

## MHD 相互作用を伴うプラズマ流れの数値解析（等速，等温及び等圧条件の場合）

青木，俊之  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

右近，哲哉  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

酒井，大志  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

松尾，一泰  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

<https://doi.org/10.15017/17299>

---

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告．15（1），pp.43-49，1993-06-01．九州大学大学院総合理工学研究科

バージョン：

権利関係：



## MHD 相互作用を伴うプラズマ流れの数値解析 (等速, 等温及び等圧条件の場合)

青木 俊之\*・右近 哲哉\*\*  
酒井 大志\*\*\*・松尾 一泰\*

(平成5年2月26日 受理)

### Numerical Analysis of One-Dimensional Plasma Flow with MHD Interaction (Constant-velocity, constant-temperature and constant-pressure conditions)

Toshiyuki AOKI\*, Tetuya UKON\*\*, Taishi SAKAI\*\*\*, Kazuyasu MATSUO\*

In this study some of the numerical analyses of one-dimensional compressible flow with magnetohydrodynamic (MHD) interaction have been carried out. A detailed study of this type of flow is vital for an understanding of many practical devices, such as the MHD generator, accelerator and pump. The steady conservation equations, coupled with the generalized Ohm's law, were solved. Numerical results for channels with flows of constant velocity, temperature and pressure, respectively, could be obtained, but a rather peculiar area variation is required. As in the case of a constant velocity flow, the channel can be classified into a total of three possible types dependent on the load factor, and the flow Mach number decreases with an increase in the load factor. On the other hand, in the case of a constant temperature flow, the flow Mach number increases with an increase in the load factor. There is some precise set of initial flow properties that flow velocity reaches sonic and smooth acceleration or deceleration through sonic condition occurs.

#### 1. ま え が き

導電性流体と電磁場との相互作用, すなわち MHD 相互作用により, 導電性流体に電磁力 (ローレンツ力) が作用することはよく知られている. この原理に基づき, 原子炉における冷却媒体用の液体金属や冶金・鑄造工業における溶融金属の移送のための電磁ポンプ, 人工衛星や宇宙ロケットでのプラズマ推進などへの応用が研究され, 一部実用化されている. このうち, プラズマ推進はプラズマが MHD 相互作用により加速されるときに生じる反作用の力を推力として利用するものであり, 比推力が大きくとれることから人工衛星などへの利用に最適な方法と言われている<sup>1)2)</sup>. また, 中間層を通過しさらにその上空を超高速で飛行する TAV (Transatmospheric Vehicle) の研究開発に先立ち, 実用化が必要とされる地上実験用の極超音速

風洞に, MHD 加速機を利用することが検討されている<sup>3)</sup>. このような状況から, 今後 MHD 加速機内を高速で流れるプラズマの流動特性についての理論的, 実験的研究がますます必要となってくる. 従来の MHD 相互作用を伴うプラズマ流れに関する研究の大半は MHD 発電機内部の流れに関連したものであり, 加速機内の流動特性についての研究は比較的少なく, 不明な点が多い.

本研究は, MHD 加速機等のチャンネルにおける MHD 相互作用を伴うプラズマ流れの諸量の変化や流動条件がチャンネル形状に及ぼす影響について明らかにすることを目的とする. そのため, 本報では, 流れ方向に対し流速, 温度及び圧力のうちいずれかを一定に保つという流動条件において流れ場を数値解析した.

#### 2. 解 析 方 法

Fig. 1 に示すように, ファラデー型 MHD チャンネルの入口を原点として座標軸  $(x, y, z)$  をとる. 導電率  $\sigma$  を持つプラズマが流速  $\mathbf{u}$  で流れ,  $z$  軸に垂直な壁

\*エネルギー変換工学専攻

\*\*エネルギー変換工学専攻博士後期課程

\*\*\*エネルギー変換工学専攻修士課程

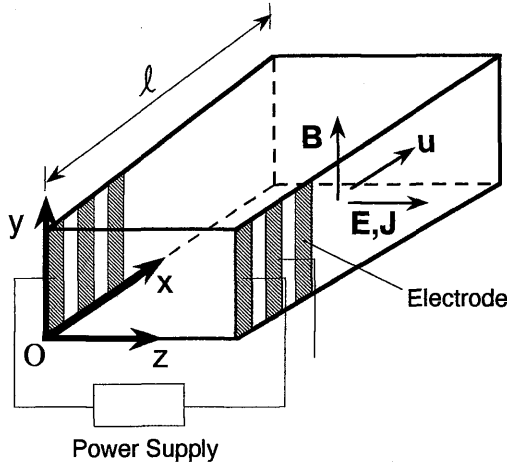


Fig. 1 Schematic diagram of MHD accelerator.

面には x 方向に無限分割された電極が配置されており、電極間及び y 軸に垂直な壁面は絶縁されているものとする。それぞれ対向する電極には外部回路が接続され、チャンネルの y 方向に磁束密度  $\mathbf{B}$  が印加されているとする。

チャンネルに一次元理論<sup>4)</sup>を適用し、流路壁面における摩擦及び熱伝導による損失を無視し、磁束密度  $\mathbf{B} = (0, B, 0)$ 、電界  $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ 、電流密度  $\mathbf{J} = (0, 0, J)$ 、流速  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$  と仮定すれば、流れの基礎方程式は次のようになる。

$$\text{連続の式} \quad \frac{d}{dx}(\rho u A) = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動量の式} \quad \rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} - JB \quad (2)$$

$$\text{エネルギーの式} \quad \rho u \frac{d}{dx} \left( \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} \right) = JE \quad (3)$$

$$\text{状態方程式} \quad p = \rho RT \quad (4)$$

$$\text{オームの法則} \quad J = \sigma (E + uB) \quad (5)$$

$$\text{マクスウェル方程式} \quad \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx} = J \quad (6)$$

ここで  $\rho$  は密度、 $A$  は断面積、 $p$  は圧力、 $\gamma$  は比熱比、 $R$  は気体定数、 $T$  は温度、 $\mu_0$  は透磁率である。次にチャンネルの長さ  $l$  やチャンネル入口における値などにより無次元化した下記のパラメータを定義する<sup>5)</sup>。

$$X' = \frac{x}{l}, \quad u' = \frac{u}{u_i}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_i}, \quad p' = \frac{p}{p_i}$$

$$T' = \frac{T}{T_i}, \quad B' = \frac{B}{B_i}, \quad A' = \frac{A}{A_i} \quad (7)$$

$$\text{磁気干渉パラメータ} \quad N = \frac{\sigma B_i^2 l}{\rho_i u_i} \quad (8)$$

$$\text{磁気レイノルズ数} \quad R_m = \mu_0 \sigma l u_i \quad (9)$$

$$\text{電圧利用率} \quad K = -\frac{E}{uB} \quad (10)$$

ここで添え字  $i$  はチャンネル入口での値であることを示す。式 (7) ~ (10) と音速  $a = \sqrt{\gamma RT}$ 、流れのマッハ数  $M = u/a$  を用いて式 (1) ~ (6) を整理し、各微係数について解くと、以下の諸式が得られる<sup>6)</sup>。

$$\frac{1}{u'} \frac{du'}{dX'} = - (1-K) NB'^2 A' \frac{\{\gamma - (\gamma - 1)K\} M^2}{M^2 - 1} + \frac{1}{M^2 - 1} \frac{1}{A'} \frac{dA'}{dX'} \quad (11)$$

$$\frac{1}{\rho'} \frac{d\rho'}{dX'} = (1-K) NB'^2 A' \frac{\{\gamma - (\gamma - 1)K\} M^2}{M^2 - 1} - \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{1}{A'} \frac{dA'}{dX'} \quad (12)$$

$$\frac{1}{p'} \frac{dp'}{dX'} = \gamma (1-K) NB'^2 A' \frac{(\gamma - 1)(1-K)M^4 + M^2}{M^2 - 1} - \frac{\gamma M^2}{M^2 - 1} \frac{1}{A'} \frac{dA'}{dX'} \quad (13)$$

$$\frac{1}{T'} \frac{dT'}{dX'} = (\gamma - 1)(1-K) NB'^2 A' \times \frac{\gamma M^2 + \gamma (1-K)M^4}{M^2 - 1} - \frac{(\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} \frac{1}{A'} \frac{dA'}{dX'} \quad (14)$$

$$\frac{1}{M^2} \frac{dM^2}{dX'} = - (1-K) NB'^2 A' \times \frac{\{2\gamma - (\gamma - 1)K\} M^2 + \gamma (\gamma - 1)(1-K)M^4}{M^2 - 1} + \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} \frac{1}{A'} \frac{dA'}{dX'} \quad (15)$$

$$\frac{dB'}{dX'} = (1-K) R_m u' B' \quad (16)$$

本計算では、与えられた電圧利用率  $K$ 、干渉パラメータ  $N$  とチャンネル入口でのマッハ数  $M_i$  に対し、式(11)～(15)のいずれかの左辺をゼロとおいて流れの諸量のいずれかを一定する三種類の流動条件を課し、そのときの断面積変化  $dA'/dX'$  及び流れの諸量を数値積分により求める。なお作動気体は単原子気体 ( $\gamma = 1.67$ ) とし、磁気レイノルズ数  $R_m = 0$  とする。また、磁束密度  $B$ 、電圧利用率  $K$  及び干渉パラメータ  $N$  は流れ方向に対し一定とする。

### 3. 解析結果

#### 3.1 等速流れにおけるチャンネル内の流動特性と断面積変化

チャンネル入口におけるマッハ数  $M_i = 0.8$ 、干渉パラメータ  $N = 0.2$ 、電圧利用率  $K = 1.5$  とし、流れ方向に流速が一定の場合の流れの諸量の変化を Fig. 2 に示す。ここで縦軸は無次元の断面積、温度、圧力、密度及び流れのマッハ数であり、横軸は無次元距離  $x/l$  である。図より流れ方向に対し温度が上昇しており、外部回路から供給される電気的エネルギーが作動流体のエンタルピーに変換されることを表わしている。したがって作動流体中の音速も流れ方向に増加するので、マッハ数は逆に減少する。また、ローレンツ力  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  は流れを加速させる方向に働くが、等速流れの場合、作動流体に働く圧力勾配による力とローレンツ力とは釣り合うので、圧力は流れ方向に増加する。電圧利用率  $K$  の値が大きくなると、チャンネルの電極間に印加される電界が大きくなるので、流れの諸量の変化は大きくなる。

Fig. 2 において、断面積は流れ方向に減少し密度は増加しているが、この両者は  $K$  の値によってそれぞれ変化の傾向が変わる。この様子を見るために、パラ

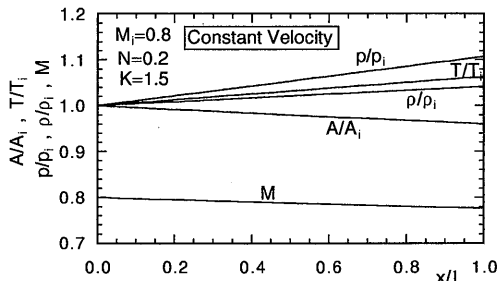


Fig. 2 Variation of properties for constant-velocity flow.

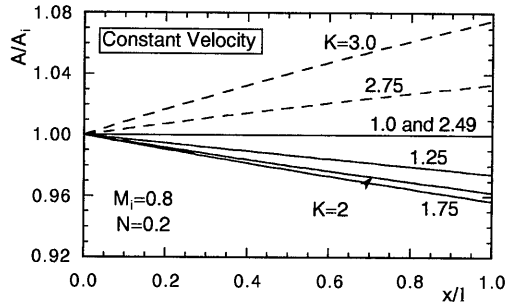


Fig. 3 Variation of cross-sectional area for constant-velocity flow as a function of  $K$ .

メータを  $K$  とした場合の断面積の変化を Fig. 3 に示す。その他の入口条件は Fig. 2 と同じである。 $K$  の値を 1 から増加させると断面積の減少は次第に大きく、先細型となり、

$$K = \frac{2\gamma - 1}{2(\gamma - 1)} = 1.746 \quad (17)$$

のときに減少量は最大となる。さらに  $K$  を大きくすると断面積の減少は緩やかになり、

$$K = \frac{\gamma}{\gamma - 1} = 2.493 \quad (18)$$

において変化はゼロとなる。すなわち断面積一定のチャンネルで等速流れが実現することになる。さらに  $K$  を大きくすると断面積は増加するようになりチャンネルは末広型の流路となる。このように  $K$  の値によって断面積変化の傾向が変わるのは、電極間に印加される電界が比較的小さい  $1 < K < \gamma / (\gamma - 1)$  の範囲では、チャンネル内で発生するジュール熱が作動流体のエンタルピーに変換する際、主に温度上昇という形で現れるのに対し、印加電界の大きい  $K > \gamma / (\gamma - 1)$  の範囲では、エンタルピーの増加が著しくなった結果、作動流体の温度上昇とともに熱膨張による体積増加がもたらされるようになるためと考えられる。また質量の連続性から密度変化は断面積変化と全く逆になり、 $1 < K < \gamma / (\gamma - 1)$  では流れ方向に対し増加し、 $K > \gamma / (\gamma - 1)$  で減少する。

次にチャンネル入口におけるマッハ数を  $M_i = 0.8$ 、 $N = 0.2$  とし、パラメータを  $K$  としたときのマッハ数の変化を Fig. 4 に示す。図より、 $K$  が大きくなるとマッハ数は減少率が大きくなる。これは  $K$  が大きく

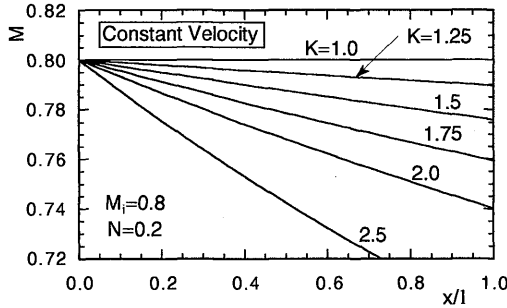


Fig. 4 Variation of Mach number for constant-velocity flow as a function of K.

なると温度の上昇は大きくなり、且つ流速は一定であるためである。また、 $M_i$  が 1 以上の超音速の場合もこの変化の傾向は同様で、チャンネル内でマッハ数が 1 となるような場合においても流れはチョークしない<sup>2)</sup>。等速流れという流動条件下では、断面積変化が流れに及ぼす影響と、ローレンツ力及びジュール熱が流れに及ぼす影響とが互いにキャンセルされたとき同時にマッハ数が 1 となり、流れは連続的に超音速域から亜音速域へ移行するものと考えられる。最後に、等速流れにおける諸量の変化をまとめて Table 1 に示す。参考としてチャンネルが発電機として作動する場合 ( $0 < K < 1$ ) の諸量の変化も示す。

3.2 等温流れにおけるチャンネル内の流動特性と断面積変化

チャンネル内で温度が一定の場合のチャンネル内の諸量の変化を Fig. 5 に示す。その他の流動条件は Fig. 2

Table 1 Relationship between K and flow properties for constant-velocity flow.

	$0 < K < 1$	$K > 1$
dA	+	- for $1 < K < \frac{\gamma}{\gamma-1}$ + for $K > \frac{\gamma}{\gamma-1}$
dM	+	-
dT	-	+
dp	-	+
dρ	-	+ for $1 < K < \frac{\gamma}{\gamma-1}$ - for $K > \frac{\gamma}{\gamma-1}$

と同じで、入口マッハ数  $M_i=0.8$ 、干渉パラメータ  $N=0.2$ 、電圧利用率  $K=1.5$  である。図から明らかなように、流速は流れ方向に対し増加している。これはローレンツ力が作動流体を加速する方向に働くことによって、外部から供給される電気的エネルギーが運動エネルギーに変換されるためである。チャンネル内では音速一定であるから、流れ方向に対しマッハ数も増加するが、圧力と密度は反対に減少する。

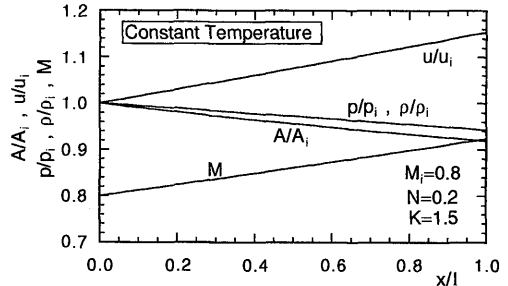


Fig. 5 Variation of properties for constant-temperature flow.

Fig. 5 に示すようにチャンネルの断面積は流れ方向に減少しており、その変化の様子は K や  $M_i$  の値により傾向が変化する。パラメータを K とし、チャンネル断面積の変化の一例を Fig. 6 に示す。その他の条件は Fig. 5 と同じである。図において、実線で示した  $K < 1.75$  の場合、断面積は単調減少するのに対し、破線で示した  $K=2.0$  では点 b で示す  $x/l=0.825$  で最小断面となった後、 $x/l > 0.825$  で断面積は増加する。式 (14) より等温流れにおける断面積の変化率  $dA'/dX'$  は、

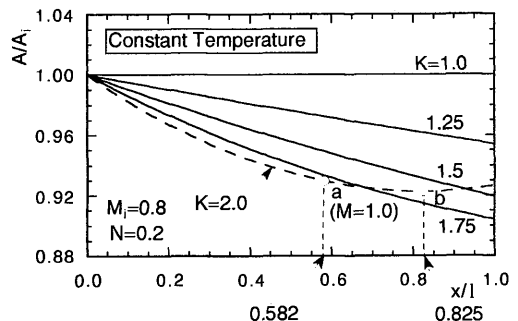


Fig. 6 Variation of cross-sectional area for constant-temperature flow as a function of K.

$$\frac{dA'}{dX'} = (1-K)NB'^2A'^2 \{K + \gamma(1-K)M^2\} \quad (19)$$

となり、この式より

$$M < \sqrt{\frac{K}{\gamma(K-1)}} \quad \text{のとき} \quad \frac{dA'}{dX'} < 0 \quad (20)$$

$$M > \sqrt{\frac{K}{\gamma(K-1)}} \quad \text{のとき} \quad \frac{dA'}{dX'} > 0 \quad (21)$$

の関係が得られる。ただし  $K > 1$  である。Fig. 6 の  $K = 2.0$  の場合において、点 b より上流側 ( $x/l < 0.825$ ) は式 (20) の状態に、下流側 ( $x/l > 0.825$ ) は式 (21) の状態に対応している。なお、図中の点 a は  $M = 1$  となる位置を示し、詳細は後述する。

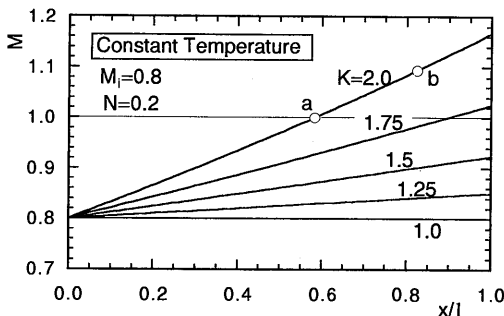


Fig. 7 Variation of Mach number for constant-temperature flow as a function of K.

次にパラメータを  $K$  とし、得られたチャンネル内のマッハ数の変化を Fig. 7 に示す。図よりいずれの  $K$  の値に対しても  $M$  は単調増加し、 $K = 1.75$  及び  $K = 2.0$  のとき、等速流れと同様に流れはチョークすることなく音速状態を連続的に通過する。 $K = 2.0$  において、マッハ数が  $M = 1$  となる点 a の位置は  $x/l = 0.582$  であるのに対し、チャンネルの断面が最小となる点 b ( $x/l = 0.825$ )、いわゆるチャンネルのスロートでのマッハ数は、次式で計算でき、 $M = 1.094 > 1.0$  で流れは超音速である。

$$M = \sqrt{\frac{K}{\gamma(K-1)}} \quad (22)$$

このように等温流れではチャンネルがスロートを形成するが、通常スロートにおいてマッハ数は  $M = 1$  とはならない。これは作動流体にローレンツ力とジュール熱

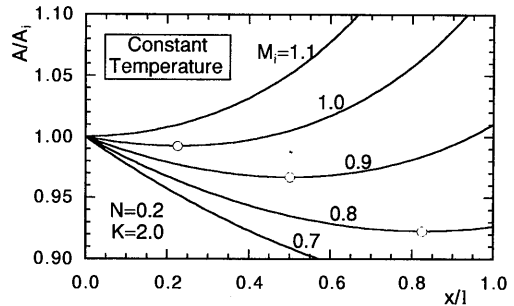


Fig. 8 Variation of cross-sectional area for constant-temperature flow as a function of  $M_1$

が作用しているためにもたらされる現象であり、スロートにおけるマッハ数  $M$  は電圧利用率  $K$  の値に依存する。

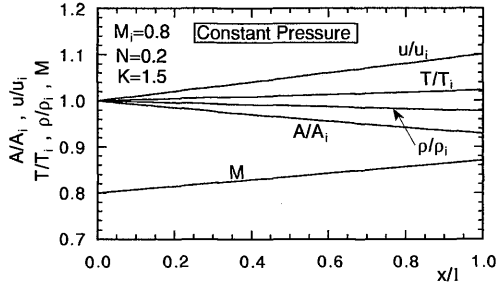
次にパラメータを入口マッハ数  $M_1$  とし、 $N = 0.2$ 、 $K = 2.0$  の場合のチャンネルの断面積変化を Fig. 8 に示す。図から明らかなように、断面積変化は、(i)チャンネル内で常に単調減少する場合、(ii)始めは単調減少するが、一旦最小断面をとった後、以降単調増加する場合、(iii)チャンネル内で常に単調増加する場合、の3通りに分類できる。図中で  $M_1 = 0.7$  は上述の (i) に相当し、 $M_1 = 1.1$  は (iii) に相当する。また  $M_1 = 0.8$ 、 $0.9$ 、 $1.0$  の場合は上述の (ii) の場合に相当し、各曲線上の白丸は最小断面の位置を表している。これらの位置におけるマッハ数は、いずれの場合も式 (22) で表される。最小断面より上流側の領域やチャンネル全体にわたって式 (20) が満たされる場合 (Fig. 8 では  $M_1 = 0.7$  の場合) には、速度変化が密度変化より大きいために断面積は単調減少し、逆に最小断面より下流側の領域やチャンネル全体にわたって式 (21) が満たされる場合 (Fig. 8 では  $M_1 = 1.1$  の場合) には、密度変化が速度変化より大きいため断面積は単調増加する。等温流れでのチャンネル内の諸量の変化をまとめて Table 2 に示す。参考のため  $0 < K < 1$  の場合の結果も示している。

### 3.3 等圧流れにおけるチャンネル内の流動特性と断面積変化

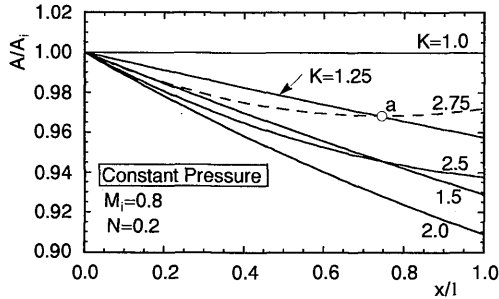
チャンネル内で圧力が一定に保たれる場合の諸量の変化を、Fig. 9 に示す。その他の流動特性は Fig. 2 及び Fig. 5 と同じ ( $M_1 = 0.8$ 、 $N = 0.2$ 、 $K = 1.5$ ) である。図より流れ方向に対し流速と温度はいずれも増加しており、外部より供給される電気的エネルギーは、

**Table 2** Relationship between  $K$  and flow properties for constant-temperature flow.

	$0 < K < 1$	$K > 1$
$dA$	+	- for $M < \sqrt{\frac{K}{\gamma(K-1)}}$ + for $M > \sqrt{\frac{K}{\gamma(K-1)}}$
$du$	-	+
$dM$	-	+
$dp$	-	-
$d\rho$	-	-



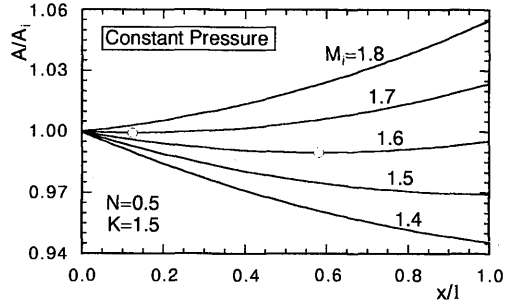
**Fig. 9** Variation of properties for constant-pressure flow.



**Fig. 10** Variation of cross-sectional area for constant-pressure flow as a function of  $K$ .

作動流体の運動エネルギーとエンタルピーの両方に交換されていることがわかる。また密度は流れ方向に対して減少し、作動流体は常に膨張して加速される。

$M_i=0.8$ ,  $N=0.2$  とし、パラメータを  $K$  としたときのチャンネル断面積の変化を **Fig. 10** に示す。図からわかるように、 $K$  を 1 から大きくしていくと、最初断面積は単調減少するが、 $K$  がある値以上になると図の  $K=2.5$  の場合のように減少が緩やかになる。さ



**Fig. 11** Variation of cross-sectional area for constant-pressure flow as a function of  $M_i$ .

らに  $K$  が大きくなると、図の破線で示す  $K=2.75$  の場合のように、チャンネルは点  $a$  に示す最小断面を持ち、それより下流において断面積は増加するようになる。

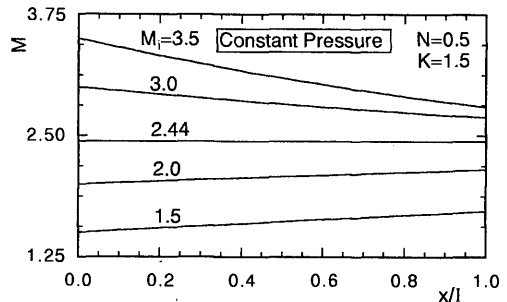
次に  $N=0.5$ ,  $K=1.5$  とし、 $M_i$  をパラメータとしたときの断面積変化を **Fig. 11** に示す。**Fig. 8** の等温流れの場合と同様に、断面積はチャンネル内の白丸で示す位置で最小値をとるように変化する場合のあることがわかる。マッハ数と断面積変化との関係は、 $K > 1$  のとき、式(13)より

$$M < \frac{1}{\sqrt{(\gamma-1)(K-1)}} \text{ のとき } \frac{dA'}{dX} < 0 \quad (23)$$

$$M > \frac{1}{\sqrt{(\gamma-1)(K-1)}} \text{ のとき } \frac{dA'}{dX} > 0 \quad (24)$$

と表される。すなわち、チャンネル断面積の最小点で  $M=1/\sqrt{(\gamma-1)(K-1)}=1.73$  の一定値となる。

**Fig. 11** と同じ条件 ( $N=0.5$ ,  $K=1.5$ ) でパラメータを  $M_i$  としたときのマッハ数の変化を **Fig. 12** に示す。図からわかるように、 $M_i < 2.44$  のときマッハ数



**Fig. 12** Variation of Mach number for constant-pressure flow as a function of  $M_i$ .

は単調増加し、 $M_1 > 2.44$  のとき単調減少する。式(13)において左辺をゼロとおくことにより得られる断面積変化率

$$\frac{dA'}{dX'} = (1-K)NB'^2A'^2 \{1 + (\gamma-1)(1-K)M^2\} \quad (25)$$

を式(15)に代入し、その式の左辺を再びゼロとおいて  $M$  について解くとチャンネル全体にわたって一定のマッハ数

$$M = \sqrt{\frac{2}{(\gamma-1)(K-1)}} = 2.443 \quad (26)$$

が得られる。すなわち、入口マッハ数  $M_1$  が式(26)で表されるならば、チャンネル全体にわたってマッハ数は一定に保たれ、圧力とマッハ数の両者が一定の流れとなる。

等圧流れでの諸量の変化をまとめて **Table 3** に示す。温度は発電機として作動する場合 ( $0 < K < 1$ ) で

**Table 3** Relationship between  $K$  and flow properties for constant-pressure flow.

	$0 < K < 1$	$K > 1$
$dA$	+	- for $M < \frac{1}{\sqrt{(\gamma-1)(K-1)}}$ + for $M > \frac{1}{\sqrt{(\gamma-1)(K-1)}}$
$du$	-	+
$dM$	-	+ for $M < \sqrt{\frac{2}{(\gamma-1)(K-1)}}$ - for $M > \sqrt{\frac{2}{(\gamma-1)(K-1)}}$
$dT$	+	+
$d\rho$	-	-

も加速機と同様に流れ方向に増加する。また等圧流れにおいても等速流れや等温流れと同様に、流れはチョークすることなしに音速状態 ( $M=1$ ) を通過する。

#### 4. 結 論

MHD 加速機内におけるプラズマ流れに対し、流速、温度及び圧力のいずれかをチャンネル全体にわたって一定に保つという流動条件を与え、一次元 MHD 理論を用いて流れの諸量の変化を数値解析した。得られた結果を要約すると以下の通りである。

(1) 等速流れにおいて、チャンネルは電圧利用率  $K$  の値によって先細型、一定断面積型、末広型の3種類の形状となる。

(2) 等温流れ及び等圧流れにおいて、断面積変化の傾向は  $K$  のほかにチャンネル入口のマッハ数  $M_1$  にも依存し、作動条件によってチャンネルは流路途中で最小断面を持つ先細末広型となる。

(3) 等速流れでは  $K$  が大きいほどマッハ数は減少するが、等温流れでは反対に  $K$  が大きいほど増加する。

(4) 三種類の流動条件において、チャンネル内でマッハ数が1に達しても、流れはチョークせず連続的に音速状態を通過する。その位置はチャンネルのスロート位置とは異なる。

#### 参 考 文 献

- 1) 赤碓ほか3名, プラズマ工学の基礎, 産業図書, (1984) p. 161, .
- 2) Sutton, G. W. and Sherman, A., "Engineering Magnetohydrodynamics", McGraw-Hill, Inc. (1965).
- 3) Lineberry, J. T. and Crawford, T. A., Mech Eng., 113-9, 70, (1991).
- 4) Woodson, H. H. and Melcher, J. R., "Electromechanical Dynamics III", John Wiley & Sons, Inc. (1968).
- 5) Johnson, M. R., Phys. of Fluids, 10-3, 539, (1967).
- 6) 青木ほか3名, 九大総理工報告, 7-1, 47, (1985).