

$k - \varepsilon$ 乱流モデル計算への cyclic reduction 法の適用

三木, 康臣
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

福田, 研二
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

<https://doi.org/10.15017/17282>

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 14 (3), pp.353-358, 1992-12-01. 九州大学大学院総合理工学研究科
バージョン :
権利関係 :



k - ϵ 乱流モデル計算への cyclic reduction 法の適用

三 木 康 臣*・福 田 研 二*

(平成4年8月31日 受理)

On the Use of Cyclic Reduction Method for a Tridiagonal System of Equations in the k - ϵ Turbulence Model Calculation

Yasutomi MIKI and Kenji FUKUDA

We made some numerical experiments on the methods of solution of tridiagonal linear equation which is an important problem in thermohydraulic calculations. Gauss elimination method and cyclic reduction method were tested using four computers for the tridiagonal linear system of equations and the turbulent pipe flow problem by means of the k - ϵ two-equation model. The computing time was compared among both methods in terms of computers and the dimension of the tridiagonal matrix or the number of grid cells.

As the result, it is found that the cyclic reduction method is faster on a FACOM VP2600/10 for more than 127 equations, while the Gauss elimination method is faster in case that the number of equations is small. And it is also found that the use of the cyclic reduction method reduces the computing time of the turbulent pipe flow calculations on a FACOM VP2600/10.

1. 緒 言

希薄濃度分散流に対する計算モデルとして二流体モデルと two way method がある¹⁾。その中でも後者に属するストカスティックモデルは、固体微粒子や液滴が気流中に浮遊した流れに対して広範囲に適用されている²⁾³⁾。著者は、このストカスティックモデルを気泡流に適用する手法を検討しているが、その計算アルゴリズム上、単相流の場合と比較して計算時間を要する。ストカスティックモデルを用いた希薄濃度分散流では、連続相の乱流計算に k - ϵ モデルなどの乱流モデルを用いることが多いが、この場合三重対角方程式を解く頻度が多く、この部分を高速化することは有益である。

石黒ら⁴⁾⁵⁾のパイプライン型計算機 FACOM230-75APU による数値実験により、cyclic reduction (CR) 法⁶⁾が三重対角方程式の並列解法として最も速いことが示されたが、それは解くべく三重対角方程式の次数が大きい場合（およそ500から5000）に対しての報告であり、乱流モデル計算で解くことが要求される三重対角方程式の次数はそれほど大きくない。また、

Lambiotte et al.⁷⁾ は、パイプライン型計算機 CDC STAR-100 を使用した数値実験を行い、次数が127以上では CR 法が最も速いと結論した。平岩⁸⁾は次数が大きくても安全に解の求まる修正 CR 法を提案し、FACOM230-75APU による数値実験により、63以上の次数で CR 法が Gauss elimination by Thomas (GET) 法⁹⁾より高速であると結論している。Lambiotte et al.⁷⁾ と平岩⁸⁾とは CR 法が GET 法に優越する次数が異なること、実用コードに対する適用がなされていないこと、使用した計算機が旧型であることを考慮すると、九州大学大型計算機センターで使用可能なベクトル計算機を使用した場合の結論を得ることは重要である。

本研究では、この CR 法と、乱流モデル計算における線形三重対角方程式の解法として広く使用されてきた GET 法を使用して数値実験を行い、両解法の計算時間の比較を行った。数値実験は、まず線形三重対角方程式に対して行い、さらに低レイノルズ数型 k - ϵ モデルを用いた円管内単相乱流計算に対して実行した。

2. 線形三重対角方程式への適用

2.1 cyclic reduction (CR) 法

$N \times N$ 元の三重対角行列の一次方程式 $Ax = v$, すなわち

*エネルギー変換工学専攻

$$e_j x_{j-1} + d_j x_j + f_j x_{j+1} = v_j, j = 1, \dots, N,$$

$$N = 2^{m+1} - 1, m \geq 1, e_1 = f_N = 0 \quad (1)$$

を考える。係数行列 A とベクトル $\bar{v}$ の成分を

$$e_j^{(0)} = e_j, d_j^{(0)} = d_j, f_j^{(0)} = f_j, v_j^{(0)} = v_j \quad (2)$$

と書くと、式(1)は次のようになる。

$$e_{2j}^{(0)} x_{2j-1} + d_{2j}^{(0)} x_{2j} + f_{2j}^{(0)} x_{2j+1} = v_{2j}^{(0)} \quad (3)$$

上添え字 (0) は、これから第 (0) 回目の奇数インデックスをもつ変数の消去が行われることを示す。第

(1) 回目の消去では、式(3)の $(2j)$ 式から、奇数インデックスをもつ変数 x_{2j-1} と x_{2j+1} を消去するために、 $(2j-1)$ 式に $-e_{2j} d_{2j-1}^{-1}$ を掛け、 $(2j+1)$ 式に $-f_{2j} d_{2j+1}^{-1}$ を掛けて、 $(2j)$ 式に加えると、

$$\begin{aligned} & (-e_{2j} d_{2j-1}^{-1} e_{2j-1}) x_{2j-2} + (d_{2j} - e_{2j} d_{2j-1}^{-1} f_{2j-1} \\ & - f_{2j} d_{2j+1}^{-1} e_{2j+1}) x_{2j} + (-f_{2j} d_{2j+1}^{-1} f_{2j+1}) x_{2j+2} \\ & = v_{2j} - e_{2j} d_{2j-1}^{-1} v_{2j-1} - f_{2j} d_{2j+1}^{-1} v_{2j+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

(4) 式は再び三重対角行列でその次数は $N/2$ である。同様の操作を繰り返し、 $A^{(i)} x^{(i)} = v^{(i)}$ を計算する。ここで、 $A^{(i)}$ は $N_i \times N_i$ ($N_i = 2^{m-i+1} - 1$) 元の三重対角行列である。 $\log_2 N (= m)$ 回の操作で $A^{(m)} x^{(m)} = v^{(m)}$ より $x^{(m)}$ が計算される。 $x = x^{(0)}$ は $x^{(m)}$ に使用して後進代入により求める。すなわち、 $i = 0, 1, \dots, m-1, j = 1, 2, \dots, N_i + 1$ に対して

$$\left. \begin{aligned} e_j^{(i+1)} &= -e_{2j}^{(i)} \left(d_{2j-1}^{(i)} \right)^{-1} e_{2j-1}^{(i)}, \\ d_j^{(i+1)} &= d_{2j}^{(i)} - e_{2j}^{(i)} \left(d_{2j-1}^{(i)} \right)^{-1} f_{2j-1}^{(i)} \\ &\quad - f_{2j}^{(i)} \left(d_{2j+1}^{(i)} \right)^{-1} e_{2j+1}^{(i)}, \\ f_j^{(i+1)} &= -f_{2j}^{(i)} \left(d_{2j+1}^{(i)} \right)^{-1} f_{2j+1}^{(i)}, \\ x_j^{(i+1)} &= x_{2j}^{(i)}, \\ v_j^{(i+1)} &= v_{2j}^{(i)} - e_{2j}^{(i)} \left(d_{2j-1}^{(i)} \right)^{-1} v_{2j-1}^{(i)} \\ &\quad - f_{2j}^{(i)} \left(d_{2j+1}^{(i)} \right)^{-1} v_{2j+1}^{(i)}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$y^{(m)} = x^{(m)}$ とおき、次の手順で $y^{(m-1)}, y^{(m-2)}, \dots, y^{(0)}$ を求める。 $y^{(0)}$ が求める x である。

$$\left. \begin{aligned} y_{2j}^{(i)} &= y_j^{(i+1)}, j = 1, \dots, N_i + 1, \\ y_1^{(i)} &= \left(d_1^{(i)} \right)^{-1} \left(v_1^{(i)} - f_1^{(i)} y_2^{(i)} \right), \\ y_{2j-1}^{(i)} &= \left(d_{2j-1}^{(i)} \right)^{-1} \left(v_{2j-1}^{(i)} - e_{2j-1}^{(i)} y_{2j}^{(i)} \right. \\ &\quad \left. - f_{2j-1}^{(i)} y_{2j+1}^{(i)} \right), j = 2, \dots, N_i + 1, \\ y_{N_i}^{(i)} &= \left(d_{N_i}^{(i)} \right)^{-1} \left(v_{N_i}^{(i)} - e_{N_i}^{(i)} y_{N_i-1}^{(i)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

上の(5), (6)式は j について並列計算される。

2.2 数値実験結果

Table 1 に示す各場合に対して計算速度の比較を行う。Case 1-8 では著者らが作成したコードを使用し、Case 9-14 では九州大学大型計算機センターで使用可能な数値計算ライブラリー SSLII と NUNPAC 中の LTX¹⁰⁾, VLTX¹¹⁾ (SSLII) および TRIDGS (NUNPAC)¹²⁾ を使用した。LTX, VLTX および TRIDGS の解法は各々 GET, CR および GET 法である。各解法により九州大学大型計算機センターの汎用計算機 (FACOM M780/20 および M1800/20) とベクトル計算機 (FACOM VP200 および VP2600/10) で計算を行い、計算時間の比較を行った。計算に使用したシステムの概略を、**Table 2** に示す¹³⁾。システム 1 と 3, システム 2 と 4 は同時期の計算機である。留意すべき点は VP200 (システム 3) のスカラーユニットの処理性能は汎用計算機 M780/20 (システム 1) の約半分程度しかなかったのに対して VP2600/10 (システム 4) のスカラーユニットの処理性能は M1800/20 (システム 2) とほぼ同じことである¹³⁾。

係数行列の各要素は $e_i = 1. + 0.001i$; $d_i = 4. + 0.2i$; $f_i = 1. - 0.03i$; $v_i = 1.$ で、優対角すなわち $|d_i| \geq |e_i| + |f_i|$ である。本報告の数値実験はすべて単精度計算で行った。なお、計算時間に影響のある変数の配列宣言は最小限に留めた。

Table 3 は、**Table 1** に示した各場合の計算時間を係数行列の次数に対して示している。結果は 5 回の試行結果の平均値を示している。VP2600/10 による加速率 (M1800/20 による計算時間/VP2600/10 による計算時間) は、係数行列の次数が 15 の場合の一部を除いてほぼ次数が大きいくほど大きい。VP2600/10 による加速率は CR 法を使用した場合顕著である。**Table 3** において、Case 3 が Case 1 よりも計算時間が大きいのは、次の理由からである。つまり、ベクトル化できないプログラムはスカラー処理されるのでベクトル計算機は

Table 1. Case specifications

Case	Solver	System	Case	Solver	System
1	GET	1	9	GET (LTX)	2
2	GET	2	10	GET (LTX)	4
3	GET	3	11	GET (TRIDGS)	2
4	GET	4	12	GET (TRIDGS)	4
5	CR	1	13	CR (VLTX)	2
6	CR	2	14	CR (VLTX)	4
7	CR	3			
8	CR	4			

Table 2. System configuration

	CPU	Main Memory	System Memory	OS	Compiler
System 1	FACOM M780/20	192MB	—	MSP-EX	FORTRAN77/EX
System 2	FACOM M1800/20	256MB	256MB	MSP-EX	FORTRAN77/EX
System 3	FACOM VP200	128MB	—	VPCF	FORTRAN77 VP
System 4	FACOM VP2600/10	512MB	1GB	VPCF	FORTRAN77 EX/VP

Table 3. Comparison of the computing times (μ s) for tridiagonal system of equations.

Case	N					Case	N				
	15	31	63	127	255		15	31	63	127	255
1	31	47	79	145	—	9	40	61	115	237	407
2	18	29	67	126	238	10	39	59	96	173	326
3	58	79	124	209	—	11	25	41	72	140	267
4	18	23	35	59	109	12	26	37	59	104	194
5	57	101	197	465	—	13	50	77	123	212	398
6	38	59	139	268	590	14	55	62	65	67	70
7	93	132	142	165	—						
8	25	30	39	51	73						

単なる汎用計算機となるが、前述の通り VP200 のスカラユニットの処理性能は汎用計算機 M780/20 の約半分程度しかなかったために、M780/20 で実行させる方が有利であったためである。ベクトル計算機を使用した場合、GET 法よりも CR 法の方が係数行列の次数に対する計算時間の増加は緩やかである。

次に、数値計算ライブラリーを使用した場合の計算時間を比較する。まず明らかなことは、Case 14 の一

部を除いてこれらのソルバーを使用した場合はいずれも著者らの作成したものを使用した場合と比較して計算時間が大きいことである。また、係数行列の次数が 255 においてソルバー VLTX を VP2600/10 で使用した場合の加速率は顕著である。

Fig. 1 は、ベクトル計算機を使用した場合の GET 法と CR 法の速度の比較を示す。係数行列の次数が小さい場合には GET 法が有利であり、次数が大きい場合

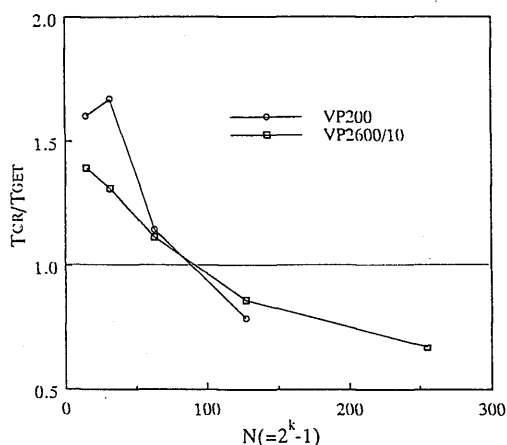


Fig. 1 Comparison of speed for Gaussian elimination vs. cyclic reduction method.

には CR 法が有利である。計算時間の逆転する次数は VP200, VP2600/10 とともに 127 である。汎用計算機を使用した場合は、次数に関係なく GET 法が有利である。

3. 円管内乱流モデル計算への適用

3.1 低レイノルズ数型 k - ϵ モデルの基礎式

解析の対象は円管内の非圧縮性の等温流で、基礎式は次のように表現される。

$$\frac{DU}{St} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\nu + \nu_t) r \frac{\partial U}{\partial r} \right] \quad (7)$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu k^2 / \epsilon \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} = & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) r \frac{\partial k}{\partial r} \right] \\ & + \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - \epsilon - D \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} = & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right] \\ & + C_{\epsilon 1} \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} + E \end{aligned} \quad (10)$$

(8)–(10)式に現われる経験定数および補正関数の値を各モデルについて **Table 4, 5** に示した。ここでとりあげたモデルは、明一笠木 (MK)¹⁴⁾ および長野一田川 (NT)¹⁵⁾ の 2 種類である。いずれも壁面まで適用可能な低レイノルズ数型 k - ϵ モデルであり、数値計算上の便宜さから壁面で乱流エネルギーの消散率を零とした結果導入された D 項や壁近傍域での補正を示す E 項は用いない。

(7)–(10)式と連続式の離散化にはコントロールボリューム法を用い、解法には SIMPLE 法¹⁶⁾を用いた。変数はスタガード格子配置をし、壁近傍の計算点が密となるような不等間隔格子を用いた。対称性および壁面での条件より、次の境界条件を与える。

Table 4. Model constants in the k - ϵ model.

Model	C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ	Ref.
MK	0.09	1.4	1.8	1.4	1.3	[14]
NT	0.09	1.45	1.9	1.4	1.3	[15]

Table 5. Correct functions in the k - ϵ model.

Model	f_μ	f_1	f_2	D	E	ϵ_w
MK	$[1 + 3.45/\sqrt{R_t}] \times [1 - \exp(-y^+/70)]$	1.0	$[1 - (2/9)\exp(-R_t/6)^2] \times [1 - \exp(-y^+/5)]^2$	0	0	$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$
NT	$[1 + 4.1/R_t^{3/4}] \times [1 - \exp(-y^+/26)]^2$	1.0	$[1 - 0.3\exp(-R_t/6.5)^2] \times [1 - \exp(-y^+/6)]^2$	0	0	$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$

Table 6. Case specifications.

Case	Model	Solver	System	Case	Model	Solver	System
1	MK	GET	1	5	NT	GET	1
2	MK	GET	2	6	NT	GET	2
3	MK	CR	1	7	NT	CR	1
4	MK	CR	2	8	NT	CR	2

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \frac{\partial k}{\partial y} = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0 \quad (y = R) \\ U = 0, k = 0, \varepsilon = \varepsilon_w \quad (y = 0) \end{aligned} \right\} (11)$$

数値計算は経験側による圧力勾配および速度、乱流エネルギーおよびその消散率を初期値として、流路の入口から下流に向けて、完全に発達した解が得られるまで順次計算する。妥当な計算結果を得るためには y_1^+

の値が十分小さい必要があるが、半径方向の格子数が 63 の場合を除いて、 $0.09 < y_1^+ < 0.3$ にした。収束判定条件は各変数の最大変化量とその変数の最終値との比が全域で 10^{-3} 以下とした。また、Laufer¹⁷⁾ による実験結果と比較するために管直径と断面平均速度に基づくレイノルズ数は 40000 とし、作動流体には空気 (293K) を想定した。

3.2 数値実験結果

Table 6 に計算条件を示す。Case 3 と 7 で格子数が 127 と 255 の場合について、管内の平均速度分布とレイノルズ応力分布を **Fig. 2, 3** に示す。Laufer¹⁷⁾ による実

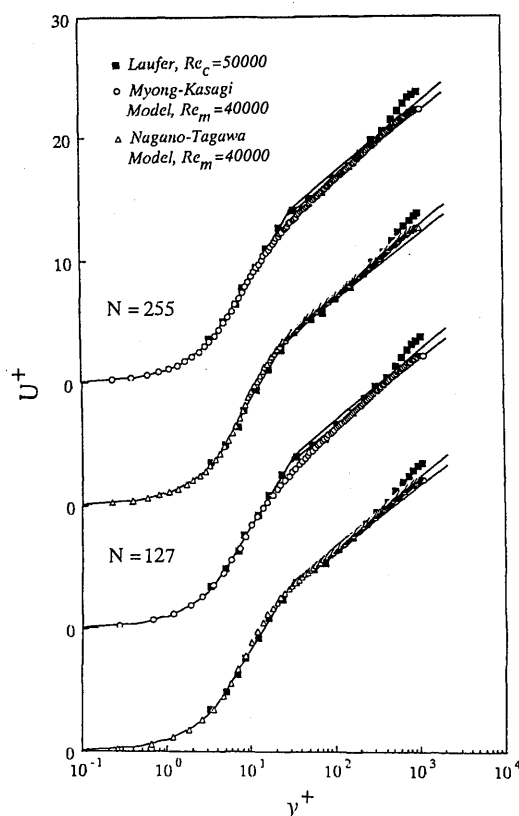


Fig. 2 Mean velocity profiles for fully developed pipe flows.

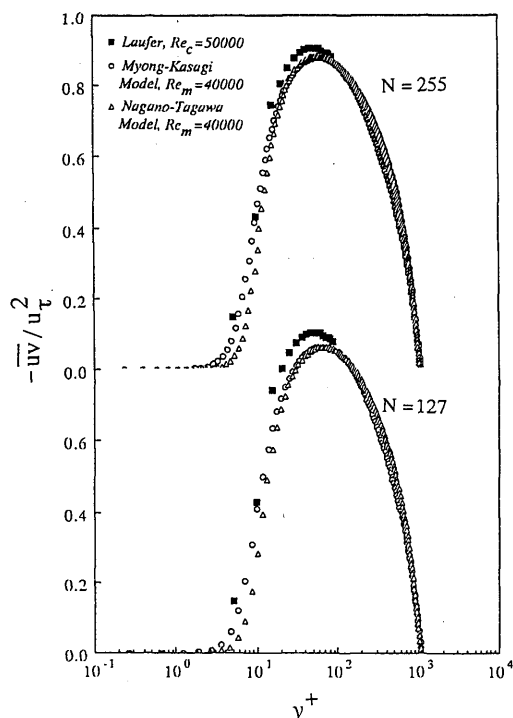


Fig. 3 Reynolds shear stress profiles for fully developed pipe flows.

Table 7. Comparison of the computing times (sec) for the turbulent pipe flow problem.

Case	Number of grid cells in the r-direction			Case	Number of grid cells in the r-direction		
	63	127	255		63	127	255
1	4.725 (8%)	10.880 (9%)	27.600 (9%)	5	4.578 (8%)	11.673 (8%)	34.092 (9%)
2	3.272 (12%)	7.036 (14%)	17.790 (14%)	6	3.200 (12%)	7.727 (13%)	21.930 (14%)
3	5.746 (24%)	13.355 (25%)	35.676 (27%)	7	4.326 (26%)	14.511 (25%)	44.322 (26%)
4	3.298 (13%)	6.822 (11%)	16.531 (8%)	8	3.197 (13%)	7.511 (11%)	20.496 (8%)

験結果も各図に記した。格子数が255の場合の方が127の場合よりもより実験結果に近い結果が得られている。紙面の都合上省略するが、GET 法と CR 法による計算結果はほとんど差がない。また、使用したシステムが解に与える影響もほとんどない。

Table 7 は、**Table 6** に示した各場合の計算時間を半径方向の格子数に対して示している。カッコ内の数字は全計算時間において三重対角方程式の計算時間の占める割合である。ベクトル計算機を使用する場合に注目して GET 法と CR 法を比較すると、半径方向の格子数が小さい場合には GET 法が有利であり、大きい場合には CR 法が有利である。CR 法を使用する場合、格子点数が増加する程三重対角行列の計算時間の割合が減少しており、その効果が増加する傾向がある。格子点に依存しない解を得るためには、半径方向の格子数がおよそ100以上必要とされているので^{14) 15)}、ベクトル計算機を使用した計算では CR 法の使用が有利である。計算の収束判定条件を厳しくする、例えば 10^{-4} と1桁小さくすると、Case 8 で格子数127の場合の全計算時間は37.853秒（内三重対角方程式の計算時間は11%）と飛躍的に増加し、同じ条件下で GET 法を使用した場合の全計算時間は38.710秒（同13%）となり、CR 法の使用は収束判定条件が厳しい程効果的である。

4. 結 論

得られた結果を以下に要約する。

(1) 三重対角方程式の並列解法としては、係数行列の次数が大きい場合には CR 法が GET 法より効率的である。両解法による計算時間の大小が逆転する係数行列の次数は127であり、乱流モデル計算で解くべく三重対角方程式の係数行列の次数の範囲に相当する。

(2) ベクトル計算機による低レイノルズ数型 k - ϵ モデルを用いた円管内乱流計算における三重対角方

式の解法として CR 法を使用すると GET 法を使用した場合とほぼ同様の結果が得られ、GET 法を使用した場合よりも半径方向の格子数が127以上で計算時間が短縮されることが明らかになった。CR 法の使用は、より大きな計算時間が必要なストカスティックモデルを用いた気泡流の計算ではより効果があると思われる。また、その他の熱流動計算への適用も有効であると思われる。

参 考 文 献

- 1) 日本流体力学会編，流体力学シリーズ 2，混相流体の力学，朝倉書店 (1991)，p. 179.
- 2) Shuen, J. S. et al., AIAA J., **23** (3), 396 (1985).
- 3) Chen, C. P. and Wood, P. E., Chem. Eng. Commun., **29**, 291 (1984).
- 4) 石黒美佐子ら，JAERI-M, 9703 (1981).
- 5) 石黒美佐子，難波克光，情報処理学会論文誌，**24**(1)，8 (1983).
- 6) Heller, D. E., SIAM J. Numer. Anal., **13** (4), 484 (1976).
- 7) Lambiotte, J. J. and Viogt, R. G., ACM Trans. on Math. Soft., **1** (4), 308 (1975).
- 8) 平岩健三，情報処理学会論文誌，**20**(2)，190 (1979).
- 9) 例えば，Anderson, D. A. et al., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill, (1984), p. 99.
- 10) 富士通，FORTRAN SSL II 使用手引書 (99SP-0050-5)，(1980)，p. 387.
- 11) 富士通，FORTRAN SSL II 拡張機能使用手引書 (99SP-0060-2)，(1985)，p. 29.
- 12) 名大大型計算機センター，ライブラリープログラム利用の手引 (数値計算編; NUMPAC)，1 (1990)，p. 83.
- 13) 竹生政資ら，九大大型計算機センター広報，**25** (1)，36 (1992).
- 14) 明賢国，笠木伸英，機論，**54** (507)，3003 (1988).
- 15) Nagano, Y. and Tagawa, M., ASME J. Heat Trans., **112**, 33 (1990).
- 16) Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, (1980).
- 17) Laufer, J., NACA Report, 1174 (1954).