

## 丸みあるコーナーで回折する衝撃波の数値解析

青木, 俊之  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

樫村, 秀男  
北九州工業高等専門学校

尾崎, 康隆  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻 : 日産自動車 (株)

松尾, 一泰  
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

<https://doi.org/10.15017/17229>

---

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 13 (2), pp.181-187, 1991-09-01. 九州大学大学院総合理工学研究科  
バージョン :  
権利関係 :

## 丸みのあるコーナーで回折する衝撃波の数値解析

青木 俊之\* ・ 檜村 秀男\*\*  
尾 寄 康 隆\*\*\* ・ 松 尾 一 泰\*  
(平成3年5月31日 受理)

### Numerical Analysis of a Diffracting Shock Wave around a rounded Corner

Toshiyuki AOKI\*, Hideo KASHIMURA\*\*, Yasutaka OZAKI\*\*\*  
and Kazuyasu MATSUO\*

The diffraction of a plane shock wave at a rounded corner was studied numerically. The numerical analysis was carried out by the two-dimensional piecewise linear method (PLM). It was showed that, for the same corner, the shape of the diffracting shock wave was not held to be self-similar with time. However, the shape of the diffracting shock wave except near the wall were similar in spite that the corner radius changes. The flow field behind the diffracting shock wave was also investigated in the present numerical studies and the characteristics of the second shock wave and the flow separation were discussed.

#### 1. ま え が き

伝播する衝撃波がコーナーを回折する現象は、気体の燃焼や爆発に伴うアトネーション波や爆風波が管壁や構造物と干渉する場合や、衝撃波が管路内を伝播する場合などに見られ、それらを研究する基礎として重要である。コーナーにおける衝撃波の回折現象については多くの研究があるが、そのほとんどはコーナーの角が鋭いものに関するもので<sup>1)2)</sup>、Fig. 1 に示すような丸みのあるコーナーにおける衝撃波の回折現象は、ごく一般的であるのかかわらず、今まで実験的研究が僅かにされているのみで<sup>2)3)</sup>、不明な点が多く残されている。

本研究では、伝播する衝撃波が丸みのあるコーナーを回折する場合に生じる流れ場を一般座標系に拡張したピースワイズリニア法 (PLM) により数値解析し、コーナーを回折する衝撃波背後の流れ場や回折する衝撃波の形状について考察を行った。

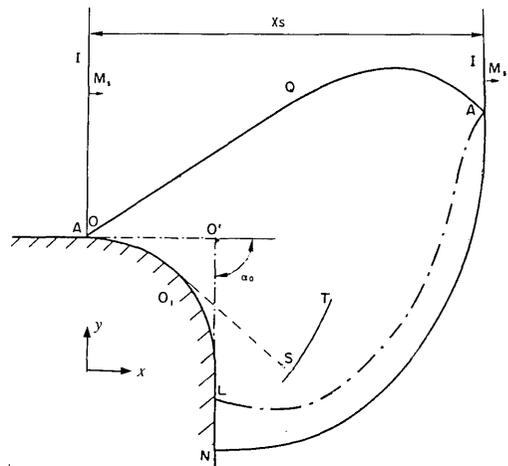


Fig. 1 Wave system behind a diffracting shock wave (I; Incident shock wave, AN; Diffracting shock wave, TS; Second shock wave, AL; Contact surface)

\*エネルギー変換工学専攻

\*\*北九州工業高等専門学校

\*\*\*エネルギー変換工学専攻修士課程 (現在日産自動車株)

## 2. 数値計算法

### 2.1 一般座標系

流れ場を支配する偏微分方程式系を数値計算する場合、流れ場内の境界条件は計算結果に大きな影響を持っている。そのため、境界が曲面であるような場合には、その境界に沿って計算点を持つような一般座標系、すなわち境界適合座標系が最適である。ここでは、Thompson ら<sup>4)5)</sup>の方法により丸みのあるコーナーにおける一般座標系を作成した。このときの物理座標面と変換座標面との対応関係を Fig. 2 に示す。二次元の物理座標系の (x-y) 面上の格子点は、変換座標系の (ξ-η) 面の正方格子点に写像され、物理面上の曲った境界は計算面で直線となる。計算に用いた計算格子の一例を Fig. 3 に示す。図に示すように、境界条件の記述を正確にするため、壁面近傍の格子点は壁と直交させた。

### 2.2 基礎方程式

一般座標 (ξ-η 座標系) に対し、完全気体の二次元非定常非粘性圧縮性流れの質量保存、運動量保存、エネルギー保存の式は次のように表される。

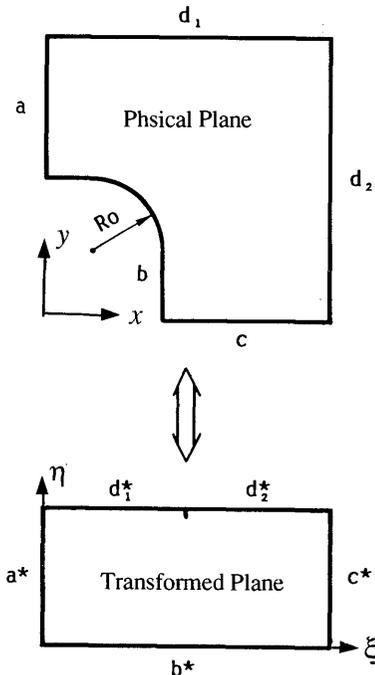


Fig. 2 Field transformation

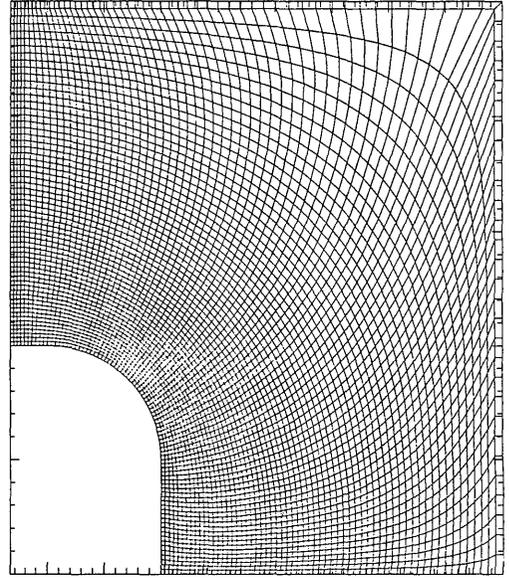


Fig. 3 Grid used calculational domain

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

$$\hat{U} = U/J, \hat{F} = (\xi_x F + \xi_y G) / J,$$

$$\hat{G} = (\eta_x F + \eta_y G) / J, J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (2)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ v(e+p) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$e = \frac{p}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2)$$

ここで、 $\rho$  は流体の密度、 $u, v$  はそれぞれ x 方向、y 方向の速度、 $p$  は圧力、 $\kappa$  は気体の比熱比で、 $e$  は流体の単位体積当りの全エネルギーを表す。

また、上述の基礎方程式は独立変数を  $\mathbf{V} = (\rho, u, v, p)$  とした非保存形で表すと、次式のようにも表される。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{V}) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi} + \mathbf{B}(\mathbf{V}) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} (u\xi_x + v\xi_y) & \rho\xi_x & \rho\xi_y & 0 \\ 0 & (u\xi_x + v\xi_y) & 0 & \xi_x/\rho \\ 0 & 0 & (u\xi_x + v\xi_y) & \xi_y/\rho \\ 0 & \rho c^2\xi_x & \rho c^2\xi_y & (u\xi_x + v\xi_y) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} (u\eta_x + v\eta_y) & \rho\eta_x & \rho\eta_y & 0 \\ 0 & (u\eta_x + v\eta_y) & 0 & \eta_x/\rho \\ 0 & 0 & (u\eta_x + v\eta_y) & \eta_y/\rho \\ 0 & \rho c^2\eta_x & \rho c^2\eta_y & (u\eta_x + v\eta_y) \end{pmatrix}$$

ここで、 $c$  は音速である。

### 2.3 計算手順

本報告ではピースワイズリニア法 (PLM)<sup>67)</sup> を二次元の一般座標系に適用できるように、Strang<sup>68)</sup> が提案した時間分割法を組み合わせて拡張し、前節で述べた流れの基礎方程式を数値解析した。以下に、計算手順を示す。

(a) 流れ場全体の  $\xi$  方向の掃引について計算を行う。

(1) 時間ステップ  $n$  における状態量  $\mathbf{V}_{i,j}^n = (\rho, u, v, p)$  が空間ステップ  $i$  の各点で与えられる。

(2) 各点における状態量  $\mathbf{V}_{i,j}^n$  の  $\xi$  方向の勾配  $\Delta \mathbf{V}_{i,j}^n$  を線形近似法<sup>67)</sup> により求める。

(3) 時間ステップ  $n+1/2$  の時の計算セルの境界における左右の状態量  $S_l = (\rho_l, u_l, v_l, p_l)$ ,  $S_r = (\rho_r, u_r, v_r, p_r)$  を、 $\xi$  方向の非保存形の基礎方程式を用いて次式により計算する。

$$\mathbf{V}_{i+\frac{1}{2},j,l}^n = \mathbf{V}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}(\mathbf{V}_{i,j}^n) \Delta \mathbf{V}_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{V}_{i,j}^n \quad (6)$$

$$\mathbf{V}_{i+\frac{1}{2},j,r}^n = \mathbf{V}_{i+1,j}^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}(\mathbf{V}_{i+1,j}^n) \Delta \mathbf{V}_{i+1,j}^n - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{V}_{i+1,j}^n \quad (7)$$

ただし、行列  $\mathbf{A}$  は式 (5) で表される。

(4) 物理面 ( $x$ - $y$ ) 上の点  $(i+1/2, j)$  での  $\xi$  方向に沿った速度成分  $w^t$  と垂直方向成分  $w^n$  を状態量  $S_l, S_r$  の速度成分  $u_l, v_l, u_r, v_r$  より計算する。

(5)  $S_l = (\rho_l, w_l^t, p_l)$ ,  $S_r = (\rho_r, w_r^t, p_r)$  より  $\xi$  方向に沿ったリーマン問題<sup>67)</sup> を解き、その解を  $S_g = (\rho_g, w_g^t, p_g)$  とする。ただし、速度成分  $w_g^t$  は、次のように風上で取ることにする。

$$w_g^t = \begin{cases} w_l^t & \text{if } w_g^t > 0 \\ w_r^t & \text{if } w_g^t \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

以上により、中間格子点  $(i+1/2, j, n+1/2)$  での状態量  $\mathbf{V}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = (\rho_g, u_g, v_g, p_g)$  及び保存量  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}$  を求める。

(6) 同様にして、中間格子点  $(i-1/2, j, n+1/2)$  での状態量  $\mathbf{V}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}$  及び保存量  $\mathbf{U}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}$  を求める。

(7) 中間格子点の保存量  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $\mathbf{U}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}$  より流束  $\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $\hat{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}$  を計算し、次式より  $\xi$  方向の時間ステップ  $n+1$  における諸量を計算する。

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \Delta t * J_{i,j} (\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (9)$$

(b) 次に、 $\eta$  方向の掃引についても (1) - (7) と同様の計算を行う。

以上の計算を繰り返すことにより、時間分割法<sup>68)</sup> を使い、二次元の流れ場全体の状態量が計算される。すなわち、計算手順 (a), (b) で示される  $\xi, \eta$  方向の差分を演算子  $L_\xi, L_\eta$  で示すと、時間ステップ  $n$  から  $n+1$  への計算は次式で示される。

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = L_\xi \left( -\frac{\Delta t}{2} \right) L_\eta (\Delta t) L_\xi \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \mathbf{U}_{i,j}^n \quad (10)$$

### 2.4 計算条件

今回の計算ではコーナーの回折角度を  $\alpha_0 = 90^\circ$  とし、 $x$  軸に垂直な平面衝撃波が左から右へ伝播し、丸みのあるコーナーで回折する場合を計算する。境界条件として、第二メッシュ系を用い、**Fig. 2** に示す境界 **a** は流入条件、 $d_1, d_2$  はすべりなし壁の条件、**c** は流出条件を与えた。また、壁面 **b** の直線部分はすべり壁の条件を与えたが、曲線のコーナー部分については、壁面上の状態量を次のように計算した。壁面近傍の格子点の速度成分より壁面に垂直方向の圧力勾配求め、等エントロピーの関係より壁面上の圧力と密度を計算する。さらに、よどみ点エンタルピー一定として、壁面上の速度成分を算出した<sup>9)10)</sup>。

計算のパラメータは、入射衝撃波の伝播マッハ数  $\mathbf{M}_s$  と、コーナーの曲りの開始点 (**Fig. 1** の点 **O**) から入射衝撃波 **I** までの距離  $\mathbf{X}_s$  とコーナーの曲率半径  $\mathbf{R}_O$  との比  $\mathbf{X}_s/\mathbf{R}_O$  とした。従って、 $\mathbf{X}_s/\mathbf{R}_O$  は入射衝撃波のコーナーに対する相対位置を示している。計算で使用した  $\mathbf{M}_s$  及び  $\mathbf{X}_s/\mathbf{R}_O$  を **Table 1** に示す。気体は  $\kappa = 1.4$  の空気とした。

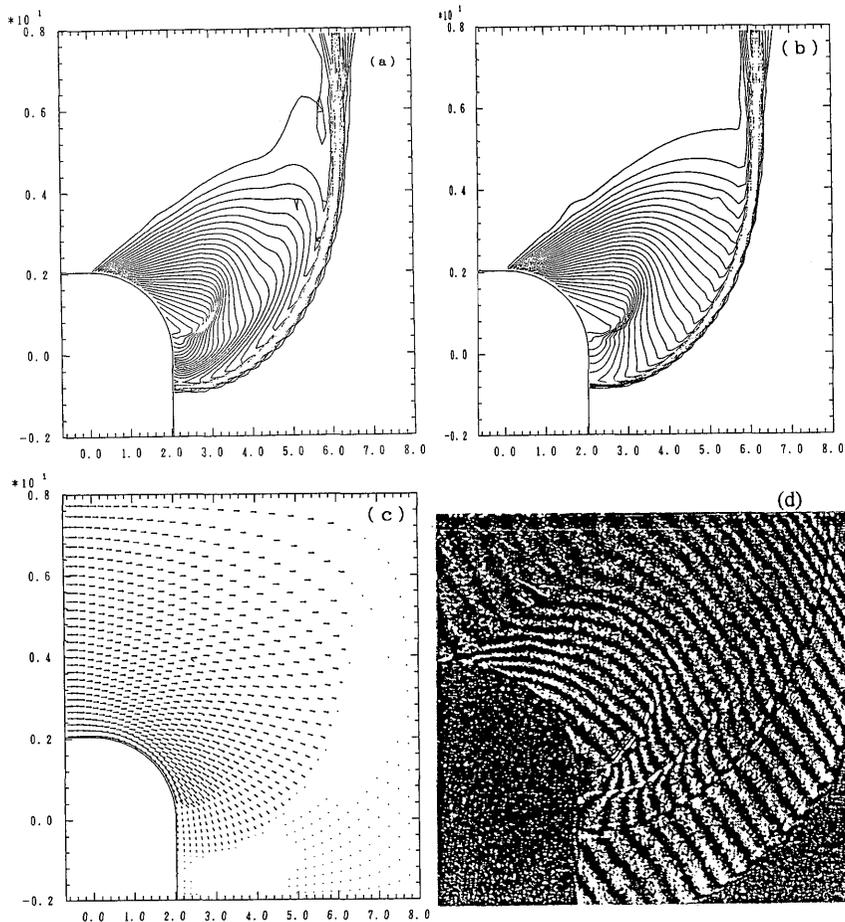
**Table 1** Numerical Conditions

$M_S$	$X_S/R_O$
2.0	5.0
2.5	2.75, 5.0, 10.0, 50.0
4.0	5.0
4.3	5.0
4.7	2.75, 3.05, 5.0, 10.0, 50.0
6.0	5.0
8.0	5.0
10.0	2.75, 5.0, 10.0, 50.0

3. 計算結果及び考察

3.1 計算結果

回折角  $\alpha_0=90^\circ$ , 入射衝撃波マッハ数  $M_S=4.7$  で, 回折する衝撃波と丸みのあるコーナーとの干渉形態の数値解析により得られた等密度, 等圧力及び絶対速度ベクトル線図を **Fig. 4 (a)-(c)** に, 同じ実験条件で Lagutov<sup>3)</sup> によって得られた平行干渉縮写真を **Fig. 4 (d)** に示す. 図からわかるように, 入射衝撃波が丸みの開始点を通ることにより発生した膨張波の波尾, 入射衝撃波がコーナーの影響を受けた部分である回折衝撃波, 回折衝撃波の背後の流れを調節する第二衝撃波, 丸みのあるコーナーの途中からの剝離によるせん



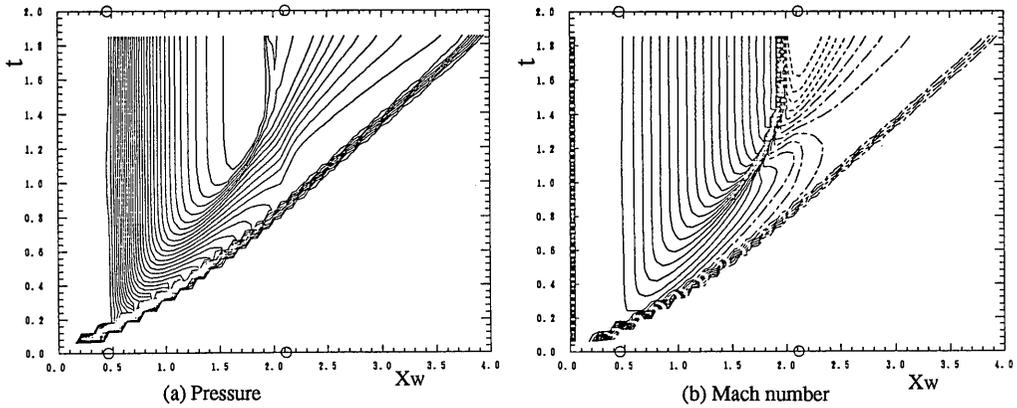
**Fig. 4** Diffracting shock wave around a rounded corner ( $M_S=4.7$ )  
 (a) Density contours, (b) Pressure contours,  
 (c) Velocity vectors, (d) Interferogram by Lagutov

断流, 入射衝撃波が回折する前に加速された流れと回折後に加速された流れとの境界を示す接触面等が計算によって示されており, これらは **Fig. 4 (d)** の実験においても観察され, 発生位置なども良い一致を示している. 従って, 本数値解析は十分な精度があると言える.

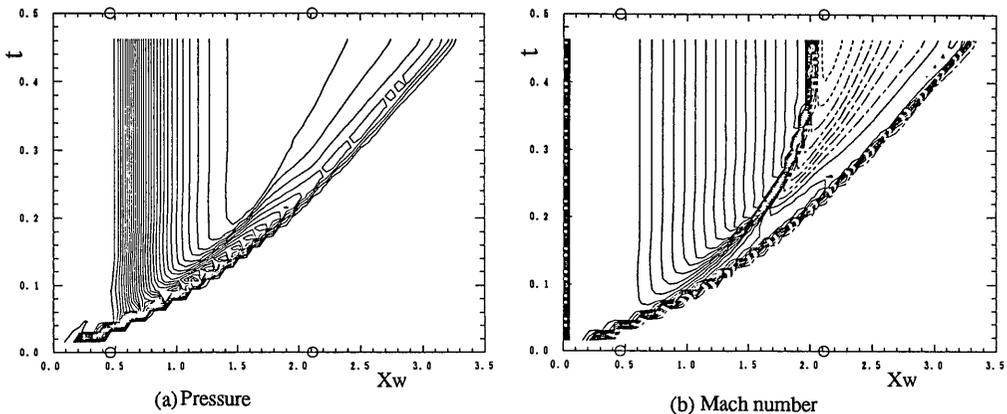
3.2 回折する衝撃波背後の流れ

数値シミュレーションにおいて得られた回折衝撃波背後の流れ場の特性を明確にするために, 丸いコーナーを含んだ壁面上の圧力及び壁面に沿う流れのマッハ数  $M$  の時間的变化の一例を,  $M_S=2.5$  と  $10.0$  の場

合について, **Fig. 5** と **6** に示す. 図中の横軸はコーナーの曲率半径で無次元化した長さ  $X_w=X/R_0$ , 縦軸は実時間  $t'$  を曲率半径  $R_0$  と音速  $a_1$  で無次元化した時間  $t=t'/(\sqrt{\kappa} R_0/a_1)$  である. **Fig. 5 (a)** と **6 (a)** の実線は等圧力線を示し, **Fig. 5 (b)** と **6 (b)** の実線は  $M>1$ , 一点鎖線は  $1>M>0$  の等マッハ線を表し, 破線は逆流している場合の等マッハ線を示している. また, 図中の丸印は丸みのあるコーナー開始点と終了点を示しており, 壁面に沿う回折した衝撃波は左から右へ伝播する. 図に示されるように,  $M_S=2.5$  の場合, 回折衝撃波が通過した直後の流れのマッハ数は最



**Fig. 5** Distributions of a pressure and flow Mach number along a wall ( $M_S=2.5$ )



**Fig. 6** Distributions of a pressure and flow Mach number along a wall ( $M_S=10.0$ )

初は超音速であるが、回折するに従ってその強さが弱まり  $X_W=1.4$  を通過すると流れは亜音速になる。一方、コーナーに沿った流れは加速して圧力が減少するので、回折する衝撃波背後の流れとの圧力調整のための第二衝撃波が  $t=0.8$  ごろより形成されはじめる。すなわち、**Fig. 5 (b)** の  $t=0.8$ 、 $X_W=1.5$  付近での等圧力線の集中が、壁面上での第二衝撃波の形成を示している。この第二衝撃波は、回折する衝撃波とは逆向きの衝撃波で、下流へゆっくりと伝播し、流れの壁面よりの剥離と共に第二衝撃波は壁面を離脱する。その後、剥離開始点が  $X_W=1.9$  の一定の位置に留まり、その背後に定常な逆流域が形成される。一方、 $M_S=10.0$  の場合、傾向は  $M_S=2.5$  と同様であるが回折衝撃波が強いのでその背後の流れは、コーナーを通過しても依然として超音速に保たれる。

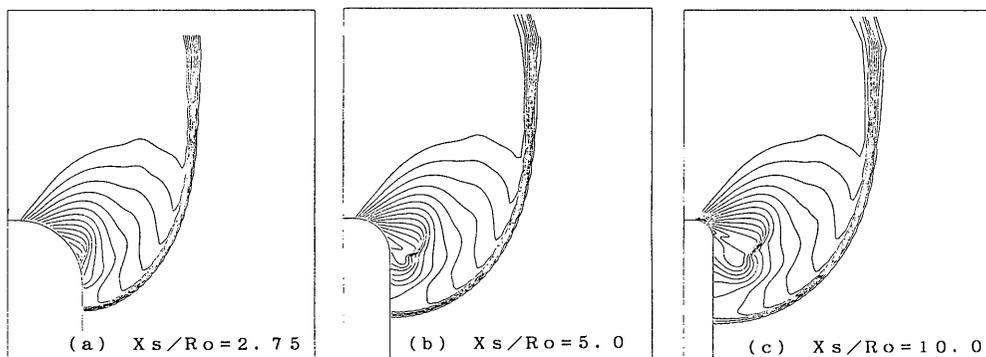
### 3.3 回折する衝撃波の形状

入射衝撃波の伝播に伴い、回折する衝撃波の形状の

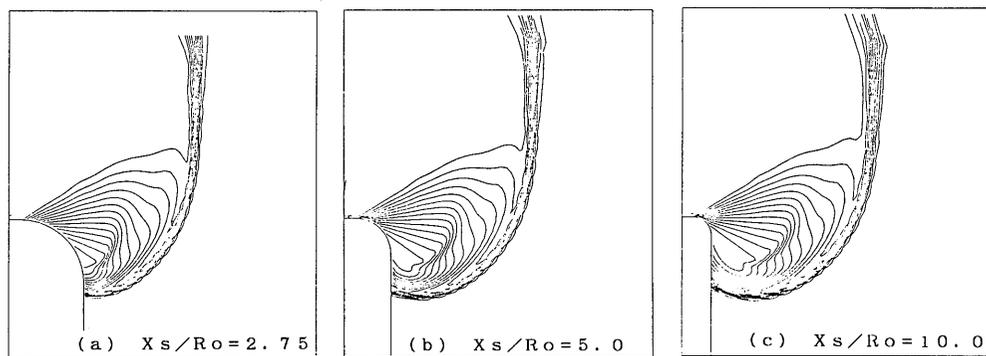
変化を明らかにするために、入射衝撃波の位置  $X_S/R_0$  をパラメータとして、 $M_S=2.5$  及び  $10.0$  の場合について、流れ場の等密度線図を **Fig. 7** と **8** に示す。

**Fig. 7** の  $M_S=2.5$  の場合、最初壁面上に発生した第二衝撃波が、壁面を離脱し下流へ移動するのがわかる。いずれの場合も回折する衝撃波は壁面に垂直に入射するタイプ (Type-N)<sup>711)</sup> である。**Fig. 8** の  $M_S=10.0$  の場合には、回折する衝撃波の形状は、Type-N から、途中に折れ曲がりを生じ (Type-K)、最終的にはマッハ反射の形態 (Type-M) になる。 $X_S/R_0 > 10$  の範囲では、回折する衝撃波の形状は鋭い角のあるコーナーを回折する場合とほとんど同じ形状になり<sup>711)</sup>、コーナーの丸みの影響は失われる。すなわち、 $X_S/R_0 < 10$  の範囲では、丸みのあるコーナーを回折する衝撃波の形状は、鋭いコーナーを回折する場合に認められた自己相似性を保持しないと言える。

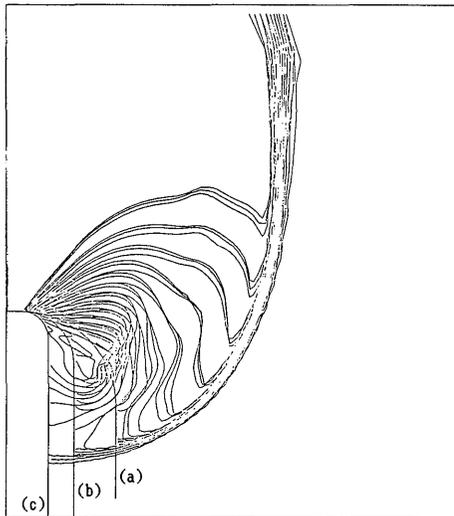
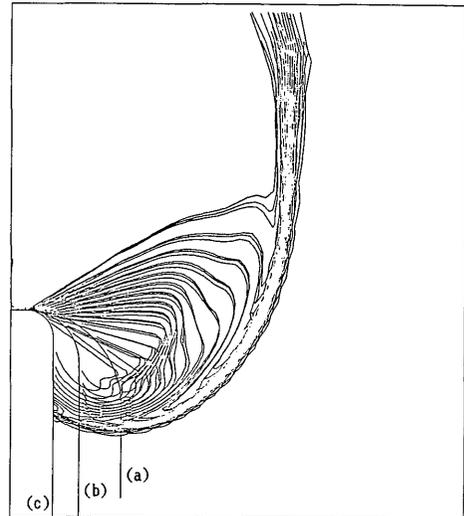
次に、曲率半径の回折する衝撃波の形状に対する影



**Fig. 7** Density contours,  $M_S=2.5$



**Fig. 8** Density contours,  $M_S=10.0$

Fig. 9 Density contours,  $M_s=10.0$ Fig. 10 Density contours,  $M_s=10.0$ 

響を明らかにする。これまでの形状に関する研究<sup>2)</sup>では、Fig. 1 に示すように丸みのあるコーナーに対して、点O'を基準として考えており、その結果はうまく回折する衝撃波の形状を説明していなかった。本研究では入射衝撃波はコーナーの開始点から影響を受けることを考慮して、基準点をコーナーの開始点Oとし、入射衝撃波の位置が相対的に同じ場合について、回折する衝撃波の形状を比較検討する。曲率半径をパラメータとし、 $M_s=2.5$ と $10.0$ の場合の等密度線図を重ねあわせたものを、Fig. 9と10に示す。図からわかるように、壁面上の剥離の位置やその周りの流れ場が異なるにもかかわらず、回折衝撃波の形状は壁面近傍を除いてほとんど同じ形状である。このことは、コーナーの曲率半径が変化する場合、回折する衝撃波の形状がコーナーの開始点を基準とした相似性があることを示している。これは、鋭いコーナーを回折する場合のコーナーの頂点を基準とする相似性と類似している<sup>2)</sup>。

#### 4. 結 論

伝播する衝撃波が丸みのあるコーナーを回折する場合の流れ場を、一般座標系に拡張したピースワイズリニア法を用い数値解析した。得られた結果を要約すると次の通りである。

1. 壁面上の流れの状態量の時間変化を求めること

により、回折する衝撃波背後の流れの変化、特に、第二衝撃波が形成された後、壁面上で剥離が起これると同時に第二衝撃波は壁面から離脱することを明らかにした。

2. 入射衝撃波がコーナーの開始点からコーナーの曲率半径の約10倍の距離を過ぎるまでは、丸みのあるコーナーを解説する衝撃波の形状は自己相似性を保持しない。

3. コーナーの曲率半径が違っていても、入射衝撃波の位置と強さが同じであれば、回折する衝撃波の形状はコーナーの開始点を基準とした相似性がある。

#### 参 考 文 献

- 1) B. W. Skews, J. Fluid Mech., **29-2**, 297 (1967).
- 2) T. V. Bazhenova, et al., Prog. Aerospace Sci., **21**, 249 (1984).
- 3) Y. P. Lagutov, Fluid Dynamics, **18-3**, 484 (1983).
- 4) J. F. Thompson, et al., J. Comp. Phys., **15**, 299 (1974).
- 5) J. F. Thompson, et al., J. Comp. Phys., **124**, 274 (1977).
- 6) P. Colella and H. M. Glaz, Lawrence Berkley Lab. Report, LBL-15776, (1983).
- 7) 松尾・ほか3名, 九大総理工報告, **10-3**, 301 (1988).
- 8) G. Strang, J. Num. Anal., **5-3**, 506 (1968).
- 9) S. Eidelman, P. Colella and R. P. Shreeve, AIAA J., **22-11**, 1609 (1984).
- 10) 大宮司久明, 山本 悟, 日本機械学会論文集, B, **52-473**, 248 (1986).
- 11) K. Matsuo, et al., Proc. 17th Int. Sym. Shock Wave & Shock Tubes, 252 (1989).