

## Benard対流に対する希薄度の影響

結城, 和久  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

清水, 昭比古  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

<https://doi.org/10.15017/17428>

---

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 19 (1), pp.27-33, 1997-06-01. 九州大学大学院総合理工学研究科  
バージョン :  
権利関係 :

# Benard 対流に対する希薄度の影響

結城和久\*・清水昭比古\*\*

(平成9年2月28日 受理)

## Effect of a degree of rarefaction on Benard convection

Kazuhiya YUUKI\* and Akihiko SHIMIZU\*\*

The Benard convection in a rarefied gas was simulated by two dimensional DSMC (Direct Simulation Monte Carlo) method. The simulation was performed by using a virtual gravity with temperature jump effect as an external force acting on each sample molecule and the character and instability of convection was estimated for several Knudsen number  $Kn$ , which is a degree of rarefaction of the system, with temperature ratio  $T_h/T_c$  being varied. It is shown that higher temperature ratio is necessary to form the convection as  $Kn$  becomes large and that critical Rayleigh Number  $Ra_c$  may be independent of  $Kn$  while the existence of convection strongly depends upon  $Kn$ . In addition to critical Rayleigh number, it is predicted for a dilute system that there is a critical value of Knudsen number for the formation of convection.

### 1. 緒言

近年の真空技術の発達及びその応用分野の広がりと共に、真空物理学の重要性は益々高まっている。流れのコンダクタンスに関してはもちろんのこと、真空中いわゆる希薄気体系においては連続体理論では記述することのできない、例えば温度ジャンプ・速度スリップ<sup>1)</sup>、更には熱ほく流・熱応力すべり流<sup>2)</sup>などの希薄化効果に伴う現象が存在し、これらの現象は気体分子運動論の見地から解析する必要がある。これらは系の代表長さ $\lambda$ と分子の平均自由行程の比であるクヌッセン数 $Kn$ に強く依存し、特にすべり領域 ( $0.01 < Kn < 0.1$ )、もしくは遷移領域 ( $0.1 < Kn < 10$ ) に対して非常に顕著となるが、その領域では、分子間衝突に対して壁などの境界面の影響が無視できなくなるためその解析も又困難であり、現状では、数値シミュレーションに頼らざるを得ない。

ところで重力場中において水平層を下面から加熱、上面冷却するような体系では、温度差がある値を越えれば静熱伝導状態では力学的安定性を保つことができず、対流熱伝達状態に遷移することで安定性を保とうとする。つまり安定性が壊れ流れが誘起されると、下面で加熱された流体は上昇し、上面で冷却され下降流となりこの運動を繰り返すことで、Benard セルといわれる対流渦を形成する。この対流への遷移現象は流体力学的安定性問題として Rayleigh-Benard 不安定性 (Benard問題)<sup>3)</sup>といわれ、Benard の実験に始

まりその後 Rayleigh の線形安定性解析など数多くの実験及び数値解析が流体力学的見地からなされている。しかしながら、希薄気体系に対する解析は数少なく、特に対流渦特性及び遷移現象に対する希薄度の影響は明らかでない。真空機械、真空中実験などでは上述の様な温度勾配系が存在することも予測されるため、Benard 問題に対する希薄気体系安定性解析は非常に重要となる。本研究では希薄気体系に対し分子運動論的解析を行うために、Boltzmann 方程式に基づく解析手法である DSMC 法<sup>4)5)</sup>を用いることにより、Benard 問題の希薄度依存評価を行うことを目的とする。

### 2. 分子レベルでの Benard 問題解析

これまで、Benard 問題の DSMC 法などによる分子論的解析<sup>6)7)8)9)10)</sup>では、個々の分子に働く外力として通常の重力ではなく、系内の密度がほぼ一定となるように決定されたものが用いられ、Garcia ら<sup>6)7)</sup>によると以下の式で与えられる。

$$g = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \approx -\frac{k}{m} \frac{\Delta T}{L} \quad (2.1)$$

ここで  $k$ : Boltzmann 定数,  $m$ : 分子質量,  $\rho$ : 気体密度,  $\Delta T$ : 上下壁面温度差,  $L$ : 壁面間隔である。(2.1) 式は仮想重力といわれ温度勾配に依存し変化することがわかる。Landau & Lifshitz<sup>11)</sup>によると対流が誘起されない条件は温度勾配に対して、

$$\left| \frac{dT}{dy} \right| < \frac{gT}{c_p V} \left| \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right| \quad (2.2)$$

\*エネルギー変換工学専攻博士課程  
\*\*エネルギー変換工学専攻

で与えられるが、(2.1) 式と比較すると、温度勾配が大きくなり対流が誘起されやすくなるという状況を、(2.1) 式の仮想重力を大きくするというで模擬していることがわかる。又 Garcia らに対し Stefanov ら<sup>12)</sup>や青木ら<sup>13)</sup>は仮想重力を温度勾配によらず任意に変化させることで計算を行っている。

ところで希薄気体系では、先述のような希薄化効果により温度ジャンプが顕著となることが予想される。温度ジャンプとは、希薄度が増すに従い分子の平均自由行程が長くなるため、壁面温度の情報をもって壁で反射した分子が、その情報をあまり失うことなく反対壁方向へ移動するためにおこる現象で、この結果、壁面間温度勾配が実際の壁面温度差に基づくそれよりも減少する。(2.1) 式の仮想重力に対してこれを考慮し、温度ジャンプ効果による温度差を  $\Delta T'$  とすると、希薄系仮想重力は、

$$g = -\frac{k}{m} \frac{\Delta T'}{L} \quad (2.3)$$

で与えられる。一方、Benard 問題の特徴づけるレイリー数  $Ra$  に関しても同様に、(2.3) 式を用いると、

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu a} = \frac{256}{125\pi} \left( \frac{\Delta T \Delta T'}{T_0^2} \right) \left( \frac{1}{Kn} \right)^2 \quad (2.4)$$

で定義できる。ここで  $\beta$ : 体膨張率,  $a$ : 温度伝導率,  $\nu$ : 動粘性係数,  $T_0$ : 平均温度である。以上の式変形には Chapman-Enskog の第一次近似式<sup>5)14)</sup>を用いた。温度ジャンプ効果がさほど重要でない連続領域  $Kn < 0.01$  に対しては、(2.3) (2.4) 式中で  $\Delta T' = \Delta T$  とすることができる。

### 3. 計算体系及び計算過程

Fig. 1 に計算体系を示す。サンプル分子には剛体球分子モデルを用い、計算は 2 次元 DSMC 法により実行する。壁面  $Y=0$  を加熱高温面としその温度を  $T_h$ 、又壁面  $Y=YL$  を冷却低温面とし温度  $T_c$  とする。重力方向に  $-Y$  軸をとる。ここではアスペクト比  $XL/YL$  を 2 とした。これはすべり無し条件での線形

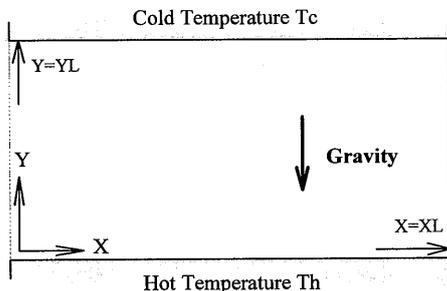


Fig. 1 Calculation region and coordinate

安定性解析で、不安定が最初に出る時の波長 2.016 に対応させるためである。又この条件下で、Benard 対流が起こり始めることを示す指標である臨界レイリー数  $Ra_c$  は 1707.8 で与えられる。

この計算体系で、現象をクヌッセン数  $Kn = \lambda/YL$ 、上下壁面温度比  $r = T_h/T_c$ 、アスペクト比  $As = XL/YL$ 、及びフルード数  $Fr = 2RT_c/YL \cdot g$  により一般化することによって計算を実行した。ここでフルード数  $Fr$  は分子の慣性力と重力との比を表わす無次元数で、仮想重力 (2.3) 式により次式のように変形できる。

$$Fr = \frac{C_{mp}^2}{YL \cdot g} = \frac{2RT_c}{YL \cdot g} = \frac{2T_c}{\Delta T} \quad (3.1)$$

ここで  $C_{mp}$  は Maxwell 速度分布がもつ最確速度を表す。

計算条件としては、 $Kn = 0.01, 0.015, 0.02, 0.025, 0.03$  を希薄度のパラメータとし、各クヌッセン数に対し温度比  $r = T_h/T_c$  を変えることで計算を実行した。

計算空間のセル分割については、流れ場中に置かれた斜平板後方に形成される vortex shedding<sup>15)</sup> などでも報告があるように、渦解がセル幅に対し強い依存性を示すため、ここではセル幅を分子の平均自由行程と同じ程度になるようにセル分割を行った。又各セル当たりのサンプル分子数は初期配置として 50 個とした。但し  $Kn = 0.01$  の場合は計算機の制限により 30 個とした。タイムステップ  $\Delta t$  に関しては、 $\tau$  を分子の平均自由時間とすると、 $Kn = 0.01$  に対し  $\Delta t = 0.4\tau$ 、 $Kn = 0.015$  に対し  $\Delta t = 0.3\tau$ 、残りの  $Kn$  に対しては  $\Delta t = 0.2\tau$  とした。計算は場が定常となるまで行い、その後約 10000step もしくは 20000step の時間平均操作を行った。又 Benard 対流のみならず、渦に関する DSMC 計算でよく使用される sub-cell model<sup>16)</sup> などの空間セルに関する平均操作は行っていない。

計算を実行する前に、各希薄度  $Kn$  に対し仮想重力を決定するために、壁境界での温度ジャンプを見積もらなければならない。ここではその評価を 1 次元 DSMC 法により行うことで温度ジャンプ効果を計算した。

以下に計算手順について示す。

(1) 1 次元 DSMC 法により上下温度壁面での温度ジャンプを計算し、(2.3) により仮想重力を決定する。

(2) 計算空間をセル分割し、各セルにサンプル分子を初期配置する。このとき各分子には初期条件として温度  $T_c$  の Maxwell 速度分布を仮定する。

(3) 分離の原理に従い、タイムステップごとに各セルでの分子間衝突及び分子間衝突のない運動を計算する。ここで分子間衝突判定法としては最大衝突

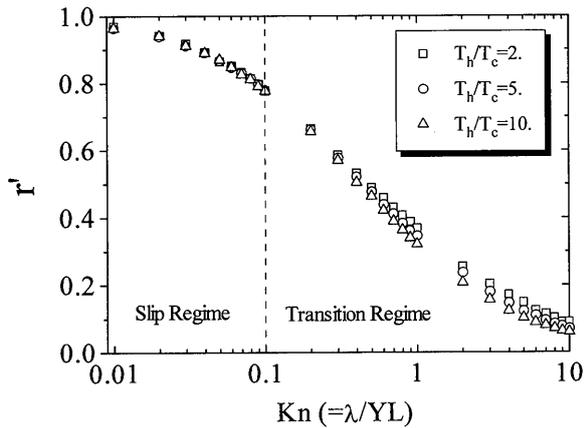


Fig. 2 Temperature jump effects

数法<sup>9)</sup>を採用した。又無衝突運動に対し、この間上下壁面に到達した分子は拡散反射モデルを、左右境界に達したものは鏡面反射モデルを用いてそれぞれ反射させた。

(4) 流れ場が定常となるまで(3)を繰り返し、定常達成後、各物理量に関し時間平均操作を行う。

## 4. 計算結果

### 4.1 温度ジャンプの影響

Fig. 2 に1次元 DSMC 法による希薄度に対する温度ジャンプの影響を示す。ここで各分子は壁面で完全熱適応するものとし、計算は  $T_h/T_c=2, 5, 10$  の場合についてスリップ領域及び遷移領域で実行した。縦軸  $r_T$  は温度ジャンプによる温度差  $\Delta T$  と壁面温度差  $\Delta T$  との比  $\Delta T/\Delta T$  である。

Fig. 2 からわかるように、ほぼ連続領域とみなせる  $Kn=0.01$  の場合でも若干、温度ジャンプ効果が確認される。この場合は3つの温度比でほぼ同程度で約0.965である。希薄度が増すに従い温度ジャンプの効果が進み、 $Kn=0.1$  に対しては約  $r_T=0.778$  である。更に希薄度が増すと、 $Kn=10$  では  $T_h/T_c=2$  の場合で  $r_T=0.091$ 、 $T_h/T_c=5$  に対し  $r_T=0.071$ 、 $T_h/T_c=10$  では  $r_T=0.060$  となり壁面間温度勾配がほとんどなくなっていることがわかる。又すべり領域ではさほど顕著ではないが遷移領域にかけて  $T_h/T_c$  が大きい程、ジャンプ効果が増していることがわかる。この効果は温度ジャンプが平均自由行程に比例する、すなわち壁面温度に依存することに対応している。今回、本論文で希薄度のパラメータとしている  $Kn=0.01, 0.015, 0.02, 0.025, 0.03$  に対しても、Fig. 2 よりその効果の程度を予測することができる。

### 4.2 希薄気体系における Benard 対流渦特性

先ず、希薄気体中における Benard 対流渦の存在を示すため希薄度  $Kn=0.02$  の場合に注目し、Fig. 3 に

レイリー数  $Ra$  を上げていく場合の場の変化について、速度ベクトル・温度分布・密度分布図を示す。速度ベクトルに関しては初期状態での分子の最確速度で、温度分布、密度分布に関してはそれぞれ初期状態での温度、密度で無次元化してある。Fig. 3 より  $Ra=1537$  に対しては場はほぼ静止熱伝導状態が実現されていることが確認できるが、 $Ra=2047$  では既に対流渦が存在しており、更に  $Ra$  をあげることでより強い対流渦度場が形成され、それに対応して温度分布、密度分布が流れ方向にずれていることがわかる。更に  $Ra$  をあげることで、対流渦個数及び形の変化、又連続領域で見られるような乱流状態への遷移を確認できるかも知れない。又、Stefanov ら<sup>12)</sup>のほぼ連続領域  $Kn=0.01$  での計算結果同様、下降流幅に対して上昇流の幅の方が広い事もわかる。興味深いことに、温度比をかえることで対流渦方向が上下逆転していることも確認できる。渦の形、個数などの渦特性がアスペクト比だけでなく温度比にも依存していることが理解できる。ここで温度ジャンプの対流渦特性への影響を調べるために、Fig. 4 に  $Kn=0.02$ 、 $r=5$  での温度ジャンプを考慮する場合、又しない場合の速度分布、温度分布 ( $Y=YL/2, 0 < X < 1$ ) を示す。両者それ程明確な相違は見られないものの、温度ジャンプを考慮した方が、より強い対流渦状態にあることが分かる。対流渦への遷移に関しても、温度ジャンプを考慮する場合の方がより小さい  $Ra$  で遷移することが計算より確認できた。

### 4.3 Benard 対流に対する希薄度の影響

次に任意レイリー数に対する希薄度の影響を調べるために、Fig. 5 にレイリー数  $Ra$  が2500近傍の各希薄度に対する速度ベクトル図、Fig. 6 にそれぞれ  $Y=YL/2, 0 < X < 1$  での速度、温度、密度分布について示す。温度分布は  $Y=0$  で1、 $Y=YL$  で0となるように無次元化してあり、速度、密度分布に関しては先程と同様である。

Fig. 5,6 からわかるように、同程度の  $Ra$  に対しても系が希薄になるに従い、より速い対流渦度場が形成され、又それに対応して温度場、密度場が流れ方向によりずれていることがわかる。ところが、希薄化の進行に伴い渦度場が発達する一方、 $Kn=0.03$  では対流渦が形成されておらず、Fig. 6 の速度分布からも分かるように、その分布はまばらで場が不安定状態であることを示している。これより、次の2つのことが予測できる。

- (1) 場の希薄化に伴い臨界レイリー数  $Ra_c$  が変化する。
- (2) 渦形成に対する希薄度  $Kn$  の限界が存在する。

そこで希薄度に対する対流渦及び遷移現象の影響を考察するため、Fig. 7, 8 にそれぞれ温度比  $r$  及びレ

レイリー数  $Ra$  に対する対流渦の存在度, 又 Fig. 9 に  $Kn=0.03$ における最大速度のレイリー数依存度を示す. Fig. 7, 8 中, ○は完全に対流渦が形成されたこ

とを示し, ▲は完全ではないにしろ渦が形成されつつある状態, ×は流れが存在せず場が安定状態にあることを表わしている. 又  $Kn=0.01, \nu=10$ での◎は今ま

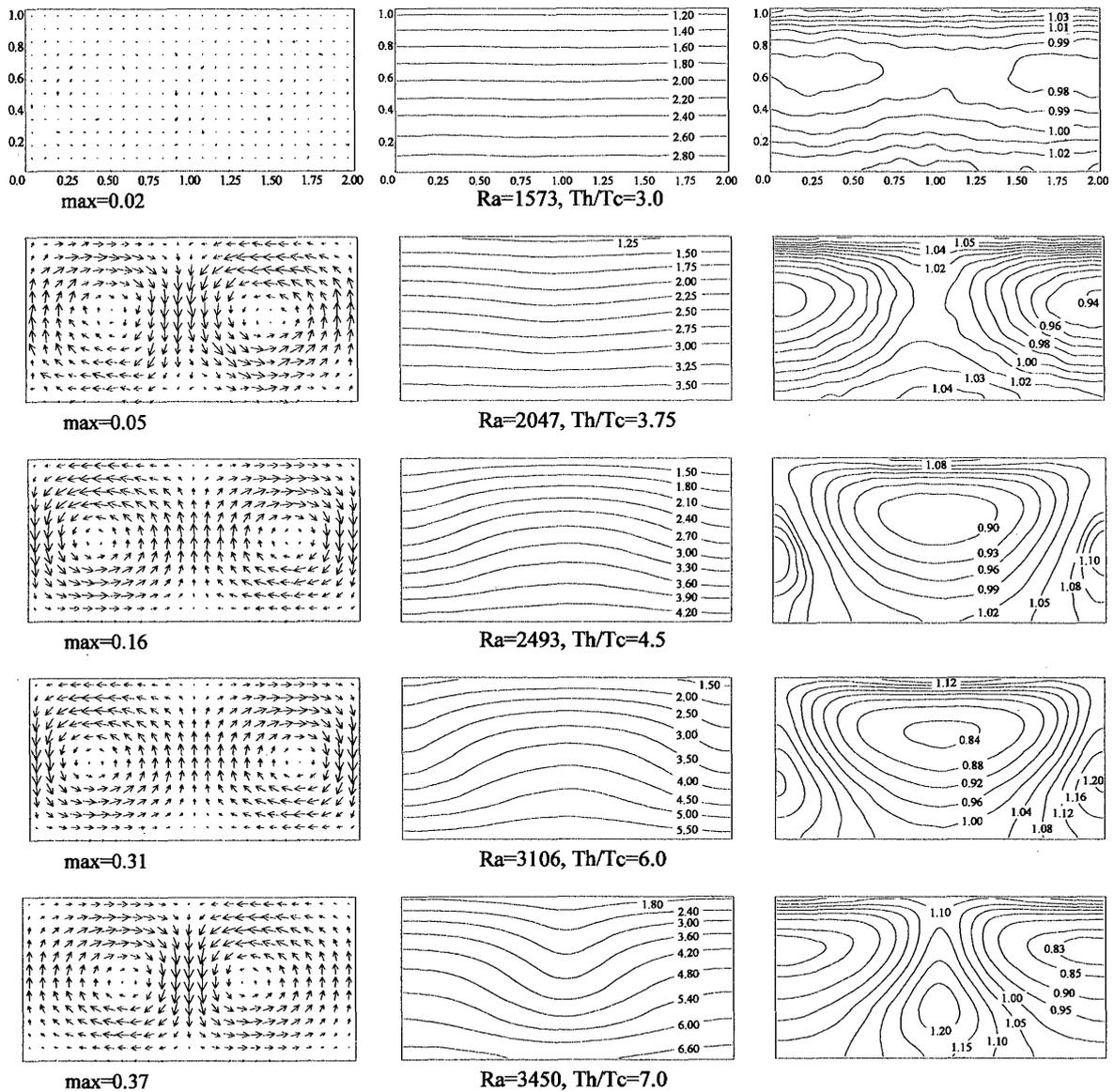


Fig. 3 Velocity, temperature and density fields for  $Kn=0.02$

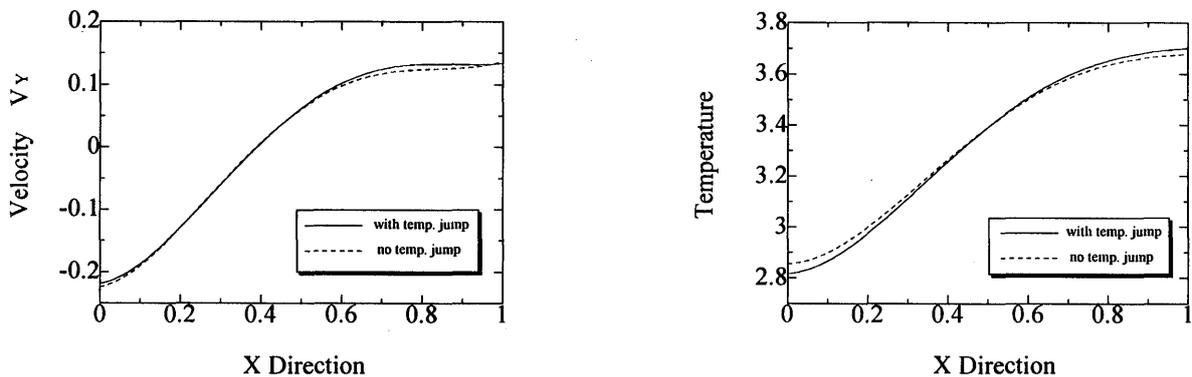
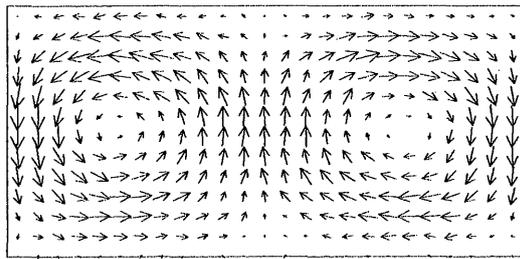
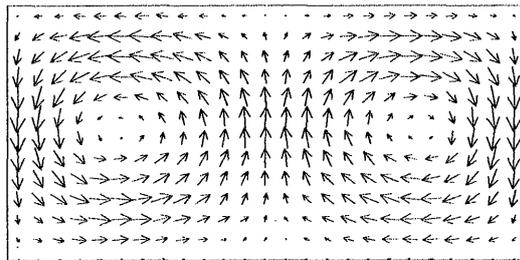


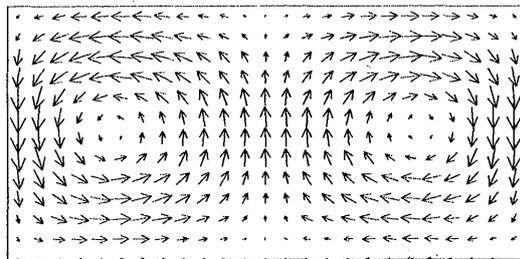
Fig. 4 Velocity and temperature profiles on temperature jump effect



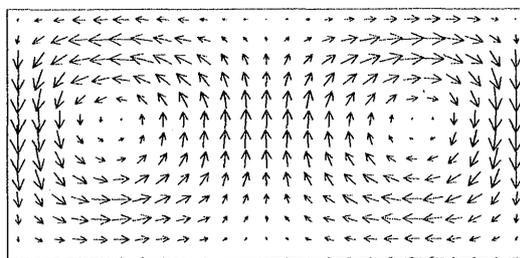
max=0.05  $Kn=0.01, Th/Tc=1.9, Ra=2511$



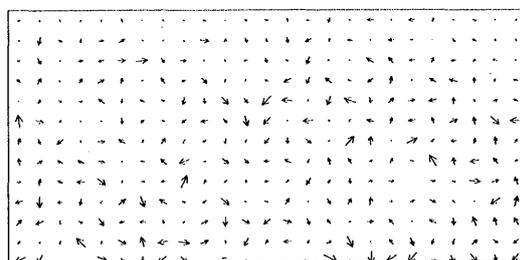
max=0.10  $Kn=0.015, Th/Tc=2.8, Ra=2467$



max=0.16  $Kn=0.02, Th/Tc=4.5, Ra=2493$



max=0.25  $Kn=0.025, Th/Tc=9.5, Ra=2534$



max=0.08  $Kn=0.03, Th/Tc=100, Ra=2509$

Fig. 5 Vector fields for each  $Kn$  ( $Ra \approx 2500$ )

で二個で一対であった対流渦が、三個で一対となって存在している状態であることを示している。Fig. 7 より希薄度が増すに従いより高い温度比を与えないと対流渦が形成されないことがよくわかる。但し  $Kn=0.03$  に対しては  $r=12$  に対してはじめて対流渦が形成されつつあることが確認されたが、その後、温度比を200まで上げることによる対流渦の発達、若しくはその存在を明確には確認できなかった。

Fig. 8 からは明確な  $Ra$  に対する影響を予測するこ

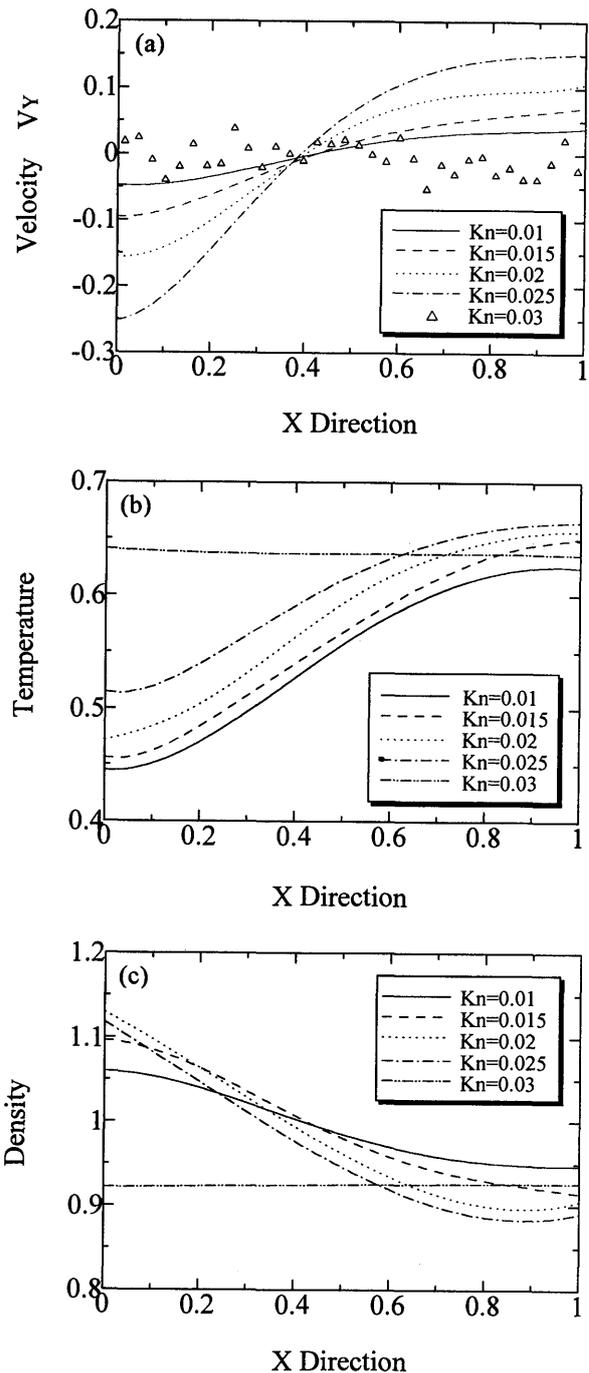


Fig. 6 Velocity (a), temperature (b) and density (c) profiles

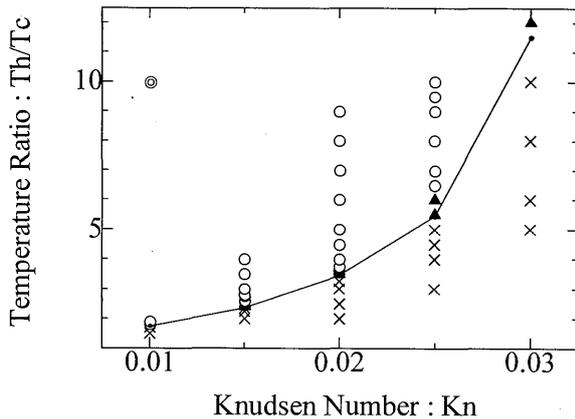


Fig. 7 Whether Rayleigh-Benard instability occurs or not for temperature ratio ?

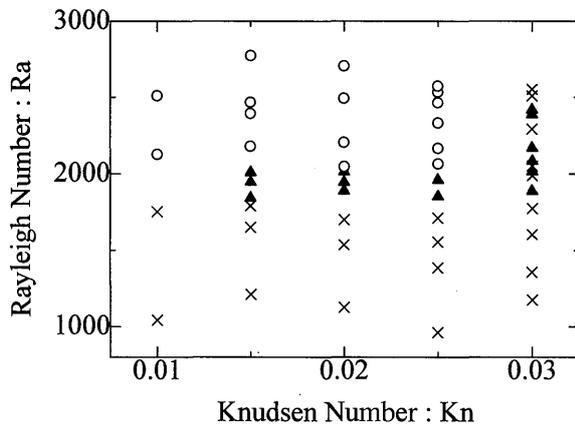


Fig. 8 Whether Rayleigh-Benard instability occurs or not for Rayleigh number ?

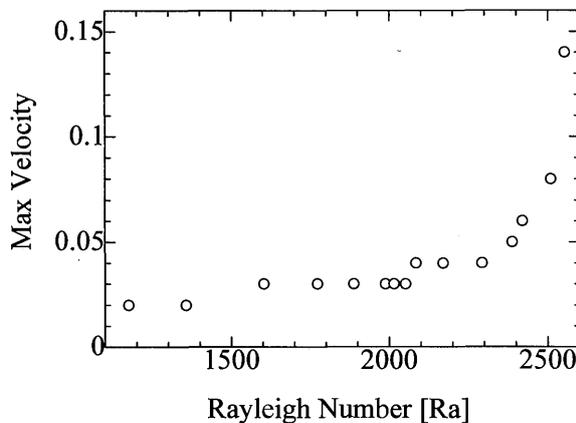


Fig. 9 Max-velocity profile for Kn=0.03

とはできないが、全てのクヌッセン数に対し同程度のレイリー数で対流渦に遷移している事が分かる。Kn=0.03に対しては、完全な対流渦への遷移を明確には確認できなかったものの、Fig. 9 に示す様に速度場自体は、温度比をあげるに従いより高くなることが示さ

れており、すなわち Kn=0.03に対しては、場は不安定状態であるにもかかわらず、対流渦を形成しきれない、つまりこの希薄度が対流渦が存在する限界に近いということ予測することができる。以上まとめると、臨界レイリー数  $Ra_c$  が希薄度に依存して変化するというよりも、渦形成に対する希薄度 Kn の限界が存在するというふうに考えることができる。

もし全ての希薄度における  $Ra_c$  が連続理論でのそれ1707.8に等しいと仮定するならば、Fig. 8 に示される対流への遷移に対し、流れ場がその臨界値よりもやや高い値で誘起されているのは、まず臨界レイリー数近傍で温度場変動の空間相関がはじまり次いで流れ場が誘起されるという渡辺らの結果<sup>9)</sup>に対応しているものと考えることができる。(2.4)式によると、例えば希薄度 Kn=0.04に対しては、温度ジャンプ効果を差し引かないとしても  $Ra < 1629.7$  であるので、この希薄度及びこれ以降の希薄度に対しては対流渦形成はありえないということが予測できる。Kn=0.04更に Kn=0.05に対する DSMC 法による追加計算を行ったが、対流渦の存在は見られなかった。

## 5. 結 言

希薄系 Benard 対流に対し、DSMC 法を用いることによりその希薄度依存評価を行った。以下に得られた知見をまとめる。

(1) 希薄気体系に対して、Benard 対流渦の存在を確認した。又温度比が流れの向きに影響を与えることが確認できた。

(2) 系が希薄になるに従い、対流渦を得るためにはより高い温度比が必要となることが分かった。

(3) 渦形成に対し、希薄度の限界値の存在を予測できた。

本シミュレーションに対し更に精緻な解析を行うには温度場、速度場などの、物理量変動の空間相関をとる必要があると考えられる。しかしながらそれらに加え、仮想重力の問題点及び対流渦の3次元解析などを物理的に把握することも、これからの希薄気体系 Benard 問題の重要な課題と考えられる。

## 参 考 文 献

- 1) T.A. Delchar (石川和雄訳)，“真空技術とその物理”，丸善株式会社 (1995) p. 15.
- 2) 曾根良夫，青木一生，“分子気体力学”，朝倉書店 (1994) p.113.
- 3) S. Chandrasekhar，“Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability”，Dover Press, New York (1981) p.9.
- 4) 南部健一，“ボルツマン方程式の確率解法 I”，東北大学流体科学研究所報告第3巻 (1992) 47.
- 5) G.A. Bird，“Molecular Gas Dynamics”，Oxford Univ. Press (1976).

- 6) A.L. Garcia and M. Mareschal, *Journal of Computational Physics*, 119, 94-104 (1995).
- 7) A.L. Garcia and C. Penland, *Journal of Statistical Physics*, 64, Nos.5/6, 1121 (1991).
- 8) Watanabe, T, et.al., *Phys. Rev. E*, 49, 5, 4060 (1994).
- 9) 渡辺正, 他, *Thermal Science & Engineering*, Vol.2, No.4, 17 (1994).
- 10) 瀬尾昌裕, 平野博之, 尾添紘之, 第33回日本伝熱シンポジウム講演論文集, 313 (1996).
- 11) L.D. Landau and E.M. Lifshitz, "Fluid Mechanics". Pergamon Press (1959) p.9.
- 12) S. Stefanov and C.Cercignani, *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 11,no5, 543-554 (1992).
- 13) 青木一生, 坂上裕幸, 曾根良夫, 日本機械学会第73期全国大会講演論文集(II), 97 (1995).
- 14) S. Chapman and T.G. Cowling, "The Mathematical Theory of Non-uniform Gases", Cambridge Univ. Press (1970).
- 15) E. Meiburg, *Phys. Fluids* 29 (10), 3107 (1986).
- 16) G.A. Bird, *Phys. Fluids* 30 (2), 364 (1987).