
5) N. Goldenfeld, "Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group", (Addison-Wesley, New York, 1992).
6) A.N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **30** (1941) 301.
7) K. Ueno, J. Phys. Soc. Jpn., **67** (1998) 2729
8) M. Nelkin, Phys. Rev. A, **9** (1974) 388.

9) K.G. Wilson and M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett., **28** (1972) 240.
10) G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B, **44** (1972) 189.
11) U. Frisch, "Turbulence", (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
12) U. Frisch, P.L. Sulem and M. Nelkin, J. Fluid Mech., **87** (1978) 719.
13) F. Anselmet, Y. Gagne, E.J. Hopfinger and R.A. Antonia, J. Fluid Mech., **140** (1984) 63.
14) Z.S. She and E. Leveque, Phys. Rev. Lett., **72** (1994) 336.
15) Z.S. She, E. Jackson and S.A. Orszag, Proc. R. Soc. Lond. A, **434** (1991) 101.