

超音速自由噴流の TVD 法による数値解析

益田, 光治
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

佐藤, 義智
(株)神戸製鋼所鉄鋼技術研究所

岩本, 勝治
(株)東芝重電技術研究所

樫村, 秀男
北九州工業高等専門学校制御情報工学科

他

<https://doi.org/10.15017/17316>

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 15 (3), pp.291-297, 1993-12-01. 九州大学大学院総合理工学研究科
バージョン :
権利関係 :

超音速自由噴流の TVD 法による数値解析

益田 光治*・佐藤 義智**・岩本 勝治***

檜村 秀男[†]・森 和彦^{††}

(平成5年8月30日 受理)

Numerical Simulation of Supersonic Freejets by TVD Method

Mitsuharu MASUDA, Yoshitomo SATO, Katsuharu IWAMOTO
Hideo KASHIMURA and Kazuhiko MORI

Supersonic freejets have been studied as a fundamental phenomenon of the supersonic fluid mechanics, and numerous works have been done experimentally as well as theoretically. Although the central isentropic region bounded by the barrel shock wave and the Mach disk has been clarified, it is still not possible to evaluate the detailed structures of the freejets. Present paper aims to offer fundamental information of the supersonic freejets, with an emphasis to give data with which the shape of the freejets can be depicted under a specified condition. The TVD finite-difference scheme is adopted for the numerical calculation of the Euler's equations. The distributions of the flow properties are obtained for the three-dimensional axisymmetric and the two-dimensional freejets. The data are summarized to enable an estimation of the shape of the freejets.

1. 序 論

比熱比5/3の単原子気体の場合、約2以上の圧力比で気体をオリフィスから噴出させると噴流は超音速になる¹⁾。このように超音速自由噴流は容易に得ることができ、構造が単純であるため、超音速流体力学の研究対象として多く用いられてきた。

軸対称の超音速自由噴流は、オリフィス前後の圧力比(よどみ圧/背圧)により大よそ Fig. 1 に示す構造を有する。(a) 図は圧力比があまり高くない場合である。この時、オリフィス出口端から発生した膨張波(expansion wave)が気体中を伝播し、噴流境界(jet boundary)に達する。膨張波は噴流境界で反射されるが、境界では圧力一定(背圧)の条件を受けるため、反射波は圧縮波となり、噴流境界も波の反射に伴って内側に曲げられる。この圧縮波は噴流中を伝播して噴流境界に入射されるが、再び境界で圧力一定の条件を

受けるため膨張波として反射され、以降、同様のパターンを繰り返す。いっぽう、圧力比が高い場合、(b) 図に示すように噴流境界で反射された圧縮波は先行する圧縮波に追付き合体して樽状の衝撃波(barrel shock wave)を形成するが、この衝撃波は噴流中心軸で正常交差できず、マッハ交差する。このマッハ衝撃波は円盤状をしているため、マッハ・ディスク(Mach disk)と呼ばれている。

超音速自由噴流については、これまでに多くの実験的研究が報告されている。とくに、高高度高速飛翔体開発用の風洞では、極超音速流を実現するために高圧力比の自由噴流を用いるが、1960~70年代にかけて風洞特性に関連し、ノズルからの流れを含めた噴流の研究が行われた²⁾⁻⁸⁾。これらの研究では、流れ場の測定に主としてピトー管が用いられたが、ピトー管は空間分解能があまりなく、樽状衝撃波、マッハ・ディスク噴流境界せん断層などの狭い領域で発生している急激な状態量の変化を明らかにすることはできなかった。シュリーレン法、シャドウグラフ法などの光学的測定も行われたが⁹⁾⁻¹⁰⁾、超音速噴流は本質的に三次元現象であるため、光路長の平均値のみが得られるこれらの方法では噴流の詳細な構造を明らかにできなかった。

* エネルギー変換工学専攻

** 株式会社神戸製鋼所 鉄鋼技術研究所

*** 株式会社東芝 重電技術研究所

[†] 北九州工業高等専門学校 制御情報工学科

^{††} エネルギー変換工学専攻修士課程

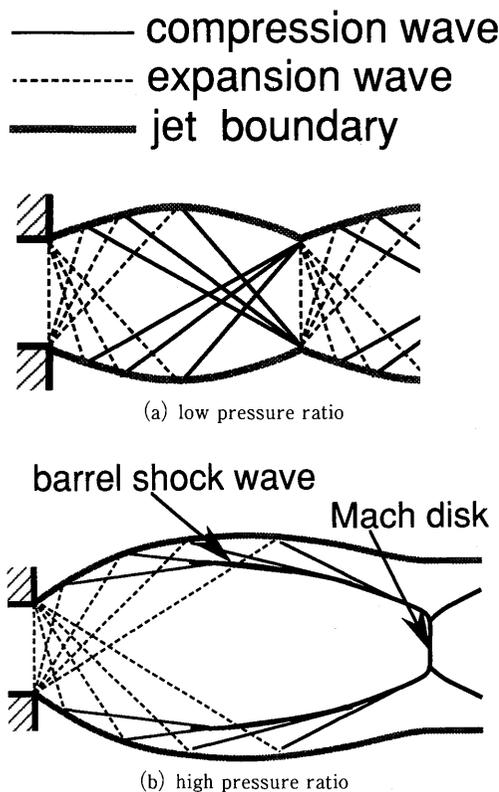


Fig. 1 Structure of supersonic freejets.

また、希薄な噴流に関しては、電子ビームにより気体を励起し、気体からの発光を観測して噴流中の密度分布を測定する技術も開発されたが^{11)~13)}、この方法は噴流の密度が高くなると電子ビームが減衰するため、有効ではなくなる。1980年代以降、レーザーを用いた流体計測法が進展してきた。とくに、トレーサーにヨウ素を用いるアルゴンレーザー蛍光法は噴流の非接触計測法として多くの研究がなされ^{14)~17)}、これを用いて噴流の幾何学的形状、速度分布、温度分布などが調べられた。また、蛍光法の応答速度が速いことを利用して、従来よく分かっていなかった噴流境界部の層流から乱流への遷移過程も明らかにされている¹⁸⁾。さらに、レーザー散乱法により、噴流境界断面形状に不安定性が存在することも分かってきた¹⁹⁾。

超音速自由噴流は樺状衝撃波、マッハ・ディスクを含み、噴流内部で流れが超音速から亜音速に減速される部分を含む。このような流れ場では噴流の挙動を記述する基礎方程式の形が変化するため²⁰⁾、理論解析は

難しい。特性曲線法を用いて噴流内の等エントロピー領域を解く試みがなされた⁹⁾。噴流を準一次元流れで近似し、噴流中心軸上の状態量とマッハ・ディスクの位置を求めるための簡単な近似式を提案した報告があり⁵⁾、計算が簡単で比較的精度が高いので、現在でもよく利用されている。準一次元近似は噴流境界の形状計算にも利用され²¹⁾、圧力比があまり高くない場合には実験と一致する結果が得られている。その後、数値計算技術の進展とともに非粘性の基礎方程式を直接差分化して噴流構造を明らかにする試みも行われ、いくつかの特徴ある解法が提案されてきた。いずれの方法においても、衝撃波の発生に伴う短い領域内の激しい状態量変化の計算方法に力点が置かれている。衝撃波を含む流れ場を計算すると、通常の方法では衝撃波面前後で数値解が振動する。この振動を抑えるため、人工粘性項を基礎方程式に導入し、急激な変化をこの粘性の効果によって滑らかにする解法が採られてきた²²⁾。いっぽう、近年、超音速流れ場を解析する手法の一つとして提案された TVD (Total Variation Diminishing) 法では²³⁾、人工粘性を仮定する必要がなく、衝撃波のような激しい状態量の変化も安定に計算できる特長がある。この方法では、激しい変化を含む部分で一次精度、その他の部分で二次精度になるように自動的に差分法が調整され、衝撃波は 2~3 格子点内で計算でき、また、衝撃波前後の解の振動も無いことが分かっている。TVD 法を用いた噴流の振動現象の解析が行われたが²⁴⁾、収束性の観点から定常解析を行うことは難しい。

このように超音速自由噴流は、風洞流れ、測定法の検定など、主として流体力学的側面から研究されてきた。いっぽう、近年、これを工業的に応用しようとする試みがなされ、粉末冶金用新素材²⁵⁾、特殊繊維の製造²⁶⁾や高電圧スイッチング²⁷⁾などで、超音速自由噴流が重要な要素になってきた。工業的応用に当たっては、噴流構造を理論的に予測する手段が必要であるが、現在までに予測可能なのは樺状衝撃波とマッハ・ディスクに囲まれた等エントロピー領域内部のみで、噴流の幾何学的形状、噴流境界せん断層と樺状衝撃波の間の領域、樺状衝撃波のマッハ交差領域などを予測することは難しく、実用上支障を来しているのが現状である。そこで、本報告では、TVD 法を初めて定常超音速自由噴流に適用し、その構造を理論的に解析した。対象としたのは比熱比 5/3 の単原子気体で、三次元軸対称

および二次元噴流の、圧力比が5から150までの領域である。とくに、噴流境界と樽状衝撃波の位置と形状は、周辺部に噴流の影響が及ぶ領域を規定する点から工業的に重要であるため、本解析結果をまとめ、これらを簡単に推定できる資料を提供した。

2. 基礎方程式と数値計算法

定常超音速流を支配する偏微分方程式は双曲形であるが、定常亜音速流の式は楕円型である²⁰⁾。このため、超音速自由噴流内部のように超音速流と亜音速流の両者が混在する場合、流れ場の内部で方程式の形が変化し、定常流の方程式を用いて数値解析を行うと解が発散する。このような場合には非定常項を含めることにより基礎方程式を放物形にし、無限時間後の極限の解を求めて定常解とする方法が一般的である。本解析においてもこの手法を用いた。

本報告では三次元軸対称と二次元の超音速自由噴流を取り扱うが、簡単のため、以下では三次元軸対称流れ場の方程式のみを記述する。気体は理想気体に粘性の影響を無視すると、非定常圧縮性流れ場の基礎方程式は以下ようになる。

質量保存

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} = 0 \quad (1)$$

軸方向運動量保存

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho uv)}{\partial r} + \frac{\rho w}{r} = 0 \quad (2)$$

半径方向運動量保存

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial r} + \frac{\rho v^2}{r} = 0 \quad (3)$$

エネルギー保存

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial (e+p)u}{\partial x} + \frac{\partial (e+p)v}{\partial r} + \frac{(e+p)v}{r} = 0 \quad (4)$$

ここで、 t は時間、 x は軸方向座標、 r は半径方向座標、 ρ は密度、 u は軸方向速度成分、 v は半径方向速度成分、 p は圧力、 e は単位体積当たりの内部エネルギーである。 e と p の間には次式の関係がある。

$$e = \frac{\rho}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2)$$

ただし、 γ は比熱比である。

次に、基礎方程式(1)～(4)を次の諸量で無次元化する。

$$x' = \frac{x}{D}, \quad r' = \frac{r}{D}, \quad t' = \frac{t}{\sqrt{\gamma} D / c^*}, \quad p' = \frac{p}{p^*},$$

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho^*}, \quad e' = \frac{e}{p^*}, \quad u' = \frac{u}{c^* / \sqrt{\gamma}}, \quad v' = \frac{v}{c^* / \sqrt{\gamma}}$$

ここで()'は無次元量で、()*は音速状態を示す。また、 D は代表寸法(オリフィスの場合は出口直径)、 c は音速である。これらの無次元量を用いると、基礎方程式は次式のように保存形に書き直すことができる。ただし、以下の式の展開において、混同の恐れはないので、無次元を示す()'は省略した。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial r} + W = 0 \quad (5)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix}, \quad W = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (e+p)v \end{bmatrix}$$

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2)$$

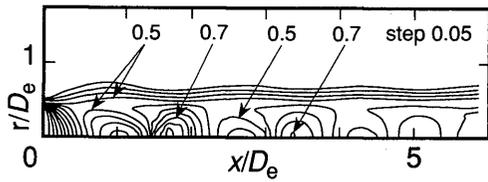
この方程式(5)を適当な境界条件の下で解くことにより、超音速自由噴流の流れ場を得ることができる。

先に述べたように、式(5)の数値解析にはTVD法を用いた。境界条件として、オリフィス出口の圧力、密度、速度を音速条件で与えた。また、オリフィス出口壁面と下流側では、圧力、密度、速度に関し時間ステップが一ステップ前の値を用い、これを境界条件とした。本計算の場合、とくに下流側の境界条件が重要で、この設定を誤ると時間ステップ毎に計算領域内で波動が伝播し、解が正常に求められなかった。

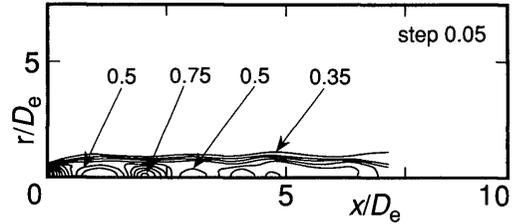
3. 計算結果と考察

数値解析結果の一例を Fig. 2 と Fig. 3 に示す¹⁾. これらは、それぞれ三次元軸対称および二次元噴流内の無次元密度の等高線で、(a), (b), (c) 図はよどみ圧 p_0 と背圧 p_∞ の圧力比が 5, 50 および 100 の場合である. また、横軸と縦軸は、オリフィス出口直径 (三次元軸対称) あるいは出口幅 (二次元) D_e で無次元化した距離を示す. これらの密度分布は Fig. 1 に示した噴流構造の模式図でよく説明できる. 圧力比が低い場合、オリフィス出口で発生した膨張波は噴流境界で反射して圧縮波となるが、この圧縮波は、先行する圧縮波に追付き合体して斜め衝撃波を形成する. しかし、

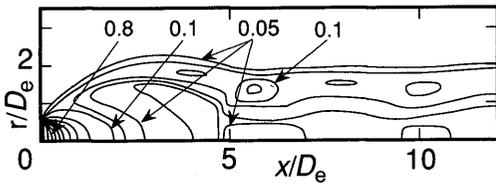
この斜め衝撃波による密度上昇は小さく、斜め衝撃波は噴流中央で正常交差する. このため、樽状衝撃波は形成されず、マッハ・ディスクも発生しない. いっぽう、圧力比が高くなると、噴流境界は膨張により著しく外側に膨らみ、これに伴って樽状衝撃波が形成される. また、この衝撃波は噴流中心で正常交差できず、マッハ交差してマッハ・ディスクが形成される. 圧力比の増大に伴う噴流境界の膨張とマッハ・ディスクの downstream への移動の状態がこれらの図に明瞭に示されている. また、Fig. 2 と Fig. 3 を比較すると、軸対称噴流は二次元噴流よりもオリフィス流出後の膨張過程が速く、オリフィスからマッハ・ディスクまでの距離も短いことが分かる.



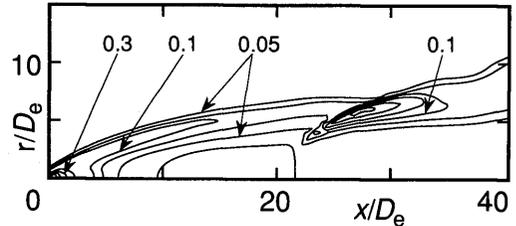
(a) pressure ratio = 5



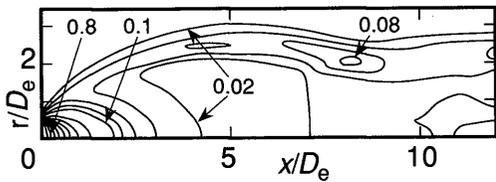
(a) pressure ratio = 5



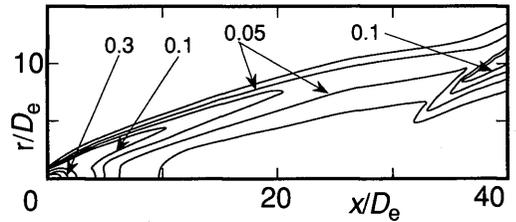
(b) pressure ratio = 50



(b) pressure ratio = 50



(c) pressure ratio = 100



(c) pressure ratio = 100

Fig. 2 Density distributions of three-dimensional axisymmetric freejets.

Fig. 3 Density distributions of two-dimensional freejets.

つぎに、**Fig. 4** と **Fig. 5** は、圧力比が50の場合のマッハ数 M と速度ベクトルの分布である。前述したように、この圧力比ではマッハ・ディスクが形成され、噴流中心付近の流れは超音速から亜音速に一旦減速される。計算結果を詳細に検討したところ、噴流中心上ではマッハ・ディスク前後で10%程度の精度で Rankine-Hugoniot の関係が³⁾が満足されており、TVD 法により良好な精度で噴流が解析できることが分かった。さらに、**Fig. 4** ではマッハ・ディスク後流で流れが再び超音速まで加速され、マッハ・ディスクの後流に二番目の圧縮領域が形成されている。このような噴流の規則的なセル構造は実験的にも観測されているが¹⁰⁾、第一マッハ・ディスク直後における噴流の再加速機構が複雑であるため、これまでの数値解析法では再現できなかった現象である。オリフィス出口からマッハ・ディスク上流までの樽状衝撃波に囲まれた部分は等エントロピー流れであるが、この領域は湧き出し流れ (source flow) で近似できるとされている⁵⁾。(b) 図の速度ベクトル分布を参照すると、この領域では流線が放射状になっており、湧き出し流れが妥当な近似であることが分かる。また、速度ベクトル分布を詳細に観察すると、樽状衝撃波によるベクトル方向の急激な変化を初め、マッハ・ディスク周辺部の樽状衝撃波とマッハ・ディスクとの交差点 (三重点) 近傍にお

ける流れ場の様子が本解析で良くとらえられることが分かった。

近年、超音速自由噴流は工業的に重要な要素になっ

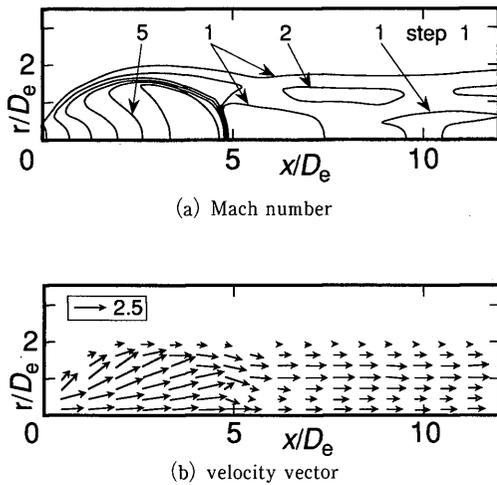
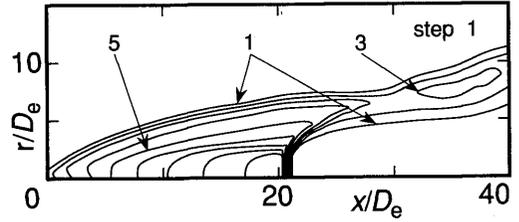
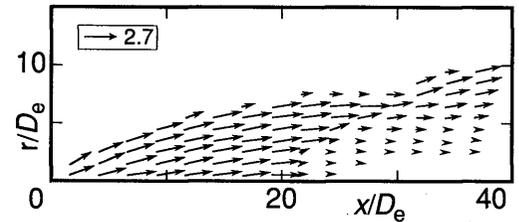


Fig. 4 Distributions of flow parameters in the three-dimensional axisymmetric freejet with pressure ratio of 50.



(a) Mach number



(b) velocity vector

Fig. 5 Distributions of flow parameters in the two-dimensional freejet with pressure ratio of 50.

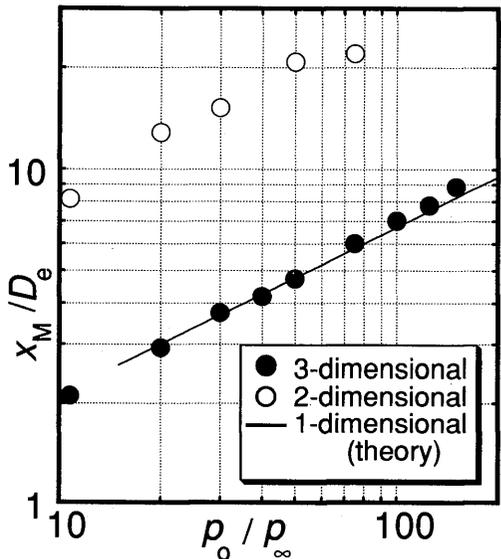


Fig. 6 Mach disk location.

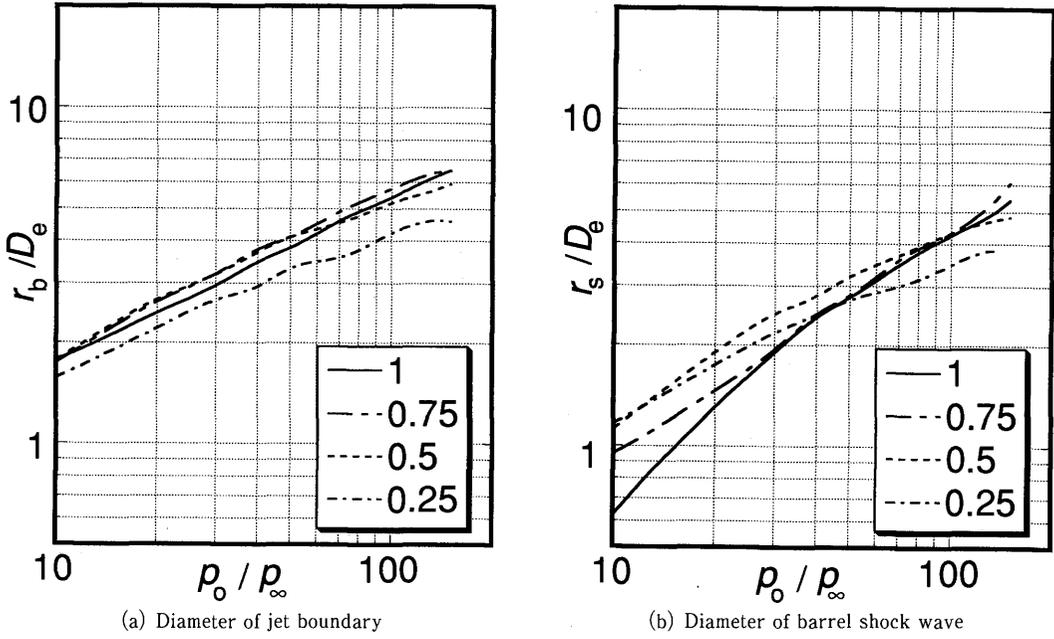


Fig. 7 Shape of three-dimensional axisymmetric freejet.

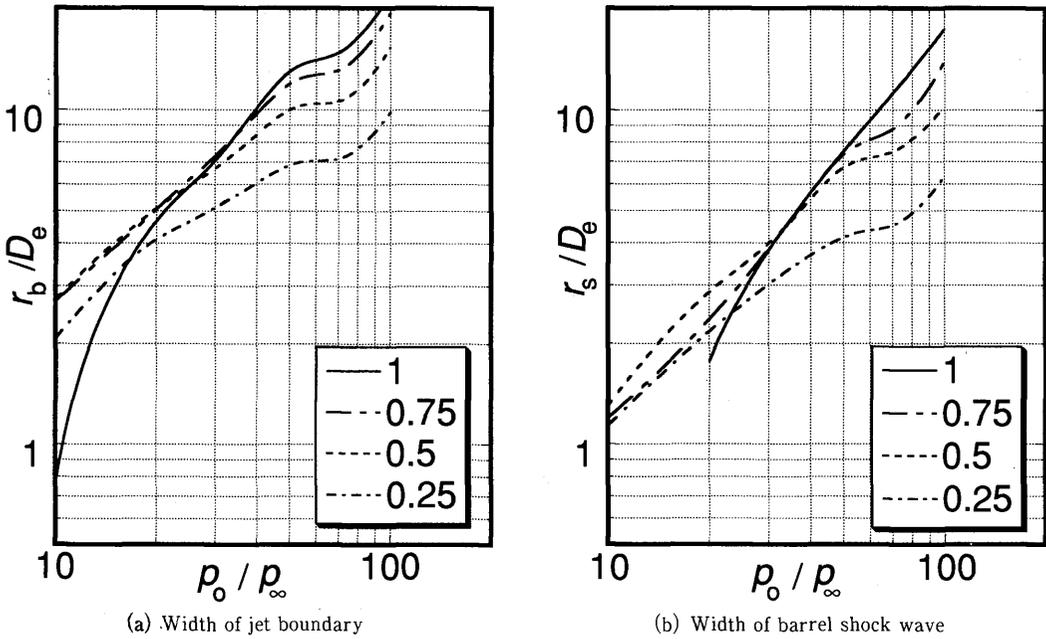


Fig. 8 Shape of two-dimensional freejet.

てきたが、実用上重要な噴流の幾何学的形状を簡単に予測できる手段は未だ提供されていない。本研究では、噴流の形状を表す代表的なパラメータとして、オリフィス出口からマッハ・ディスクまでの距離、噴流境界と樽状衝撃波の直径（三次元噴流）あるいは幅（二次元噴流）、の三つを取り上げた。Fig. 6 は D_e で無次元化したマッハ・ディスクの位置 x_M/D_e である。また、Fig. 7, Fig. 8 はそれぞれ三次元軸対称および二次元噴流の結果で、(a) 図が噴流境界の直径あるいは幅 (r_b/D_e)、(b) 図が樽状衝撃波の直径あるいは幅 (r_s/D_e) である。図中のパラメータは、各圧力比における x_M で無次元化したオリフィス出口からの距離を示す。なお、噴流境界と樽状衝撃波は、密度分布において対応する部分の x 軸に垂直な方向の勾配が最大値をとる位置として定義した。マッハ・ディスクの位置を示す Fig. 6 中の実線は準一次元近似理論であるが⁹⁾、これまでの多くの研究で確認されているように、この近似式によりマッハ・ディスク位置が高精度で予測可能なことが分かる。Fig. 6~Fig. 8 を用いれば、任意の圧力比の噴流の形状が容易に推定できる。これらの図は、圧力比が与えられた場合に、噴流の影響が及ぶ領域を見積もるための有用な資料を提供している。

4. 結 論

三次元軸対称および二次元の超音速自由噴流の構造を理論的に明らかにすることを目的とし、TVD法を用いた数値解析を行った。対象としたのは比熱比5/3の単原子気体で、オリフィス前後の圧力比が5から150までの領域を計算した。とくに、TVD法の定常超音速自由噴流への適用は、本研究による試みが最初である。解析の結果、噴流中の密度、圧力、速度ベクトルの分布が得られ、超音速自由噴流の詳細な構造が明らかにされた。また、噴流の幾何学的形状は、噴流の周辺部への影響領域を規定する意味で工業的に極めて重要である。本研究では、数値解析結果を整理し、マッハ・ディスク位置、噴流境界および樽状衝撃波の位置が容易に推定できる資料を提供した。これを用いることにより、指定された圧力比の超音速自由噴流の形状を簡単に評価することができる。

参 考 文 献

- 1) 生井・松尾, 圧縮性流体の力学, (1977), 理工学社.
- 2) Sherman, F. S. and Talbot, L., Hypersonic Flow Research,

- (ed. Riddell, F. R.), (1961), 581.
- 3) Potter, J. L., ほか3名, Hypersonic Flow Research, (ed. Riddell, F. R.), (1961), 599.
- 4) Kamimoto, G., Kimura, T. and Teshima, K., Dept. Aero. Eng., Kyoto Univ., CP7, (1965).
- 5) Ashkenas, H. and Sherman, F. S., Rarefied Gas Dynamics, 2, (1966), 84.
- 6) Witte, A., Kubota, T. and Lees, L., AIAA J., 7-5, (1969), 870.
- 7) Folck, J. L. and Smith, R. T., AIAA J., 8-8, (1970), 1470.
- 8) Ikui, T., Masuda, M. and Iwamoto, K., Mem. Faculty of Eng., Kyushu Univ., 33-2, (1973), 37.
- 9) Love, E. S., ほか3名, NASA Tech. Rept., R-6, (1959).
- 10) Donaldson, C. D. and Snedeker, R. S., J. Fluid Mech., 45-2, (1971), 281.
- 11) Rothe, D. E., Phys. Fluids, 9-9, (1966), 1643.
- 12) 保原, 航宇誌, 20-224, (1972), 490.
- 13) Coe, D., ほか3名, Phys. Fluids, 23-4, (1980), 715.
- 14) McDaniel, Jr. J. C., Stanford Univ., SUDAAR No. 532, (1982).
- 15) Hiller, B., Cohen, L. M. and Hanson, R. K., AIAA-86-0161, (1986).
- 16) Fujimoto, T., ほか4名, Rarefied Gas Dynamics, 1, (1984), 467.
- 17) 手島, レーザー研究, 12-11, (1984), 614.
- 18) Masuda, M., ほか4名, Progress in Astro. Aero., 117, (1989), 149.
- 19) Novopashin, S. A. and Perepelkin, A. L., Physics Lett. A, 135-4, 5, (1989), 290.
- 20) Patterson, G. N., Molecular Flow of Gases, (1956), John Wiley & Sons, Inc.
- 21) Adamson, T. C. and Nicholls, J. A., J. Aero/Space Sci., 26-1, (1959), 16.
- 22) Saito, T., Nakatsuji, H. and Teshima, K., Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., 28-82, (1986), 240.
- 23) Yee, H. C., NASA TM 89464, (1987).
- 24) 樫村・安信, 可視化情報, 11-2, (1991), 31.
- 25) Klar, E. and Fesco, J. W., Metals Handbook, 9th Ed., (1984), 25.
- 26) 中山, 機能性不織布の開発と応用, 中村編, (1988), (株)ジスク.
- 27) 岩本・池田, 議論 (B), 55-515, (1989), 1802.

注)

マッハ・ディスク (Mach disk) および樽状衝撃波 (barrel shock wave) は三次元軸対称噴流での名称で、二次元噴流ではこれらの現象に対応する呼称は定まっていない。前者は Mach shock wave, 後者は bounding shock wave あるいは intercepting shock wave と呼ばれることもある。本論文では三次元、二次元の両噴流ともマッハ・ディスク、樽状衝撃波の名称で統一した。