

## シュリーレン写真による境界層厚さの評価

宮里, 義昭  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

洪, 鍾宇  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

樫谷, 賢士  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

松尾, 一泰  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

<https://doi.org/10.15017/17355>

---

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 16 (4), pp.389-393, 1995-03-01. 九州大学大学院総合理工学研究科  
バージョン :  
権利関係 :

## シュリーレン写真による境界層厚さの評価

宮里 義昭\* ・ 洪 鍾宇\*\*  
樫谷 賢士\*\*\* ・ 松尾 一泰\*  
(平成6年11月4日 受理)

### Estimation of Boundary-Layer Thickness from Schlieren Photographs

Yoshiaki MIYAZATO, Jong-Woo HONG,  
Masashi KASHITANI and Kazuyasu MATSUO

A method of determining boundary-layer thickness from schlieren photographs is analytically discussed. Analytical procedures are based on assumptions of perfect fluid, adiabatic wall condition, one-Nth power law velocity-profile, and constant static pressure as well as total temperature within the boundary-layer. It is shown that in case of  $N > 2((\gamma - 1)M_e^2 + 1)$  the boundary-layer thickness from schlieren photographs agrees well with Tucker's calculation result, where  $\gamma$ ,  $M_e$  and  $N$  are the specific heat ratio, freestream Mach number and velocity profile parameter, respectively.

#### 1. ま え が き

著者らは、超音速ノズルや超音速ディフューザ内に発達する境界層は、妥当な速度分布と摩擦係数の選定をすれば、ゼロ圧力勾配と順圧力勾配を伴う流れ場においては Tucker の方法によって比較的容易に求めることができ、ピトー管を用いて測定した速度分布から計算した境界層と比較的よく一致することを示した<sup>1)</sup>。しかしこの方法は、放射状流れや大きな逆圧力勾配を伴う流れ場においても、適当であるかどうか明かではない。また境界層を数値計算によって厳密に解いて求める<sup>2)</sup>場合においても、翼面上やその他の境界条件が複雑な流れの場合には、計算に多くの時間を必要とする。一方、高速気流など圧縮性を伴う流れ場を比較的簡単に可視化する方法としてシュリーレン法がある<sup>3)</sup>。シュリーレン法では、ナイフエッジを流れに平行におくことによって流れに垂直方向の密度勾配の変化が写真に写し出される。この方法によって壁面に沿う流れ場を写した場合、シュリーレン写真には、壁面のすぐ上に、明るさが急激に変化するところがみられ、その壁面からの高さを境界層の厚さとしている文献がいくつか見受けられる<sup>4)-7)</sup>。しかしその理論的根拠を議論

した論文はあまり見受けられない。Grubman は、シュリーレン法の原理を利用して、境界層厚さをシュリーレン写真から計算する方法を提案している<sup>8)</sup>が、その理論には検討すべき点が見受けられる。本研究は Grubman の理論を検討し、シュリーレン写真から求めた境界層厚さの評価を行う。

#### 2. 理 論

気体は完全気体とし、境界層内で静圧と全温度が一定と仮定すると、主流に対する境界層内の密度比  $\rho/\rho_e$  は<sup>1)</sup>、

$$\frac{\rho}{\rho_e} = \frac{1}{1 + m^2 - m^2 \left(\frac{u}{u_e}\right)^2} \quad (1)$$

ただし、 $m^2 = (\gamma - 1) M_e^2 / 2$ 。ここで  $\rho$  は密度、 $u$  は流れ方向速度、 $M$  はマッハ数、 $\gamma$  は比熱比で、添字  $e$  は主流の状態を表す。以下の解析では  $\gamma = 1.4$  の 2 原子気体のみを考える。Fig. 1 に示すように、境界層内

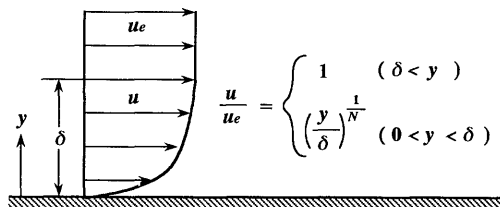


Fig. 1 Assumed velocity-profile in boundary-layer

\*エネルギー変換工学専攻  
\*\*エネルギー変換工学専攻博士課程  
\*\*\*エネルギー変換工学専攻修士課程

の速度分布  $u/u_e$  は、壁からの垂直距離を  $y$ 、境界層厚さを  $\delta$  として  $1/N$  乗指数法則に従うとする。すなわち

$$\frac{u}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{N}} \quad (2)$$

上式を式(1)に代入すると

$$\frac{\rho}{\rho_e} = \frac{\delta^{2/N}}{(1+m^2)\delta^{2/N} - m^2 y^{2/N}} \quad (3)$$

式(3)は  $M_e$  と  $N$  をパラメータとしたときの境界層内の密度分布を与える。従って、密度の  $y$  に関する 1 次および 2 次微分は次のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{2m^2 y^{(2/N-1)} \delta^{2/N} \rho_e}{N \{(1+m^2)\delta^{2/N} - m^2 y^{2/N}\}^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = \frac{2m^2 y^{(2/N-2)} \{(2-N)(1+m^2)\delta^{2/N} + (2+N)m^2 y^{2/N}\} \delta^{2/N} \rho_e}{N^2 \{(1+m^2)\delta^{2/N} - m^2 y^{2/N}\}^3} \quad (5)$$

ここで  $\hat{\rho} \equiv \rho/\rho_e$ ,  $\hat{y} \equiv y/\delta$  において式(3)~(5)を変形すると次式となる。

$$\hat{\rho} = \frac{1}{1+m^2 - m^2 \hat{y}^{2/N}} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{y}} = \frac{2m^2 \hat{y}^{(2/N-1)}}{N(1+m^2 - m^2 \hat{y}^{2/N})^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial \hat{y}^2} = \frac{2m^2 \hat{y}^{(2/N-2)} \{(2-N)(1+m^2) + (2+N)m^2 \hat{y}^{2/N}\}}{N^2 (1+m^2 - m^2 \hat{y}^{2/N})^3} \quad (8)$$

$M_e = 2.5$  とし、速度分布指数  $N$  をパラメータとしたときの境界層内の密度変化を Fig. 2 に示す。また  $N = 7$  とし、 $M_e$  をパラメータとしたときの境界層内の密度変化を Fig. 3 に示す。Fig. 2 と 3 の (a)~(c) の横軸はそれぞれ境界層内の密度 [式(6)]、密度

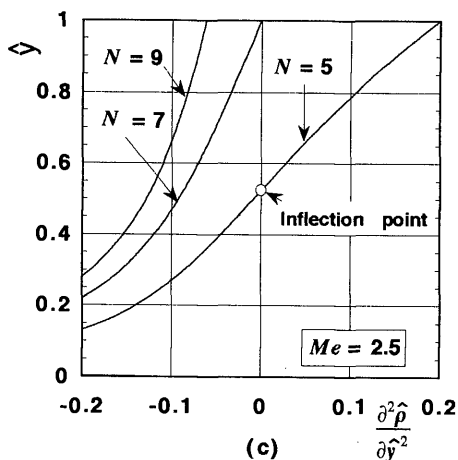
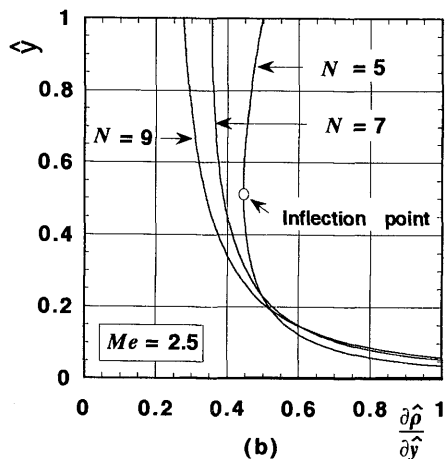
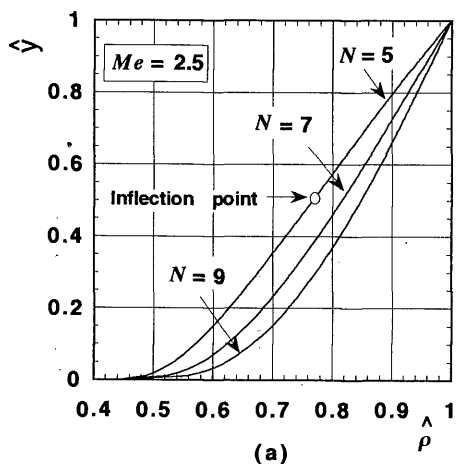


Fig. 2 Variations of density-profile in boundary-layer with velocity-profile parameter

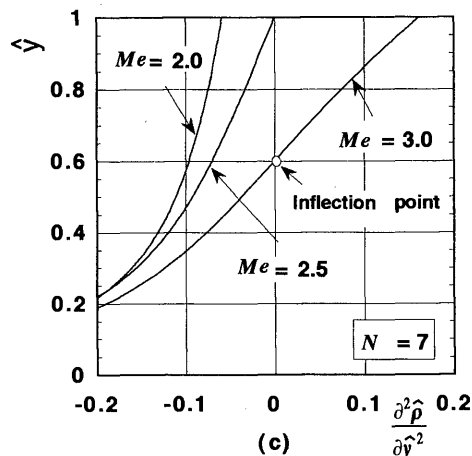
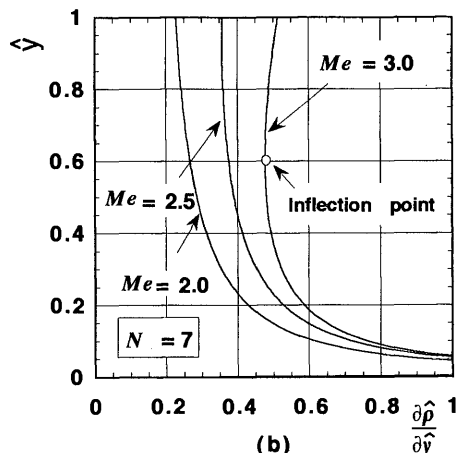
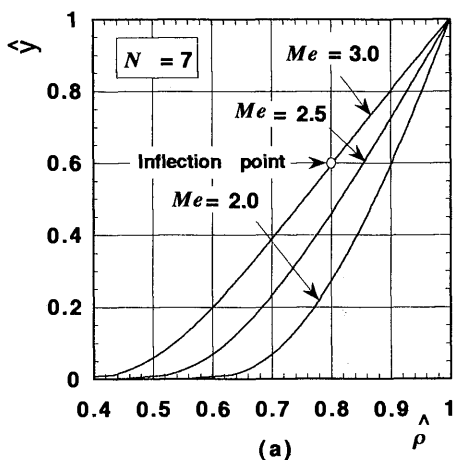


Fig. 3 Variations of density-profile in boundary-layer with Mach number

の  $\hat{y}$  に関する一次微分 [式(7)], 密度の  $\hat{y}$  に関する二次微分 [式(8)] を示し, 縦軸はいずれも境界層厚さ  $\delta$  で無次元化した壁面からの垂直距離  $\hat{y}$  を示す. Fig. 2 と 3 の (a) より, 境界層内の密度分布は  $N$  が大きいほど, また  $Me$  が小さいほどふくらみをもつ. また Fig. 2 と 3 の白丸印で示すように,  $N$  が小さいときあるいは  $Me$  が大きいときには, 境界層内に変曲点がある. Grubman はこの変曲点の位置がシェリーレン写真に境界となって写るとした. なぜならナイフエッジを流れ方向に平行において写したシェリーレン写真は, 流れに垂直方向の距離に関する密度の一次微分, すなわち式(4)を示している. そして密度勾配が増加するとしだいに暗く(あるいは明るく)なり, 写真の最も暗くなった部分(あるいは最も明るくなった部分)は, 密度勾配が最大となる. したがって密度分布に変曲点があれば, その位置が境界となって現れる. この密度勾配が最大の点は, 数学的には密度の  $y$  に関する二次微分がゼロであるから,  $y = h_{bl}$  をその高さとする, 境界層厚さ  $\delta$  は

$$\delta = \left\{ \frac{(N+2)m^2}{(N-2)(1+m^2)} \right\}^{N/2} h_{bl} \quad (N > 2) \quad (9)$$

となる.  $N=2$  のときには式(5)より  $\delta=0$  となり, また  $N < 2$  のときには式(9)の括弧の中が負であるから  $\delta$  は虚数になる.  $N$  をパラメーターとして  $\delta/h_{bl}$  と  $Me$  の関係を Fig. 4 に示す. ただし, Fig. 1 に示すように,  $y > \delta$  では  $u/u_e = 1$  であるから,  $\delta/h_{bl} < 1$  の解

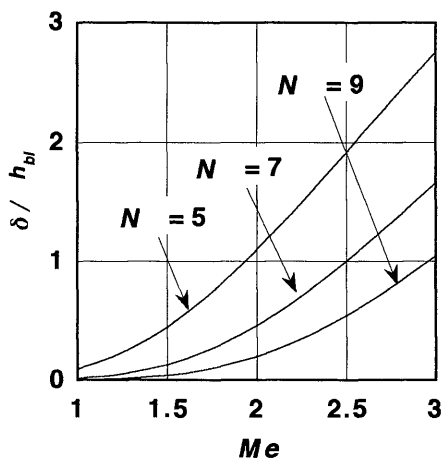
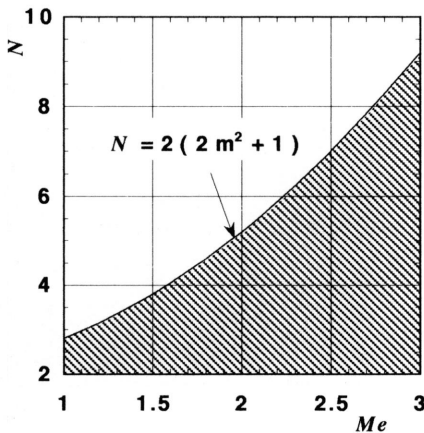


Fig. 4 Estimation of boundary-layer thickness by Grubman

は意味がない。例えば  $M_e = 2.5$  で  $N = 9$  のときには、**Fig. 2** からわかるように境界層内に変曲点は存在しない。つまり **Fig. 4** の  $\delta/h_{bl} < 1$  の曲線は **Fig. 1** の速度分布を  $y > \delta$  の場所で  $u/u_e = 1$  とせず、 $u/u_e = (y/\delta)^{1/N}$  としたときの解である。式(9)の意味のある解は  $\delta/h_{bl} > 1$  であるから式(9)より次式が導かれる。

$$N < 2(2m^2 + 1) \tag{10}$$

式(10)の結果を **Fig. 5** に示す。斜線は  $N < 2(2m^2 + 1)$  の範囲を示し、この範囲では、境界層内の密度分布に変曲点が存在する。それ以外では、境界層内に変曲点が存在しない。Grubman が提案しているように、シュリーレン写真にみられる境界が、境界層内の変曲点の位置を表しているとすれば、**Fig. 5** の斜線より上の流れ場では、境界はみられないことになる。しかし3節で示すように、境界層内の密度分布に変曲点がないような流れ場の場合にも、シュリーレン写真に境界は見られる。これは次の理由による。 $y \geq \delta$  では、密度の  $y$  に関する1次および2次微分は必然的にゼロとなる。すなわち、たとえ境界層内に変曲点が現れなくても  $y = \delta$  で密度勾配は急激に変化し、この位置がシュリーレン写真に境界となって現れる。また  $N < 2(2m^2 + 1)$  の場合には、2つの境界が現れることが予想される。1つは密度分布の変曲点の位置  $y = h_{bl}$  で、もう1つは  $y = \delta \geq h_{bl}$  の位置である。従って

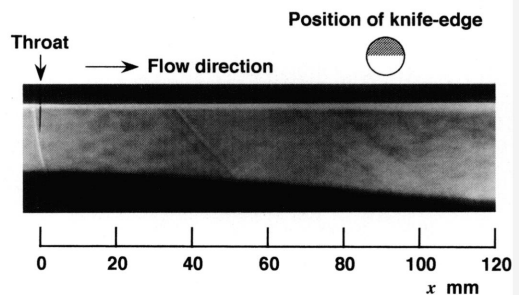


**Fig. 5** Inflection point of density-profile in boundary-layer with Mach number and velocity-profile parameter

境界層内の密度分布に変曲点が存在してもしなくてもシュリーレン写真から境界層厚さを見積ることができる。

### 3. シュリーレン写真による境界層厚さの評価

2節で述べたように、ナイフエッジを流れに平行にして写したシュリーレン写真には、壁面のすぐ上に、壁面とはほぼ平行に明るさが急激に変化する場所が境界となって見える。その壁面から境界までの高さは、 $N > 2(2m^2 + 1)$  のときには、境界層厚さ  $\delta$  そのものに等しい。その妥当性を検証するために、超音速ノズル<sup>9)</sup>に発達する乱流境界層を Tucker の方法によって計算し、シュリーレン写真から得られる  $\delta$  と比較する。**Fig. 6** はノズル内をすべて超音速状態とし、ナイフエッジを流れに平行にして上から光をささぎって撮ったシュリーレン写真である。流れは左から右で写真の左端に、スロートの位置を縦線で示し、写真の下にノズルスロートからの距離  $x$  を示す。なお  $x = 100\text{mm}$  において  $M_e = 1.67$  で、この位置におけるスロートからの距離に基づくレイノルズ数  $Re_{ye}$  は  $1.58 \times 10^6$  である。従って  $x = 100\text{mm}$  の位置の境界層内の速度分布指数  $N$  は、 $N = 2.2Re_{ye}^{(1/14)} / (1 + m^2/2)^{(1/7)} = 5.9$  となる<sup>1)</sup>。 $x = 100\text{mm}$  の位置は、**Fig. 5** に示した斜線の上の領域に入り、境界層内の密度分布に変曲点はない同様に、**Fig. 6** のシュリーレン写真のすべての  $x$  の範囲の境界層内の密度分布に変曲点は存在しない。



**Fig. 6** Schlieren photograph of supersonic nozzle in case of full supersonic

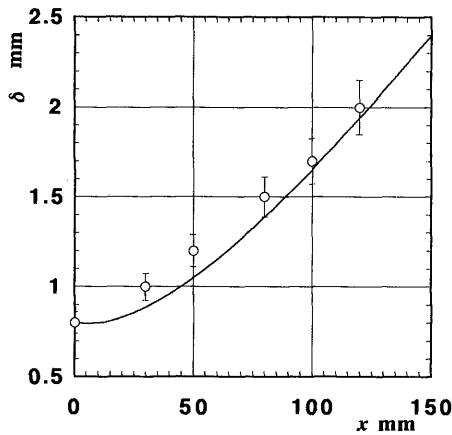


Fig. 7 Comparison of calculation and boundary-layer from schlieren photograph

さて Fig. 6 は光を上からさえぎっているためノズル上壁の境界層は白く写り、ノズル下壁の境界層は黒く写っている。Fig. 2 と 3 の (b) からわかるように密度勾配は壁から離れるほど減少するために、ノズルの上壁では壁から離れるほど明るさの程度が減少している<sup>3)</sup>ことがわかる。また上下壁とも明るさが急激に変化する位置があることがわかる。上述したように、Fig. 6 のすべての  $x$  の範囲において境界層内の密度分布に変曲点は存在しないため、この位置までの高さは境界層厚さ  $\delta$  に等しい。このことを明らかにするため、拡大したシュリーレン写真から読み取った  $\delta$  を丸印で Fig. 7 に示す。図中の曲線は Tucker の方法による計算結果である。計算の条件は、上流のよどみ圧力およびよどみ温度をそれぞれ  $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$ ,  $T_0 = 288 \text{ K}$ , スロート ( $x = 0 \text{ mm}$ ) における境界層厚さを  $\delta = 0.8 \text{ mm}$  として与えた。なお、レーザードップラー流速計により求めた  $\delta$  はシュリーレン写真により求めた値と 15% しか違わないということが報告<sup>7)</sup>されているため、Fig. 7 には、写真から読み取った値の 15% の範囲もエラーバーで示している。Fig. 7 より測定結果は計算とかなりよく一致することがわかる。この結果、 $N > 2 (2m^2 + 1)$  のとき、シュリーレン写真にみられる境界線までの壁からの高さは境界層厚さであ

ることがわかる。なお、 $N < 2 (2m^2 + 1)$  のとき、シュリーレン写真に境界が 2 つ見られることが予想される。1 つは密度分布の変曲点の位置  $y = h_{bl}$ , もう 1 つは境界層外端までの高さ  $y = \delta \geq h_{bl}$  である。

#### 4. 結 論

完全気体、断熱壁面、境界層内で全温度と静圧が一定で速度分布を  $1/N$  乗則と仮定したときに、シュリーレン写真から得られる境界層厚さの評価について解析的に検討した結果、次の結論が得られた。

(1) 比熱比を  $\gamma$ , 主流マッハ数を  $M_e$ , 速度分布指数を  $N$  とおくと、境界層内の密度分布には、 $N > 2 ((\gamma - 1) M_e^2 + 1)$  のとき変曲点は現れず、 $N < 2 ((\gamma - 1) M_e^2 + 1)$  のとき現れる。

(2)  $N > 2 ((\gamma - 1) M_e^2 + 1)$  のとき、ナイフエッジを流れに平行にして取ったシュリーレン写真には、壁面のすぐ上で明るさが急激に変化するところが壁面にほぼ平行に境界となつて 1 つみられ、その壁面からの高さは境界層厚さ  $\delta$  に等しい。また  $\delta$  のシュリーレン写真からの測定結果と Tucker の方法による計算結果は比較的良好一致する。

(3)  $N < 2 ((\gamma - 1) M_e^2 + 1)$  のとき、上述の境界は、2 つみられることが予想される。その壁面に近い 1 つめの境界までの高さは、密度分布の変曲点までの高さを示し、2 つめの境界までの高さは、 $\delta$  を表すものと思われる。

#### 参 考 文 献

- 1) 宮里・ほか 2 名, 九州大学総合理工学研究科報告, 16-3 (1994), 315.
- 2) McNally, W. D., NASA TN D-5681, (1970).
- 3) 生井・松尾, 圧縮性流体の力学, (1977), 171, 理工学社.
- 4) 生井・ほか 3 名, 九州大学総合理工学研究科報告, 5-2 (1983), 173.
- 5) 杉山・ほか 3 名, 機論 B52-484 (1986), 3859.
- 6) Doerffer, P. and Zierep, J., Acta Mechanica, 73, (1988), 77.
- 7) Carroll, B. F. and Dutton, J. C., J. of propulsion and Power, 6-2, (1990), 186.
- 8) Grubman, D. H., ARS J., 32-8 (1962), 1296.
- 9) Hong, J. W. et al., Engineering Science Reports, Kyushu University., to be published.