弱化規制をもたない直観主義命題論理における決定手続きの計算量

桐山, 栄治
九州大学大学院総合理工学研究科情報システム学専攻 : ＪＲ西日本

有川, 節夫
九州大学大学院総合理工学研究科情報システム学専攻

小野, 寛晰
広島大学工学部

https://doi.org/10.15017/17232

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 13 (2), pp.205-212, 1991-09-01. 九州大学大学院総合理工学研究科

九州大学大学院総合理工学研究科報告
第13巻 第2号 205-212頁 平成3年9月

Engineering Sciences Reports, Kyushu University
(KYUSHU DAIGAKU SOGORIKOGAKU KENKYUKA HOKOKU)
Vol. 13, No. 2 pp. 205-212 SEPT 1991

弱化規則をもたない直観主義命題論理における決定手続きの計算量

桐　山　栄　治*・有　川　節　夫†・小　野　寛　晰‡

(平成3年5月31日　受理)

A computational complexity of decision procedure for the intuitionistic logic without weakening rule

Eiji KIRIYAMA, Setsuo ARIKAWA and Hiroakira Ono

Non-classical logics have been studied to realize some logics we use in our everyday lives, and have something to do with the resource problem in Computer Science.

In this paper we discuss such non-classical logics from viewpoints of decidability and computational complexity. We deal with a system FL_{ec} in Gentzen-type sequent calculus (LJ) without the weakening rule, which is also an intutionistic relevant logic without distributive law. We proved in our previous paper that the propositional logic FL_{ec} is decidable in a non-constructive way. In the present paper we give an upper bound for the decision procedure by using McAloon's ideas.

1. はじめに

古典論理は数学の証明を形式化したものである．排中律を認めない直観主義数学を形式化したものは直観主義論理である．このように古典論理に制限を加えて得られる論理体系を非古典論理という．非古典論理に関する研究は盛んに行われているが，その中の１つに証明可能性の決定問題がある．決定問題とは，任意の体系 T に対し，T で定義された任意の論理式が，T で証明可能か否かを有限回で判定する，決定手続きの有無を判定する問題である．よって，決定可能な体系に対してはその決定手続きの計算量についても関心がもたれている．

Gentzen による直観主義論理の形式化の１つである LJ から，弱化規則を取り除いて得られる体系を FL_{ec} と呼ぶことにする．この体系 FL_{ec} は，命題論理において決定可能であることがわかっている[4]．体系 FL_{ec} は，適切さの論理 (relevant logic) から分配律を取り除くことで得られる体系であるともいえる．適切さの論理は決定可能であり，その決定手続きの計算量の研究も行われている[9]．本論文では，適切さの論理での方法と同様にして体系 FL_{ec} 命題論理に対する決定問題の計算量の上限が与えられることを示す．

*情報システム学専攻修士課程（現在，ＪＲ西日本）
†情報システム学専攻
‡広島大学工学部

2. 原始帰納的関数

本論文では体系 FL_{ec} 命題論理の決定問題の計算量を考察するが，そのために自然数の関数について定義する．自然数の全体を

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

で表す．

n 個の自然数の組にたいして１個の自然数を対応付ける関数 $f: \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ のことを数論的関数という．次の３つの関数は初期関数といわれる数論的関数である．

(1) $Z(x) = 0$

(2) $S(x) = x + 1$

(3) $U_n^i(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = x_i \ (n \geq 1, 1 \leq i \leq n)$

(2) の $S(x)$ を単に x' で表すこともある．

定義1． 初期関数に次の操作を有限回（0回以上）適用して得られる関数を，原始帰納的 (primitive recursive) 関数という．

（i）r 変数の関数 h と r 個の n 変数関数 $g_i(1 \leq i \leq r)$ から n 変数の関数 f を次のようにしてつくる．（この操作を合成という．）

$$f(x_1, \cdots, x_n) = h(g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_r(x_1, \cdots, x_n)).$$

（ii）n 変数の関数 g と n+2 変数の関数 h から n+1 変数の関数 f を次のようにしてつくる．（この操作を原始帰納（primitive recursion）という．）

$$f(x_1, \cdots, x_n, 0) = g(x_1, \cdots, x_n).$$
$$f(x_1, \cdots, x_n, y') = h(x_1, \cdots x_n, y, f(x_1, \cdots, x_n, y)).$$

初期関数に特別な関数 $p(x)$ を加えて上の操作を行うことでつくられた関数 $q(x)$ は，$p(x)$ を初期関数としてもつ原始帰納的関数という．$p(x)$ が原始帰納的関数であれば，$q(x)$ も明らかに原始帰納的関数である．

次のように定義される Ackermann 関数 $A(x, y)$ は

$$\begin{cases} A(0, y) = y + 1. \\ A(x+1, 0) = A(x, 1). \\ A(x+1, y+1) = A(x, A(x+1, y)). \end{cases}$$

原始帰納的関数でない（例えば文献[1] の 4 章）．この関数は任意の原始帰納的関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ を

$$f(x_1, \cdots, x_n) \leq A(c, \max(x_1, \cdots, x_n))$$

の形でおさえる．ここに C はある定数である．

3.　体系 $\mathbf{FL_{ec}}$ 命題論理の決定問題

3.1　体系 $\mathbf{FL_{ee}}$ 命対論理

直観主義論理（LJ）から構造に関する推論規則のうち弱化規則，

$$\frac{\Gamma \rightarrow C}{A, \Gamma \rightarrow C}\ (weakening \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow A}\ (\rightarrow weakening)$$

を取り除いた体系を FL_{ec} とする．体系 FL_{ec} 命題論理の推論規則は次のようになる（C は空でもよい）．定数に関しては弱化規則をもつ．ただし，Γ や Δ などのギリシア大文字は論理式の多重集合を表す．つまり；2 つの論理式の集合 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_m\}$ と $\Delta = \{B_1, \cdots, B_n\}$ は m＝n かつ論理式の列 $B_1, \cdots, B_n$ が $A_1, \cdots, A_m$ を並べ替えることで得られるときに等しいと定義する．式 $\Gamma \rightarrow C$ の左辺を多重集合と考えるため，体系 FL_{ec} の推論規則は交換規則

$$\frac{A, B, \Delta \rightarrow C}{B, A, \Delta \rightarrow C}\ (exchange)$$

を取り除いて考える．体系 FL_{ec} の定義を **Fig. 1** に示す．

定理 1． 体系 FL_{ec} において，cut 消去定理が成り立つ．

証明． 次の weak-mix という，cut 規則と同値な推論規則を導入する．

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Delta^* \rightarrow C}$$

ただし，Δ には少なくとも 1 つの論理式 A が含まれており，Δ^* は Δ から少なくとも 1 つの A を取り除いたものでなくてはならない．文献[8] では mix という推論規則を導入して古典論理体系 LK の cut 消去定理を証明している．mix は，Δ^* を Δ からすべての A を取り除いたものとしたものである．体系 FL_{ec} は弱化規則をもたないので，cut 規則との同値性をもたせるために weak-mix を用いる．しかし，mix を weak-mix に置き換えれば LK での cut 消去定理と同様に体系 FL_{ec} の cut 消去定理は証明できる．

3.2　決定手続き

体系 FL_{ec} 命題論理の決定手続きは FL'_{ec} という補助的な体系を用いて与えられる．この体系 FL'_{ec} は体系 FL_{ec} から構造に関する推論規則のうち cut 規則と縮約規則を取り除き，論理記号に関する推論規則の $(\supset\rightarrow)$，$(\vee\rightarrow)$，$(\wedge 1\rightarrow)$，$(\wedge 2\rightarrow)$，$(\rightarrow \&)$，$(\& \rightarrow)$ に縮約規則を埋め込むことによって得られる．縮約規則を埋め込んだ場合の論理記号に関する推論規則は **Fig. 2** のようになる．

ここで，Σ，Π，Θ は次のようにして得られる多重集合である．以下で，$\Gamma \cup \Delta$ は Γ と Δ の和集合（多重集合）を表し，$\#_\Sigma(D)$ は多重集合 Σ に現れる論理式 D の数を表している．

1．Σ は $\Gamma \cup \Delta$ から次の条件を満たすようにして得られる．

- 論理式 $A \supset B$ が Γ と Δ の両方に含まれるなら $\#_\Sigma(A \supset B) \geq \#_{\Gamma \cup \Delta}(A \supset B) - 2$．それ以外のときは $\#_\Sigma(A \supset B) \geq \#_{\Gamma \cup \Delta}(A \supset B) - 1$．

Initial sequent: $A \to A, \quad \bot \to C, \quad \to 1, \quad 0, \Gamma \to C$

Rules for constants

$$\frac{\Gamma \to C}{1, \Gamma \to C}\,(1w) \qquad \frac{\Gamma \to}{\Gamma \to \bot}\,(\bot\, w)$$

Structural rules

$$\frac{A, A, \Gamma \to C}{A, \Gamma \to C}\,(contraction) \qquad \frac{\Gamma \to B \quad B, \Delta \to C}{\Gamma, \Delta \to C}\,(cut)$$

Logical rules

$$\frac{\Gamma, A \to B}{\Gamma \to A \supset B}\,(\to\supset) \qquad \frac{\Gamma \to A \quad B, \Delta \to C}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to C}\,(\supset\to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \wedge B}\,(\to \wedge) \qquad \frac{A, \Gamma \to C \quad B, \Gamma \to C}{A \vee B, \Gamma \to C}\,(\vee \to)$$

$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A \vee B}\,(\to \vee 1) \qquad \frac{A, \Gamma \to C}{A \wedge B, \Gamma \to C}\,(\wedge 1 \to)$$

$$\frac{\Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}\,(\to \vee 2) \qquad \frac{B, \Gamma \to C}{A \wedge B, \Gamma \to C}\,(\wedge 2 \to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to A\&B}\,(\to \&) \qquad \frac{A, B, \Gamma \to C}{A\&B, \Gamma \to C}\,(\& \to)$$

Fig. 1 rules of the system FL_{ec}

$$\frac{\Gamma \to A \quad B, \Delta \to C}{A \supset B, \Sigma \to C}\,(\supset\to) \qquad \frac{A, \Gamma \to C \quad B, \Gamma \to C}{A \vee B, \Pi \to C}\,(\vee \to)$$

$$\frac{A, \Gamma \to C}{A \wedge B, \Pi \to C}\,(\wedge 1 \to) \qquad \frac{B, \Gamma \to C}{A \wedge B, \Pi \to C}\,(\wedge 2 \to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Theta \to A\&B}\,(\to \&) \qquad \frac{A, B, \Gamma \to C}{A\&B, \Pi \to C}\,(\& \to)$$

Fig. 2 logical rules of the system FL'_{ec}

●D を $\Gamma \cup \Delta$ に含まれる $A \supset B$ 以外の論理式とする．そのとき，D が Γ と Δ の両方に含まれるなら $\#_{\Sigma}(D) \geq \#_{\Gamma \cup \Delta}(D) - 1$．それ以外のときは $\#_{\Sigma}(D) = \#_{\Gamma \cup \Delta}(D)$

2．○を $\vee$，$\wedge$，& のいずれかであるとすると，それぞれの○に関する規則において Π は次を満たすようにして得られる．

● $\#_{\Pi}(A \circ B) \geq \#_{\Gamma}(A \circ B) - 1$．$D$ を Γ に含まれる $A \circ B$ 以外の論理式とするとき，$\#_{\Pi}(D) = \#_{\Gamma}(D)$．

3．Θは $\Gamma \cup \Delta$ から次の条件を満たすようにして得られる．

- D が Γ と Δ の両方に含まれるなら $\#_{\Theta}(D) \geq \#_{\Gamma\cup\Delta}(D)-1$．それ以外のときは $\#_{\Theta}(D)=\#_{\Gamma\cup\Delta}(D)$．

体系 FL'_{ec} の証明図は埋め込まれた縮約規則を補うことで体系 FL_{ec} の証明図になる．逆に，体系 FL_{ec} の cut 規則を含まない証明図は，縮約規則の適用を可能な限り上に持ち上げることで，証明図の長さに関する帰納法により体系 FL'_{ec} の証明図に書き直せることが示せる．よって，FL'_{ec} は FL_{ec} と同値な体系であることがわかる．

ある式 S' が他の式 S に縮約規則を（0回以上）適用することで得られる場合，S' は S の縮約式という．また，α を体系 FL'_{ec} で与えられた証明図の一本の枝とする．式 S_1 と S_2 が α の中で，1) S_2 は S_1 の下方にあり，2) S_2 は S_1 の縮約式であるとき，枝 α を冗長であるという．

補題2．（Curry の補題）式 S' が式 S の縮約式であり，かつ S が体系 FL'_{ec} において長さ n の証明図で証明できるなら，S' は長さ n 以下の証明図で証明できる．

証明． この補題の証明は証明図の長さに関する帰納法による．ここでは式 S の証明図が（→＆）の推論規則で終わっている場合のみについて示す．証明図は次のような形をしている．

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ \Gamma \to A & \Delta \to B\end{array}}{\Sigma \to A \,\&\, B}$$

ここで S は長さ n で証明されているとし，$\Gamma \to A$ 及び $\Delta \to B$ の証明図の長さをそれぞれ n_1, n_2 とする（$n=n_1+n_2$ である）．すると，S' は $\Sigma' \to A \,\&\, B$ の形をしているが，Σ' は Γ と Δ の和によって得られた多重集合の縮約規則を適用して得られることは明らかである．このとき Γ'，Δ' として，1) Γ，Δ にそれぞれ縮約規則を適用することで得られ，2) Γ' と Δ' の和集合に含まれる論理式のうち Γ' と Δ' おのおのに一度ずつ現れる論理式に対してのみ縮約規則を適用させれば Σ' になるような多重集合が存在する．帰納法の仮定により，$\Gamma' \to A$ は長さ n_1 以下，$\Delta' \to B$ は長さ n_2 以下で証明できる．よって，体系 FL'_{ec} において $\Sigma' \to A \,\&\, B$ は $\Gamma' \to A$ と $\Delta' \to B$ に推論規則（→＆）を適用することで得られ，長さ n 以下で証明することができる．

系3． 式 S が体系 FL'_{ec} で証明可能なら，冗長な枝を含まない S の証明図が存在する．

証明． 式 S に至る証明図が冗長な枝 α を含んでいると仮定する．α において式 S_2 が，式 S_1 より下方にあり S_1 の縮約式になっているとする．Curry の補題より，S_2 は S_1 より短い証明図で証明できるので，α は短い枝 α' に書き直せる．α' が，まだ冗長であれば同じことを繰り返す．書き直しによって枝は短くなるので，この操作は有限で終り，冗長な枝はなくなる．

任意の得られた式 S が体系 FL'_{ec} で証明可能かどうかを調べるため以下の手順で S の証明図を構成することを試みる．まず，S が体系 FL'_{ec} における推論規則の下式となりうるような式をすべて見つける．そして，それらの式を S の上式のように書く．この操作を式 S の分解という．次に S を分解して得られたおのおのの式を分解する．これを繰り返す．分解によって，枝が冗長となるような式を得た場合，その式は書かずに分解を終る．分解できない式が得られた場合も分解は終わる．このようにして各式が節となっている木を得る．この木を式 S の分解木という．

体系 FL_{ec} 命題論理の決定可能性は，任意の式の体系 FL'_{ec} での分解木が有限であることから示すことができる[4]．そこでは次の König の補題を用いて分解木が有限であることを示している．

補題4．（König の補題）木が有限であることの必要十分条件は次の2つが共に成立することである．

- ある点と直接結ばれている点は有限である（枝分かれの数の有限性）．
- 各枝は有限である（枝の長さの有限性）．

補題5． 体系 FL_{ec} での分解木において，枝分かれの数の有限性が成り立つ．

証明． 枝分かれの数の有限性は1回の分解で得られる式の数が有限であることを示せば良い．体系 FL'_{ec} の推論規則をみればわかるように，（⊃→），（→＆）以外の推論規則による分解で得られる式の数は高々4つである．（→＆）の場合を考えると，推論規則は次の

ような形をしている

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Theta \to A \,\&\, B}\ (\to \&).$$

式$\Theta \to A \,\&\, B$を分解するとき，Θに含まれる論理式がそれぞれ異なれば分解によって得られる式の数が最大となることは明らかである．Θに含まれる個々の論理式は推論規則（$\to$&）による分解で，1）Γのみに含まれるか，2）Δのみに含まれるか，3）Γ及びΔの両方に含まれるかの3通りの可能性をもっている．よって，Θに n 個の論理式が含まれているとすると，分解の可能性は高々 3^n 通りである．式$\Theta \to A \,\&\, B$は分解で2個の式を得るので分解によって得られる式の数は高々 $2 \cdot 3^n$ 個である．（$\supset\to$）の推論規則の場合，推論規則は次のような形をしている．

$$\frac{\Gamma \to A\ B,\ \Delta \to C}{A \supset B,\ \Sigma \to C}(\supset\to).$$

論理式 $A \supset B$ に関しては分解で，1）Γのみに含まれるか，2）Δのみに含まれるか，3）Γ及びΔの両方に含まれるか，4）Γ及びΔのいずれにも含まれないかの4通りの可能性があり，Σに含まれる個々の論理式は（$\to$&）の場合と同様，3通りの可能性がある．よって，Σに n 個の論理式が含まれているとすると，分解によって得られる式の数は高々 $2 \cdot 4 \cdot 3^n$ 個である．

全く同じ論理式が多重集合ΓとΔに現れているとき，式$\Gamma \to A$ と$\Delta \to A$ は同族 (cognate) であるという．このとき，次の補題が成り立つ[5,2]．

補題6．（Kripke の補題）同族な式の列は冗長でなければ有限である．

体系 FL'_{ec} は cut 規則を含まないので，証明図に現れる式に含まれる論理式は終式に含まれる論理式の部分論理式のみから成るという部分論理式の性質が成り立つ．ゆえに，与えられた証明図に現れる同族な式の組は有限である．また，Kripke の補題は冗長でない枝には有限個の同族な式のみが現れることを示している．よって，次の補題を得る．

補題7． 体系 FL'_{ec} における分解木は冗長な枝を含まなければ枝の長さの有限性を満たす．

König の補題および補題 5, 7 より，体系 FL'_{ec} における分解木が有限であることがわかる．体系 FL_{ec} 命題論理で定義された任意の式 S が証明可能であるか否かは，体系 FL'_{ec} の分解木に部分木として S に至る証明図が存在するか否かで判定できる．よって，体系 FL_{ec} 命題論理に対する決定問題の計算量は，分解木の大きさを計算すれば与えられることがわかる．

4.　決定手続きの計算量

この節では体系 FL_{ec} 命題論理の決定問題に対する決定手続きの計算量について論じる．

4.1　相対大集合

自然数を要素に持つ n 次元ベクトル $V=(v_1, \cdots, v_n)$ に対して $\|V\| = \max(v_1, \cdots, v_n)$ とする．n 次元ベクトルの列Γに対して，$lh(\Gamma)$ によりΓの長さを表す．また，$\Gamma(i)$ $(i=0, \cdots, lh(\Gamma)-1)$ により第 i 番目のベクトルを表す．ベクトル列Γにおいて，任意の $0 \le s < t < lh(\Gamma)$ に対して $\Gamma(s)_p > \Gamma(t)_p$ となる $p(1 \le p \le n)$ が存在するとき，Γを部分減列と呼ぶ．ただし，$\Gamma(s)_p$ はベクトル$\Gamma(s)$ の第 p 成分を表す．この p は s, t のとり方に依存してよい．自然数 a, b に対して，$[a, b]$ により集合 $\{a, a+1, \cdots, b\}$ を表す．

定義2． n 回相対大という概念を次のように帰納的に定義する．

（i）$[a, b]$ は，$2a \le b+1$ を満たすとき0回相対大である．

（ii）任意の非減少列 $a=x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_s=b$ $(s \le a)$ に対し，ある i $(i \le s-1)$ が存在して $[x_i, x_{i+1}]$ が n 回相対大となるとき $[a, b]$ は $(n+1)$ 回相対大である．

n 回相対大集合 $[a, b]$ を次のような帰納的に定義される関数を用いて作ることができる．

$$F_1(x) = 2x+1,\quad F_{n+1}(x) = F_n^{x+1}(x).$$

ただし，$h^0(x) = x,\ h^{m+1}(x) = h(h^m(x))$ とする．

補題8． 関数 $F_n(x)$ は原始帰納的関数であり，集合 $[a, F_{n+1}(a)]$ は n 回相対大である．

証明． まず関数 $F_n(x)$ が原始帰納的関数であることを n に関する帰納法で示す．

$n=1$ のとき，$F_1(x) = 2x+1$. 和，積は原始帰納的関数なので $F_1(x)$ も原始帰納的関数である．

$F_n(x)$ か原始帰納的関数であると仮定する．$F_{n+1}(x)=F_n^{x+1}(x)$ であるが，$p(x,y)$ として次のような関数を考える．

$$p(x,0)=x.$$
$$p(x,y')=F_n(p(x,y)).$$

すると，$q(x)=U_1^1(x)$, $h(x,y,z)=F_n(U_3^3(x,y,z))$ とすれば，帰納法の仮定により $h(x,y,z)$ は原始帰納的関数であり，

$$p(x,0)=g(x),$$
$$p(x,y')=h(x,y,p(x,y)),$$

と書けるので $p(x,y)$ は原始帰納的関数である．よって，この $p(x,y)$ を用いれば

$$F_{n+1}(x)=p(U_1^1(x),S(x))=p(x,x'),$$

と書けるので $F_{n+1}(x)$ は原始帰納的関数である．

次に，任意の a について集合 $[a,F_{n+1}(a)]$ が n 回相対大であることを n に関する帰納法で示す．

$n=0$ のとき，$F_1(a)=2a+1$ より，$2a\leq F_1(a)+1$. よって定義により $[a,F_1(a)]$ は 0 回相対大である．

$[a,F_{n+1}(a)]$ が n 回相対大であると仮定する．

$$F_{n+1}(a)=\overbrace{F_{n+1}(\cdots(F_{n+1}}^{(a+1)}(a))\cdots)$$

であるが，

$$F_{n+1}(a)=b_1$$
$$F_{n+1}(F_{n+1}(a))=b_2(=F_{n+1}(b_1))$$
$$\cdots\cdots$$
$$\overbrace{F_{n+1}(\cdots(F_{n+1}}^{(a+1)}(a))\cdots)=b_{a+1}(=F_{n+2}(a))$$

とすると，$[a,b_1]$, $[b_1,b_2]$, $\cdots$, $[b_a,b_{a+1}]$ は帰納法の仮定によりおのおの n 回相対大である．よって，$[a,F_{n+2}(a)]$ は $a+1$ 個の n 回相対大な集合からなっているので，a 個以下のいかなる部分集合に分けても必ず n 回相対大な集合を含むものが存在することになり $(n+1)$ 回相対大の定義を満たす．

$F_n(x)$ は原始帰納的関数であるが，$F_\omega(x)=F_x(x)$ とすると $F_\omega(x)$ は原始帰納的関数ではない．十分大きな x に対して，$F_n(x)<F_\omega(x)$ であるが，$F_\omega(x)$ は Ackermann 関数と同程度に大きくなることが知られている[3]．よって，次の補題を得る．

補題9． $F_\omega(x)$ は Ackermann 関数を初期関数としてもつ原始帰納的関数である．

$G_n(x)$ を，集合 $[x,y]$ が n 回相対大となる最小の y と定義する．このとき，$G_n(x)\leq F_{n+1}(x)$ であるから $G_n(x)$ は原始帰納的関数である．

5. 決定問題の計算量

$C_i^k=\dfrac{k!}{i!(k-i)!}$ とする．このとき，次の補題が成り立つ．この補題は McAloon がペトリ網 (petri net) の有限包含問題 (finite containment problem) の決定手続きの計算量を求めるために導入したものである[6]．

補題10． Γ を k 次元ベクトル $(k\geq 2)$ の部分減列とする．$f:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$ は $f(x)\geq x$ かつ任意の $t'\leq t<lh(\Gamma)$ に対して $f(t)>\|\Gamma(t')\|$ を満たし，かつ $x\geq m$ に対して $f(x)<2^x$ 満たす非減少関数であるとする．$c=\max(m,f(0)^2\cdot C_0^k\cdots C_{k-1}^k\cdot k!)$ としたとき，$a>c$ かつ $[a,b]$ が k 回相対大であるならば $lh(\Gamma)<b$ である．特に a として $c+1$, b として $G_k(c+1)$ をとると $lh(\Gamma)<G_k(c+1)$ である．

n 回相対大の定義と同様に $(n\text{-}f)$ 回相対大という概念を次のように定義する．

(i)′ $[a,b]$ は，$f(a)+a\leq b+1$ を満たすとき $(0\text{-}f)$ 回相対大である．

(ii)′ 任意の非減少列 $a=x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_s=b$ $(s\leq a)$ に対し，ある i $(i\leq s-1)$ が存在して $[x_i,x_{i+1}]$ が $(n\text{-}f)$ 回相対大となるとき $[a,b]$ は $(n+1\text{-}f)$ 回相対大である．

そうすると，$(n\text{-}f)$ 回相対大集合も，次のような帰納的に定義される関数

$$F_1^f(x)=x+f(x)+1,\quad F_{n+1}^f(x)=(F_n^f)^{x+1}(x)$$

によってつくることができる．また，補題8と同様に関数 $F_n^f(x)$ は f を初期関数としてもつ原始帰納的関数であり，集合 $[a,F_{n+1}^f(a)]$ は $(n\text{-}f)$ 回相対大であることなどがいえる．$G_n^f(x)$ を，集合 $[x,y]$ が $(n\text{-}f)$ 回相対大となる最小の y と定義し，$n\geq 1$ に対して $b^{|f,n|}$ を，$[a,b]$ が $(n\text{-}f)$ 回相対大とならない最小の a とする．補題10の証明は，以下の (a) から (g) までの条件を満たす減少集合列

$$[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots[a_{k-1},b_{k-1}]$$

と増加集合列

$$L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{k-1}$$

を構成して $lh(\Gamma) < G^f_k(c+1)$ であることを示し，この結果から導かれている．

（a）$[a_i, b_i]$ は $(k-i-f)$ 回相対大である．

（b）$(a_i, b_i) \cap (L_i \cup fL_i \cup (f)^2(L_i) \cup \{a^2_{i-1}, ca^2_{i-1}, b^{|f, k-1| \cdots |f, k-i|}\}) = \phi$.

ただし，$(a_i, b_i) = \{a_i+1, a_i+2, \cdots, b_i-1\}$, $fL_i = \{f(x) \mid x \in L_i\}$, $(f)^2(L_i) = \{(f(x))^2 \mid x \in L_i\}$.

（c）$L_i \subset [0, \sqrt{a_i}]$ かつ $|L_i| < \dfrac{a_{i-1}}{\sqrt{c}}$.

ただし，$|L_i|$ は集合 L_i に含まれる要素の数．

（d）$fL_i \subset [0, \sqrt{a_i}]$.

（e）$b_i < b_{i-1}^{|f,k-i|}$.

（f）$a^2_{i-1} \leq a_i$ かつ $ca^2_{i-1} \leq a_i$.

（g）任意の $t \in (a_i, b_i)$ に対し，ある $t' \in L_i$ が存在し，i 個の要素からなる $\{1, \cdots, k\}$ のある部分集合 $\mathbf{X}$ の任意の $p \in \mathbf{X}$ に対して $\Gamma(f)_p = \Gamma(t')_p$ が成り立つ．

補題9，10より，次の定理を得る．

定理11. 体系 $\mathrm{FL_{ec}}$ 命題論理の決定問題に対する決定手続きの計算量は Ackermann 関数を初期関数にもつ原始帰納的関数で押えることができる．

証明. 体系 $\mathrm{FL_{ec}}$ 命題論理の決定手続きは式 S が与えられたとすると，体系 $\mathrm{FL'_{ec}}$ においてその分解木をつくることで S が証明可能か否かを判定する．この冗長でない枝からなる分解木に現れる各式を以下に示す方法でベクトル化し，各枝のベクトル化列が部分減列になることからこの定理は証明することができる．体系 $\mathrm{FL'_{ec}}$ は cut 規則を含まないので部分論理式の性質が成り立つ．そこで，まず式 S の部分論理式の数を数える（n_0 とする）．そして，$2n_0+1$ 次元のベクトルを考える．第2成分から第 n_0+1 成分までは，1つの成分に1つの部分論理式を対応させ，左辺に現れている各部分論理式の出現の数をその成分の値とする．第 n_0+2 成分から第 $2n_0+1$ 成分までは同じことを右辺に現れている部分論理式（高々1つ）について行う．式に現れていない部分論理式に対応している成分の値は0とする．$(\supset\to)$，$(\wedge\to)$，$(\vee\to)$，$(\&\to)$ 以外の推論規則に関する分解は，その下式及び上式をそのままベクトル化すればベクトル化列は部分減列になっていることは容易にわかる．しかし，$(\circ\to)$ $(\circ \in \{\supset, \wedge, \vee, \&\})$ に関する式の分解のベクトル化列は例えば次のように部分減列とならない分解もあり得る．

$$\frac{A \supset B, \Delta \to A \quad B, \Delta \to}{A \supset B, \Delta \to}(\supset\to).$$

これは左上方への枝のベクトル化が部分減列とならない．

$$\frac{\Delta \to A \quad B, A \supset B, \Delta \to C}{A \supset B, \Delta \to C}(\supset\to)$$

Δ に B が含まれていれば，右上方への枝が冗長になるのでこのような分解は考えないが，そうでないとき，これは右上方への枝のベクトル化が部分減列とならない．また，ある式の分解を何度か行った後の式が，ベクトル化した際に部分減列の条件を満たさない可能性がある．

これらの分解に対応するために次のような操作を行う．第2成分から第 $2n_0+1$ 成分までのうち，値が0であるものの数を数える（k とする）．そして，この k を第1成分の値とする．例えば次のような体系 $\mathrm{FL'_{ec}}$ での証明図を考える．ただし，A, B は命題変数または恒偽定数とする．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to A \quad B \to B}{A, B \to A \,\&\, B}(\to\&)}{A \wedge B, B \to A \,\&\, B}(\wedge 1\to)}{A \wedge B \to A \,\&\, B}(\wedge 2\to)$$

ここで，S は $A \wedge B \to A \,\&\, B$ であり，その部分論理式は $A, B, A \wedge B, A \,\&\, B$ の4つである．ゆえに，$n_0=4$, $k=6$ となり，証明図のベクトル化は **Fig. 3** のようになる．ただし，第2成分から第5成分まではそれぞれ左辺に現れる $B, A \wedge B, A \,\&\, B$ の数に対応しており，第6成分から第9成分までは同じ順番で右辺に現れる論理式の数に対応している．

ベクトルをわかりやすくるために，第1成分と第2成分及び，左辺と右辺の境となる第5成分と第6成分の間はコンマではなくセミコロン(;)で区切る．このベクトル化された証明図には，左上方への枝と右上方

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{(6;1,0,0,0;1,0,0,0) \quad (6;0,1,0,0;0,1,0,0)}{(5;1,1,0,0;0,0,0,1)}(\to\&)}{(5;0,1,1,0;0,0,0,1)}(\wedge 1\to)}{(6;0,0,1,0;0,0,0,1)}(\wedge 2\to)$$

Fig. 3　vectors of a proof figure

への枝に対応する2本のベクトル列が含まれている．これらは，冗長でないがそのままのベクトル化では部分減列とならない分解（($\wedge$2→）に相当する分解）も第1成分において部分減列の条件を満たす．また，任意の枝の任意の2つの式のベクトル化に対して，そのままでは部分減列の条件を満たさない場合も，やはり第1成分において部分減列の条件を満たす．仮に第1成分が等しいとすると，その2つの式を含む枝は冗長である．よって，この方法による冗長な枝を含まない分解木の各枝のベクトル化列は，部分減列になっていることがわかる．

各枝をベクトル化してベクトル列Γを得たとき，各成分の値は推論規則を見れば明らかなように高々2しか増えないので任意の $t' < t < lh(\Gamma)$ に対して $f(x) = 2x+s$ ($s = \|\Gamma(0)\|$) とすると $\|\Gamma(t')\| < f(t)$ である．この $f(t)$ に対し，$f(x) < 2^x$ となるような最小の x を m とする．すると $n = 2n_0 + 1$, $c = \max(m, s^2 \cdot C^n_0 \cdots C^n_{n-1} \cdot n!)$ としたとき，系10より $lh(\Gamma) < G_n(c+1)$ である．与えられた式の部分論理式の数を入力とすると，c は原始帰納的に計算することができ，枝分かれの数は補題5より，原始帰納的関数で押えられる．よって，分解木の大きさは $G_n(c+1)$ で押えられる．ここで，n 及び c は入力によって変化する値であるが，

$$G_n(c+1) < F_{n+1}(c+1) < F_\omega(c+1)$$

なので補題9により $G_n(c+1)$ は Ackermann 関数をを初期関数にもつ原始帰納的関数で押えられることがわかる．よって，体系 FL_{ec} 命題論理の決定問題に対する決定手続きの計算量は Ackermann 関数を初期関数にもつ原始帰納的関数で押えることができる．

6. おわりに

本論文では弱化規則をもたない直観主義命題論理体系 FL_{ec} に対する決定手続きの計算量の上限を与えた．Ackermann 関数を初期関数としてもつ原始帰納的関数で押えられるという結果は，計算量論理の研究者にしてみればとてつもなく大きな値ということになるだろう．しかし，決定手続きは，Kripke の補題という非構成的な手法を用いている．よって，決定問題を考える際には König の補題を必要としており，有限であることがいえても，どの程度複雑な手続きなのかはわからない．それが Ackermann 関数程度の帰納的関数の範囲内におさまっているのだ，というのも1つの見方である．とはいえ，この結果は1つの上限を与えたに過ぎず，どこまで下げることができるかというのは残された課題である．

謝　辞

本研究を進めるにあたって，多くの助言を頂きました宮野悟助教授に心より感謝致します．また，参考論文を送って頂いた Urquhart 氏，相談に乗って頂いた宮原哲浩氏，篠原歩氏にも心から感謝致します．

参考文献

[1] 有川節夫・宮野　悟，オートマトンと計算可能性，培風館，1986.

[2] Dunn, J. M., *Relevance logic and entailment*, in Handbook of Philosophical Logic Ⅲ, (eds. D. Gabbay and F. Guenthner), D. Reidel, 1986, pp. 177-224.

[3] Ketonen, J. and Solovay, R., *Rapidly growing Ramsey functions*, Annals of mathematics 113 (1981), pp. 267-314.

[4] Kiriyama, E. and Ono, H., *The contraction rule and decision problems for logics without structural rules*, to appear in Studia Logica.

[5] Kripke, S. A., *The problem of entailment* (abstract), Journal of Symbolic Logic **24** (1959), p. 324.

[6] McAloon, K., *Petri nets and large finite sets*, Theoretical Computer Science **32** (1984), pp. 173-183.

[7] Ono, H., *Structural rules and a logical hierarchy*, in Mathematical Logic, Proceedings of the Summer School and Conference on Mathematical Logic, Heyting '88, (ed. P. P. Petkov), Plenum Press, 1990, pp. 95-104.

[8] Takeuti, G., Proof theory 2nd ed., North-Holland, 1987.

[9] Urquhart, A., *The complexity of decision procedures in relevance logic*, Technical report 217/89, Toronto University 1989.