水表面近傍の乱流に対するＬＲＲ型応力方程式モデルの有効性

杉原, 裕司
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

松永, 信博
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

中平, 伸治
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

本地, 弘之
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

https://doi.org/10.15017/17402

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 18 (1), pp.34-89, 1996-06-01. 九州大学大学院総合理工学研究科

九州大学大学院総合理工学研究科報告
第18巻 第1号 39-44頁 平成8年6月

Engineering Sciences Reports, Kyushu University
(KYUSHU DAIGAKU SOGORIKOGAKU KENKYUKA HOKOKU)
Vol. 18, No. 1 pp. 39 - 44 JUNE. 1996

水表面近傍の乱流に対する LRR 型応力方程式モデルの有効性

杉 原 裕 司*・松 永 信 博*
中 平 伸 治**・本 地 弘 之*

(平成8年2月29日 受理)

Validity of the LRR Reynolds Stress Closure Model for Turbulence near a Water Surface

Yuji SUGIHARA*, Nobuhiro MATSUNAGA*,
Shinji NAKAHIRA** and Hiroyuki HONJI*

The validity has been investigated of the Launder-Reece-Rodi Reynolds stress closure model (LRR model) for turbulence near a water surface. A model test has been performed for an oscillating-grid turbulence in a homogeneous fluid with a finite depth. Distortion of the near-surface turbulence has been numerically simulated. The numerical solutions normalized by using the exact solution for the infinite depth have been compared with experimental data. A good agreement is seen between the both. The model analysis also predicts that a strong influence of a water surface on the turbulence is observed over the order of the integral length scale. These results show the LRR model analysis to be effective for the turbulence near a water surface.

1. 緒　　言

水表面では，大気－水域間の運動量輸送を通して，熱，炭酸ガス，酸素等の物質交換が行われる．それには水表面近傍の乱流が重要な役割を担っており，これらの物質交換量を定量的に明らかにするためには，水表面近傍の乱流特性を明らかにする必要がある．従って，水表面近傍における乱流解析の精度向上は，これらの交換過程の予測手法の確立において重要な課題である．水表面近傍では，乱流渦は扁平に変形され，乱れの非等方性が顕著となる．非等方乱流場を対象としたRANS系の解析モデルにレイノルズ応力方程式モデルがある．このモデルは，DNSやLESに比べて計算機負荷も小さく，比較的高精度で工学的乱流場を予測できることから，現在活発に整備されているモデルである．水表面を有する乱流場にレイノルズ応力方程式モデルを用いた研究として，例えば Gibson & Rodi[1]，河原と常山[2]のものがあるが，このモデルが水表面近傍の乱流特性をどれ程正確にシミュレートできるのかについてはさらに詳細に検討されなければならない．

本研究の目的は，現在提案されている様々なモデルの基本ベースになっている Launder, Reece & Rodi のレイノルズ応力方程式モデル（LRR モデル）[3]が，どの程度水表面近傍の乱流特性をシミュレートできるのかについてその基本性能を検討することである．モデルの基本性能を評価する場合には，解析的取り扱いが容易である乱流場を対象とする方が望ましい．そこで本研究では，振動格子乱流，つまり平均流が存在せず拡散と散逸が釣り合った乱流場を解析対象とする．この乱れ場は水表面の影響がない場合（以下基本場）においてもある程度の非等方性を持っている．従って，水表面による非等方効果を正しく解析するためには，まず基本場の非等方性度を評価しておく必要がある．本解析では，基本場の LRR モデルの解析解を通じて水表面の影響が無視できる場合の非等方性度の実験値をモデル定数に反映させている．そのようなモデル定数値を用いて，水表面の影響がある場合の解析を行い従来の水表面近傍での実験値と比較・検討することによってモデルの有効性を検討している．

2. 基本場における LRR モデルの解析解

振動格子乱流は，静止流体中において，格子を鉛直振動させた際に形成される乱流である．この乱れの特徴は，格子振動中心からある程度離れた領域では近似的に平均流がなく，乱流統計量が水平面内において一様で鉛直方向にのみ変化することである[4]．これらの特性を考慮して LRR モデル方程式を単純化すると以

*大気海洋環境システム学専攻
**大気海洋環境システム学専攻　修士課程

下のようになる.

$$C_s\frac{d}{dz}\left\{\frac{k}{\varepsilon}\left(w^2\frac{dk}{dz}+w^2\frac{dw^2}{dz}\right)\right\}-\varepsilon=0$$
$$C_s\frac{d}{dz}\left\{\frac{k}{\varepsilon}3w^2\frac{dw^2}{dz}\right\}-C_{\phi1}\frac{\varepsilon}{k}\left(w^2-\frac{2}{3}k\right)-\frac{2}{3}\varepsilon=0 \qquad (1)$$
$$C_\varepsilon\frac{d}{dz}\left\{\frac{k}{\varepsilon}w^2\frac{d\varepsilon}{dz}\right\}-C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^2}{k}=0$$

ここで, k は乱れエネルギー, εはエネルギー散逸率, w は鉛直方向流速の乱れ強度, z は格子振動中心から鉛直上向きに取られた座標である. また C_s, $C_{\phi1}$, C_ε および $C_{\varepsilon2}$ はモデル定数である. 本解析では, $z=z_0$ から一様性が実現するものとし, それより上方を解析対象とする. 格子振動中心で生成された乱れが $z=z_0$ において取る値を k_0, ε_0 とする. また, そこでの w^2 は, rk_0 で与えられるものとする. 以上より境界条件は次のようになる.

$$k=k_0,\ w^2=rk_0,\ \varepsilon=\varepsilon_0\ at\ z=z_0 \qquad (2)$$
$$k\to0,\ w^2\to0,\ \varepsilon\to0\ as\ z\to\infty$$

解析の見通しを良くするために, 境界値 k_0, ε_0 を用いて(1), (2)式を無次元化しよう. その際の無次元諸量は以下のように定義される.

$$\hat{k}=k/k_0,\ \widehat{w^2}=w^2/k_0,\ \hat{\varepsilon}=\varepsilon/\varepsilon_0 \qquad (3)$$
$$\hat{z}=z/(k^3{}_0\varepsilon_0{}^{-2})^{1/2},\ \hat{z}_0=z_0/(k_0{}^3\varepsilon_0{}^{-2})^{1/2}$$

無次元化された方程式系は,

$$C_s\frac{d}{d\hat{z}}\left\{\frac{\hat{k}}{\hat{\varepsilon}}\left(\widehat{w^2}\frac{d\hat{k}}{d\hat{z}}+\widehat{w^2}\frac{d\widehat{w^2}}{d\hat{z}}\right)\right\}-\hat{\varepsilon}=0$$
$$C_s\frac{d}{d\hat{z}}\left\{\frac{\hat{k}}{\hat{\varepsilon}}3\widehat{w^2}\frac{d\widehat{w^2}}{d\hat{z}}\right\}-C_{\phi1}\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{k}}\left(\widehat{w^2}-\frac{2}{3}\hat{k}\right)-\frac{2}{3}\hat{\varepsilon}=0 \qquad (4)$$
$$C_\varepsilon\frac{d}{d\hat{z}}\left\{\frac{\hat{k}}{\hat{\varepsilon}}\widehat{w^2}\frac{d\hat{\varepsilon}}{d\hat{z}}\right\}-C_{\varepsilon2}\frac{\hat{\varepsilon}^2}{\hat{k}}=0$$
$$\hat{k}=1,\ \widehat{w^2}=r,\ \hat{\varepsilon}=1\ at\ \hat{z}=\hat{z}_0$$
$$\hat{k}\to0,\ \widehat{w^2}\to0,\ \hat{\varepsilon}\to0\ as\ \hat{z}\to\infty$$

となる. ここで, ∧は無次元量を示す.

(4)式の非線形方程式系を解くに当たり, 次のように定義される $\hat{\zeta}$ 座標系を導入する.

$$\frac{d\hat{\zeta}}{d\hat{z}}=\frac{1}{C_s}\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{k}\widehat{w^2}}>0\ for\ \hat{z}_0<\hat{z}<\infty$$
$$\hat{\zeta}=\zeta_0\ at\ \hat{z}=\hat{z}_0 \qquad (5)$$
$$\hat{\zeta}\to\infty\ as\ \hat{z}\to\infty$$

(5)式を用いて, (4)式を $\hat{\zeta}$ー系へ変換すると次式が得られる.

$$\frac{d^2\hat{k}}{d\hat{\zeta}^2}+\frac{d^2\widehat{w^2}}{d\hat{\zeta}^2}=C_s\hat{k}\widehat{w^2}$$
$$\frac{d^2\widehat{w^2}}{d\hat{\zeta}^2}=\frac{C_sC_{\phi1}}{3}\widehat{w^2}^2-\frac{2}{9}C_s(C_{\phi1}-1)\hat{k}\widehat{w^2}$$
$$\frac{d^2\hat{\varepsilon}}{d\hat{\zeta}^2}=\frac{C^2{}_sC_{\varepsilon2}}{C_\varepsilon}\hat{\varepsilon}\widehat{w^2} \qquad (6)$$
$$\hat{k}=1,\ \widehat{w^2}=r,\ \hat{\varepsilon}=1\ at\ \hat{\zeta}=\zeta_0$$
$$\hat{k}\to0,\ \widehat{w^2}\to0,\ \hat{\varepsilon}\to0\ as\ \hat{\zeta}\to\infty$$

(6)式の解として, 境界条件を考慮して次のような関数形を仮定しよう.

$$\hat{k}=\left(\frac{\hat{\zeta}}{\zeta_0}\right)^{-\alpha},\ \widehat{w^2}=r\left(\frac{\hat{\zeta}}{\zeta_0}\right)^{-\beta},\ \hat{\varepsilon}=\left(\frac{\hat{\zeta}}{\zeta_0}\right)^{-(3+\gamma)} \qquad (7)$$

$$\alpha,\ \beta>0,\ \gamma>-3$$

(7)式を(6)式の第1式へ代入すると, 恒等的に次の関係式が得られる.

$$\alpha=\beta=2 \qquad (8)$$
$$\frac{6}{C_s\zeta_0{}^2}=\frac{r}{1+r}$$

また, (7)式を(6)式の第2式へ代入すると, 同様に

$$\alpha=\beta=2 \qquad (9)$$
$$\frac{6}{C_s\zeta_0{}^2}=\frac{rC_{\phi1}}{3}-\frac{2}{9}(C_{\phi1}-1)$$

が得られる. (8), (9)式より $C_{\phi1}$ と r の間には

$$C_{\phi1}=\frac{7r-2}{(1+r)(3r-2)} \qquad (10)$$

の関係が成立し, モデル定数 $C_{\phi1}$ は, 乱れの非等方性から決定されるパラメータであることがわかる. また, $\alpha=\beta=2$ が得られたことから, $\widehat{w^2}$ と $\hat{k}$の比は空間的に一定で, $z=z_0$ における値 r を取ることがわかる. ここで, (6)式に $\hat{k}=(\hat{\zeta}/\zeta_0)^{-2}$, $\widehat{w^2}=r(\hat{\zeta}/\zeta_0)^{-2}$ を代入すると第1式と2式から同じ形の微分方程式が得られる. 従って(10)式は, この2つの方程式が等価であることを保証する条件になっていることに注意が必要である.

(7)式を(6)式の第3式へ代入すると,

$$\gamma=-\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{6C_sC_{\varepsilon2}(1+r)}{C_\varepsilon}} \qquad (11)$$

が得られる.

(5)式の定義式に(7)式および(8)式の第1式を代入することにより, 次式の関係を求めることができる.

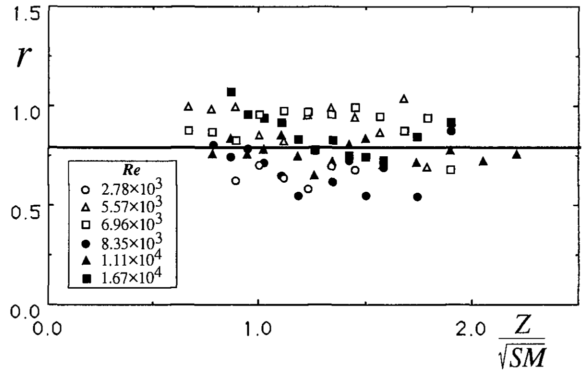


Fig. 1　Spatial distributions of r.

$$\left(\frac{\hat{\zeta}}{\zeta_0}\right)^{\gamma}=\frac{\hat{z}-\widehat{z_0}}{z_L}+1 \tag{12}$$

ただし，$z_L=C_s\zeta_0 r/\gamma$ である．

従って，(7)式へ(12)式を代入し，(8)式の第１式の関係を考慮すると，基本場の LRR モデルの解析解は次のようになる．

$$\begin{aligned}\hat{k}&=\left(\frac{\hat{\zeta}}{\zeta_0}\right)^{-2}=\left(\frac{\hat{z}-\widehat{z_0}}{z_L}+1\right)^{-\frac{2}{\gamma}}\\ \widehat{w^2}&=r\left(\frac{\hat{\zeta}}{\zeta_0}\right)^{-2}=r\left(\frac{\hat{z}-\widehat{z_0}}{z_L}+1\right)^{-\frac{2}{\gamma}r}\\ \hat{\varepsilon}&=\left(\frac{\hat{\zeta}}{\zeta_0}\right)^{-(3+\gamma)}=\left(\frac{\hat{z}-\widehat{z_0}}{z_L}+1\right)^{-\frac{(3+\gamma)}{\gamma}}\end{aligned} \tag{13}$$

ただし，γ は(11)式で与えられる．

次に，水表面の影響を受けない振動格子乱流において，r の値が空間的に一定であるか否かを実験データに基づいて検討してみよう．**Fig. 1** に，振動格子乱流の LDV 測定データから算定された r の空間分布を示す．ここで，S は格子の振動幅，M はメッシュ間隔である．また Re は，格子の振動数を f, 作業流体の動粘性係数を ν とした時に，fS^2/ν で定義される格子レイノルズ数である．これより，r は格子振動条件に依らず，空間的にほぼ一定で，0.8程度の値を取ることがわかる．

基本場の解析からもわかるように，LRR モデルのモデル定数は，r, ζ_0, γ の値に依存している．乱流計測から，$\gamma=0.4$, $z_L=1.82$の値を取ることがわかっている[4]．また振動格子乱流の時間減衰実験から，$C_{\varepsilon 2}=1.90$の妥当性が検証されている[5]．従って，$r=0.8$ を考慮すれば，(8)，(10)，(11)式および $z_L=C_s\zeta_0 r/\gamma$ から全てのモデル定数値を決定できることになる．本解析の結果と実験結果に基づいて決定された定数値は以下のようになる．

$$C_s=0.0613,\ C_{\phi 1}=5.0,\ C_\varepsilon=0.0841,\ C_{\varepsilon 2}=1.90,\ r=0.8 \tag{14}$$

以下の節では，(14)式の値を中心に，モデル定数値を系統的に変化させせることにより，モデル定数の解への依存性を調べ，LRR モデルの水表面近傍の乱流解析における有効性を検討していく．

3.　水表面が存在する場合の数値解析

水表面が存在する場合の解析解を得ることは困難なので，数値的に解を求めることにする．基礎方程式は，(1)式であり，モデル定数値は **Table 1** に示されている．

２節において導入された z_0 の値を具体的に与えることは極めて困難である．そこで数値解析においては，(1)式を $z=0$ まで拡張した時に，上方の乱れの分布を再現するために $z=0$ で与えられるべき仮想的な境界値を $k=k_0$, $\varepsilon=\varepsilon_0$と考え，便宜的に $z_0=0$ とした．$z=0$ における境界値 $k=k_0$, $\varepsilon=\varepsilon_0$で(1)式を無次元化して解析を行うこととすると，無次元方程式は(4)式の第１～３式と同じになる．水表面における境界条件は現段階ではわかっていないので，次式の境界条件を便宜的に用いることとする．

$$\hat{k}=1,\ \widehat{w^2}=r,\ \hat{\varepsilon}=1\ at\ \hat{z}=0 \tag{15}$$

$$\frac{d\hat{k}}{d\hat{z}}=0,\ \widehat{w^2}=0,\ \frac{d\hat{\varepsilon}}{d\hat{z}}=0\ at\ \hat{z}=\hat{z}_s$$

ここで，$\hat{z}_s$ は無次元水表面高さである．本条件の妥当性については今後の検討課題であり，また高レイノルズ数の流れを対象としたモデルを $\widehat{w^2}=0$ つまり水表面のごく近傍まで適用することの妥当性についても

Tabel 1　Case specifications.

	r	Cs	$C_{\phi 1}$	C_ε	$C_{\varepsilon 2}$	Zs
*RUN*1	0.70	7.42×10^{-2}	17.06	9.61×10^{-2}	1.90	2.50
*RUN*2	0.80	6.13×10^{-2}	5.00	8.41×10^{-2}	1.90	2.50
*RUN*3	1.00	4.42×10^{-2}	2.50	6.74×10^{-2}	1.90	2.50
*RUN*4	0.80	6.13×10^{-2}	5.00	8.41×10^{-2}	1.90	2.00
*RUN*5	0.80	6.13×10^{-2}	5.00	8.41×10^{-2}	1.90	3.00

問題が残る.

Gibson & Rodi は, 水表面の存在による乱れの修正項を代数的に与え, レイノルズ応力方程式モデルの中に組み込んでいる. しかし本解析では, LRR 型の乱流モデルそのものが(15)式の条件下でどの程度現象をシミュレートできるのか, また水表面近傍で乱れがどのように減衰するのかを調べることを目的としており, Gibson & Rodi の修正項の導入はこの場合不適当である.

数値計算においては, 非定常計算を行い, 定常状態に落ち着くまで計算を繰り返すことによって定常解を求めている. 基礎方程式の差分化には, クランクニコルソンスキームを用いた.

4. 解析結果および考察

Fig. 2 に乱れの水平, 鉛直成分の r. m. s. の数値解 $\hat{u}$, $\hat{w}$の水平面近傍における挙動を示す. ここで, $\hat{u}$ は $\hat{u}=\sqrt{(2\hat{k}-\widehat{w^2})/2}$ から算定されており, $\hat{z}'$ は $\hat{z}'=\hat{z}_s-\hat{z}$ で定義された水表面からの無次元距離である. $\widehat{l_{u\infty}}(=0.1\hat{z})$ は多くの研究者によって提案された経験式[6]から計算された水平方向の積分長さスケールであり, $\widehat{u_\infty}$, $\widehat{w_\infty}$ は(13)式から得られる解析解である. 以下の考察で用いられる添字∞は, 基本場における乱流特性量の解析解であることを意味する. この図より, 水表面近傍では, $\hat{u}$ は水表面が存在しない場合に比べて増加し, $\hat{w}$ は急激に減衰することがわかる. また, 水表面の影響を受ける領域 (*Surface Influenced Layer*; 以下 SIL) は, 積分長さスケールの 1 ~1.5倍程度の範囲に限られていることがわかる. 解析は 3 種類の $\hat{z}_s$ に対して行われているが, $\hat{z}_s$ の変化に関わずらこの様に規格化された数値解は普遍的な挙動を示す.

Fig. 3 は, エネルギー散逸率 $\hat{\varepsilon}$ と非等方性度を表わす特性量 $\widehat{w^2}/\widehat{u^2}$ の水表面近傍における挙動を示す. $\hat{\varepsilon}$ は水表面に近づくにしたがって増加することがわかる. これは, 水表面によって上方への拡散が抑えられるために, 水表面近傍で多くの乱れエネルギーを散逸しなければならないためである. $\widehat{w^2}/\widehat{u^2}$ は水表面近傍で急激に減衰するが, 水表面から離れるにしたがって, $r=0.8$から理論的に予測される値1.33へ漸近していくことがわかる.

Fig. 4 は, 基本場の非等方性度を種々変化させた場合の $\hat{u}$ と $\hat{w}$ の挙動の変化を示す. 非等方性度が比較的小さい $r=0.7$のケースにおいては, $\hat{u}$, $\hat{w}$ ともに水表面近傍まで減衰傾向を示している. また, r が増加するに従って, 水表面の影響が拡大してくることがわかる. このことは, SIL の厚さが, 基本場の非等方性度に強く依存していることを示唆している.

Fig. 5 は, LRR モデルから計算された $\hat{k}$, $\hat{\varepsilon}$ の水表面近傍での挙動と非等方効果が含まれていない標準型 k-ε モデルから計算されたそれとを比較したものである. 標準型 k-ε モデルから計算される SIL の厚さは積分長さスケールの 5 倍程度となり, LRR モデルの

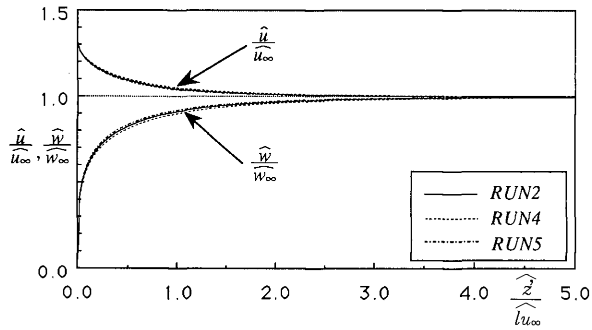


Fig. 2　Profiles of $\hat{u}$ and $\hat{w}$ near the water surface.

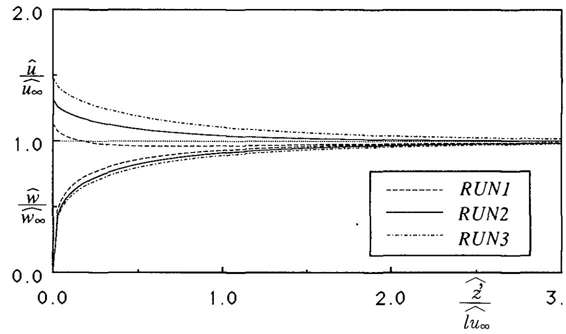


Fig. 4　Dependence of $\hat{u}$ and $\hat{w}$ on r.

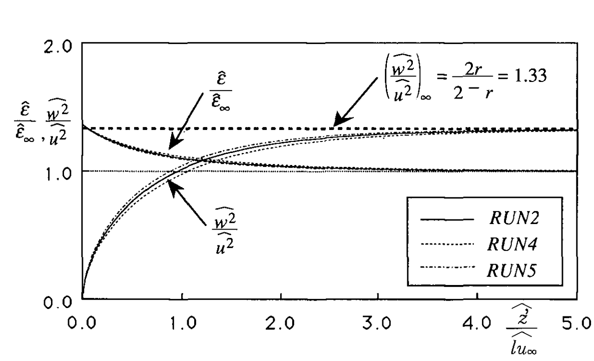


Fig. 3　Profiles of $\hat{\varepsilon}$ and $\widehat{w^2}/\widehat{u^2}$ near the water surface.

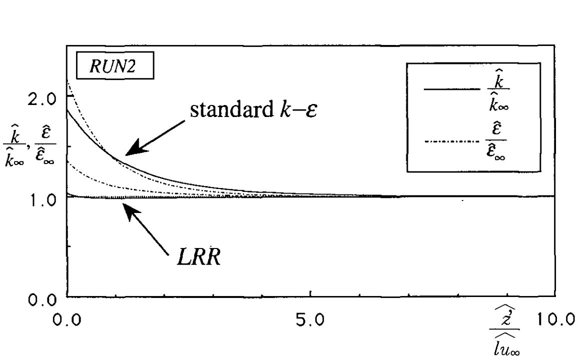
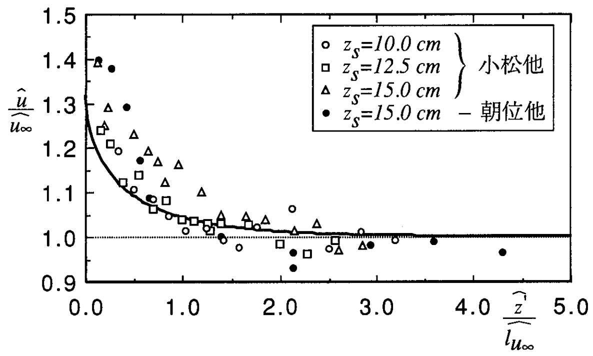
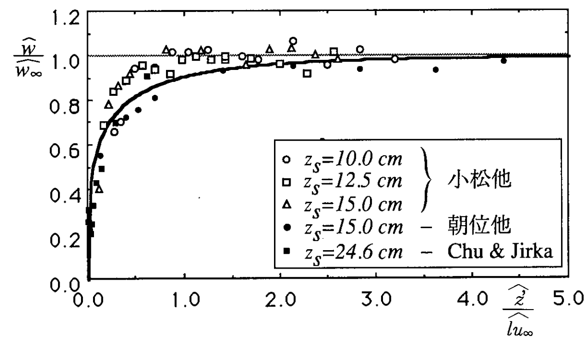


Fig. 5　$\hat{k}$-and $\hat{\varepsilon}$-comparisons between the LRR model and the k-ε model solutions.

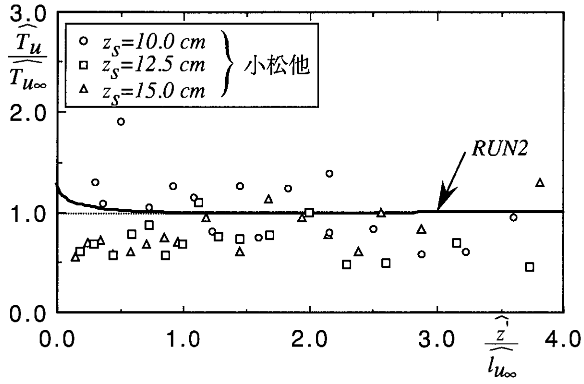


(a)　u near the water surface.

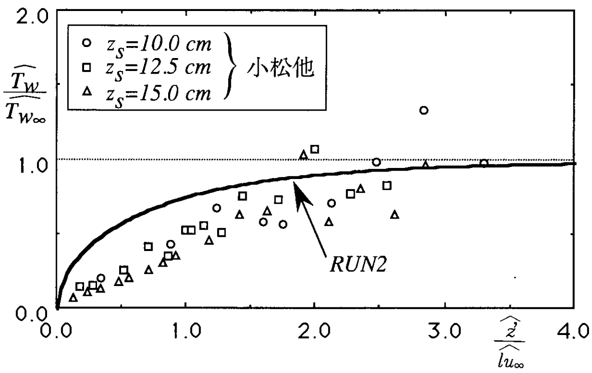


(b)　w near the water surface.

Fig. 6　Comparisons between the numerical solutions with r = 0.8 and the experimental data for r. m. s. of turbulent velocity.



(a)　T_u near the water surface.



(b)　T_w near the water surface.

Fig. 7　Comparisons between the numerical solutions with r = 0.8 and the experimental data for the turbulent time scale.

結果とかなり異なる．

Fig. 6 (a), (b) はそれぞれ $\widehat{u}$, $\widehat{w}$ の水表面近傍の挙動に関して r=0.8の数値解と小松他[7]，朝位他[8]，Chu & Jirka [9]の実験値を比較したものである．数値解と実験値の乱れの挙動および SIL の厚さは良く一致している．また実験値においても，このように規格化された乱れの挙動は，z_s に依らず普遍的に表せることがわかる．これらの一致は，LRR モデルが水表面近傍の乱流解析に対して有効であることを示唆している．

Fig. 7 (a), (b) は，それぞれ r=0.8の数値解から算定した水平，鉛直方向の乱れのタイムスケール

$$\frac{\widehat{T_u}}{\widehat{T_{u\infty}}}=\frac{\widehat{u^2}/\widehat{\varepsilon}}{\widehat{u^2_\infty}/\widehat{\varepsilon_\infty}},\quad \frac{\widehat{T_w}}{\widehat{T_{w\infty}}}=\frac{\widehat{w^2}/\widehat{\varepsilon}}{\widehat{w^2_\infty}/\widehat{\varepsilon_\infty}} \qquad (16)$$

と乱れの自己相関係数から算定された積分タイムスケールの実験値を比較したものである．ただし，数値解と実験値のタイムスケールの定義は同一のものではないが，それぞれの基本場の量で規格化された無次元量の挙動は普遍的であると仮定している．タイムスケールの挙動で非常に特徴的なことは，T_w が水表面の影響を強く受け大きく減衰する一方で，T_u はほぼ一定値を保っていることである．**Fig. 7** の比較から，LRR モデルが，この挙動を定性的にはシミュレートしていることがわかる．T_w の減衰挙動については，数値解と実験値の間で若干異なっている．この挙動補正に関しては，Gibson & Rodi が導入した水表面の修正項が必要となるのかもしれしないが，基本的には，水表面近傍の乱流構造をシミュレートする上で，LRR モデルはかなり有効であるものと結論づけられる．

5．結　　　　言

本研究では，水表面近傍の乱流解析における LRR 型応力方程式モデルの有効性について検討した．対象とした乱流場は乱れの拡散と散逸が釣り合った振動格子乱流であり，本研究で得られた結果を要約すると以下のようになる．

(1)　水表面が存在しない基本場に関する LRR 型レイノルズ応力方程式モデルの解析解を導出し，乱流場の非等方性度はモデルパラメータ $C_{\phi 1}$ を規定していることが明らかになった．

(2)　解析に基づいて，振動格子乱流に関するモデル定数値が推定された．

(3)　水表面が存在する場合の数値解析を行った．数値解は基本場の特性量を用いて規格化された場合，水表面の高さに依らず，普遍的な分布をもつ．

(4) 乱れの r. m. s. およびタイムスケールに関して数値解と従来の実験値を比較した．その結果，SIL の厚さや乱れ特性の挙動において両者は良く一致し，LRR モデルが水表面近傍の乱流解析に有効であることが示された．

最後に本研究の一部は平成 7 年度文部省科学研究費補助金の援助のもとで行われたことを記し謝意を表します．

参 考 文 献

1) Gibson, M. M. & Rodi, W., *Jour. Hydraul. Res.*, **27**, 233 (1989).
2) 河原能久，常山修治，水工学論文集，**38**，821 (1994).
3) Launder, B. E., Reece, G. J. & Rodi, W., *Jour. Fluid Mech.*, **68**, 537 (1975).
4) 杉原裕司，松永信博，増田　章，小松利光，土木学会論文集，**521/Ⅱ－32**，93 (1995).
5) 杉原裕司，松永信博，小松利光，土木学会論文集，**503/Ⅱ－29**，215 (1994).
6) 例えば E, X. & Hopfinger, E. J., *Jour. Fluid Mech.*, **166**, 227 (1986).
7) 小松利光，柴田敏彦，朝位孝二，高原健太郎，水工学論文集，**39**，819 (1995).
8) 朝位孝二，小松利光，柴田敏彦，高原健太郎，土木学会第50回年次学術講演会概要集，**Ⅱ－1**，554 (1995).
9) Chu, C. R. & Jirka, G. H., *AIR WATER MASS TRANSFER*, Wilhelms & Gulliver (eds.), ASCE, 160 (1991).