

ストカスティックモデルを用いた固気混相自由噴流 の数値解析

清水, 昭比古
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

長谷川, 修
久留米高専

横峯, 健彦
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

<https://doi.org/10.15017/17177>

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 12 (1), pp.23-30, 1990-06-01. 九州大学大学院総合理工学
研究科
バージョン：
権利関係：



ストカスティックモデルを用いた固気混相自由噴流の数値解析

清水 昭比古*・長谷川 修**・横峯 健彦***

(平成2年2月28日 受理)

Numerical Analysis of Gas-Solid Suspension Jet by means of Stochastic Model

Akihiko SHIMIZU, Syu HASEGAWA and Takehiko YOKOMINE

Numerical simulation was performed for a circular free jet of a gas-solid suspension medium by means of so-called stochastic separated flow model and of the algebraic Reynolds stress transport equation model. New source terms, which are incorporated into conservation equations of the diagonal components of the Reynolds stresses and of the turbulent dissipation rate, were proposed in order to account for the excessive generation of the turbulent energy caused by large difference in the average velocities of both phases. Numerical results show that turbulent modulation effects due to the presence of the solid particles are reproduced by these terms so well that the prediction efficiency of the Stochastic model has been largely improved.

1. 緒 言

固気混相媒体の数値解析手法の中で、分散粒子を流体と同様に連続体とみなして、オイラー的な方程式で表現する方法(連続体モデル)は、壁境界条件の取り扱いが非現実的なものになることなどから、これを内部流れに対して用いることには問題がある。これに対して、連続相の流れ場をオイラー的に解き、多数の試行粒子の軌跡をラグランジ的に追跡する方法(個別粒子モデル)は、その適用範囲を内部流れにまで広げ、実際の状況をより忠実に再現できる可能性を持つ。この個別粒子モデルの一つにストカスティックモデルがある。このモデルでは、粒子が確率的に求められる速度瞬時値を持つ渦(流体塊)と次々に相互作用しながら運動するとして多数の粒子の飛跡を追跡し、さらに、粒子の存在する効果を連続相の保存式にフィードバックする、という手順を所定の収束精度が得られるまで繰り返して最終的に混相流の流れ場を求める。したがってこれは一種のモンテカルロ法であり、粒子の乱流拡散を記述でき、しかも粒子に働く種々の力を自由に計算に反映することができるという長所を持ち、広

範囲への応用が期待される。

一方、その潜在的な可能性にも関わらず、ストカスティックモデルがこれまで十分な成功を納めていないのは、過大な計算時間を必要とすることに加えて、次の2点に問題を残していることが主な原因である。すなわち、①粒子が存在することで気流の乱流構造に生ずる変化を的確に記述する方法が確立されていないこと、および②管内流では粒子が壁に衝突した後不規則に反跳して余分な圧力損失を生ずる効果が定量的に把握されていないこと、である。本研究は、最終的にはこの両者を解決してモデルを完成させることを目的とするが、ここでは先ず壁との衝突がない自由噴流を解析対象に選び、上記①の問題に視点をしばってモデルの開発を行う。

上記①の問題は、粒子が存在する効果を的確に表現して、気相の各保存式中に粒子ソースタームとして組み込むことである。気相平均流の運動方程式中の粒子ソースタームは単なる運動量交換項であり、その算定は容易である。したがって、モデル開発の要点は、乱流モデルに用いられる保存方程式中の粒子ソースタームを合理的かつ簡便な形で表現することに帰着する。

その一例として、C. P. Chen¹⁾は乱流渦と粒子の直接的な相互作用にのみ着目し、変動速度スケールでの相対運動で生じる乱れの消散の大きさを乱流渦の時

*エネルギー変換工学専攻

**久留米高専

***エネルギー変換工学専攻修士課程

間スケールと粒子の応答時間の比を独立変数とする指数関数式で評価した項を、 $k-\epsilon$ 乱流モデルの各方程式に付加するモデルを提唱した。しかし、このモデルは両相の平均相対速度が無視できるような微小な粒子の場合に限って有効で、実際に用いられる固気両相間の密度比はほとんどの場合で 10^3 のオーダーであり、慣性の差によって両相間には大きな速度差がつく。本研究ではこの点を改良し、平均速度スケールでの相対運動によって粒子の後流に付加的な乱れが生成される現象を再現したモデルを開発した。これを C. P. Chen らによる原モデルと共に自由噴流の解析に用いて両モデルの妥当性を比較検討した。

2. 計算手法の概略

解析結果を菱田ら²⁾の実験データと比較するため、空气中に粒径 $64 \mu\text{m}$ の球形ガラスビーズ (物質密度

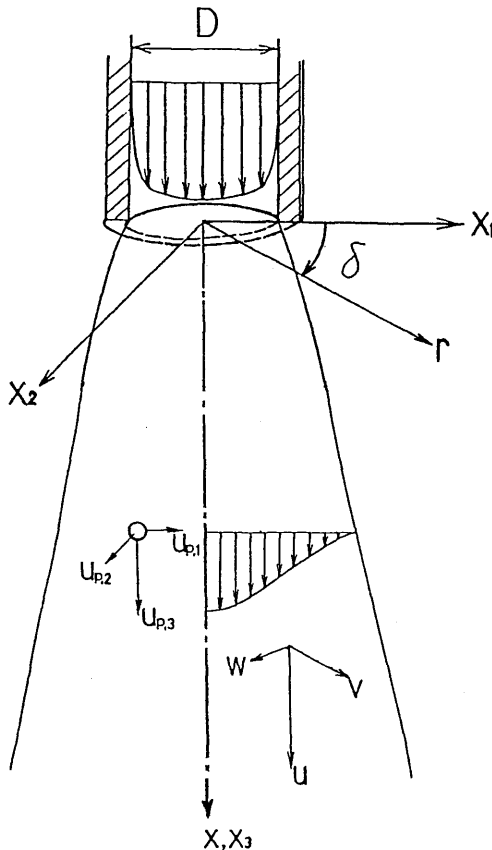


Fig. 1 Flow field schematic

$2,590\text{kg/m}^3$) を浮遊させた鉛直下方円形自由噴流を解析の対象とする。Fig. 1 に計算体系の概略を示す。菱田らの実験データではノズル出口における詳細な情報が与えられていないので、出口での気相速度は十分発達した単相管内流の乱流速度分布を与えた。ノズル径は 13mm で、ノズル出口におけるレイノルズ数は $22,000$ 、ローディング比 Γ (粒子質量流量と気相質量流量の比) は 0.3 である。

2.1 基礎式

乱流モデルには、各乱流成分をより精密に扱うためにレイノルズ応力方程式の輸送項を代数式で近似した Rodi らによる代数応力モデル³⁾を用いる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_r UV) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_r U^2) \\ = \frac{\partial}{\partial r} (\mu_r \frac{\partial U}{\partial r}) - \rho \frac{\partial}{\partial r} (\overline{u'v'}) + S_p \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_r k V) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_r k U) \\ = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\mu + \rho c_s \frac{k}{\epsilon} \overline{v'^2} \right) \right\} \\ + \rho_r P - \rho_r \epsilon + S_{pk} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_r \epsilon V) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_r \epsilon U) \\ = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\mu + \rho c_s \frac{k}{\epsilon} \overline{v'^2} \right) \right\} \\ + \rho_r C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P - \rho_r C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + S_{p\epsilon} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \overline{u'^2} = \frac{2k}{P - \epsilon + c_1 \epsilon} \left\{ \frac{1}{3} (c_1 - 1) \epsilon + (\gamma_1 - 1) \overline{u'v'} \right. \\ \left. \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{3} (\gamma_1 + \gamma_3) P \right\} + S_{pR11} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \overline{v'} = \frac{2k}{P - \epsilon + c_1 \epsilon} \left\{ \frac{1}{3} (c_1 - 1) \epsilon \right. \\ \left. + \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{3} (\gamma_1 + \gamma_3) P \right\} + S_{pR22} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \overline{w'^2} = \frac{2k}{P - \epsilon + c_1 \epsilon} \left\{ \frac{1}{3} (c_1 - 1) \epsilon \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (\gamma_1 + \gamma_3) P \right\} + S_{pR33} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \overline{u'v'} = \frac{2k}{P - \epsilon + c_1 \epsilon} \left\{ \gamma_3 \overline{u'^2} \right. \\ \left. + (\gamma_1 - 1) \overline{v'^2} - \gamma_2 k \right\} \frac{\partial U}{\partial r} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、

$$P = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial r}$$

乱流モデルの定数群は **Table 1** に示す。運動量方程式中の S_p は粒子との正味の運動量交換を表すソースタームであり、PSI-CELL モデル⁴⁾を採用した。(2)~(6)式中の右辺最終項は粒子の存在がそれぞれの量に及ぼす影響を表わす粒子ソースタームである。

一方、仮想質量と履歴の項を無視し、外力として重力のみを考えた場合の粒子運動方程式は次のようになる。

$$\frac{du_{p1}}{dt} = \frac{3\rho C_D}{4\rho_p d_p} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_p| (u_1 - u_{p1}) \quad (8)$$

$$\frac{du_{p2}}{dt} = \frac{3\rho C_D}{4\rho_p d_p} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_p| (u_2 - u_{p2}) \quad (9)$$

$$\frac{du_{p3}}{dt} = \frac{3\rho C_D}{4\rho_p d_p} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_p| (u - u_{p3}) + g \quad (10)$$

ただし、

$$\begin{cases} u_1 = v \cos \delta - w \sin \delta \\ u_2 = v \sin \delta + w \cos \delta \end{cases}$$

ここで、(8)~(10)式中の C_D は粒子の抗力係数を表し、球に対する以下の標準抗力係数を用いた。

$$C_D = \frac{24}{R_{sp}} \left(1 + \frac{1}{6} R_{sp}^{2/3}\right) \quad (R_{sp} < 1000)$$

$$= 0.44 \quad (R_{sp} \geq 1000) \quad (11)$$

(8)~(10)式は運動中の抗力係数を一定値とみなせば、見かけ上の解析解が得られる。

気相に関しては(1)~(7)式にしたがって円筒座標系で取り扱うが、ストカスティックモデルでは粒子の運動は3次元であるから、これを円筒座標系で取り扱うとその運動方程式中に遠心力とコリオリ力が余分

な非斉次項として生じて、上記の解析解を使用できずルンゲクッタ法などの手法をとらなければならない。したがって、計算時間の増大を避けるために、粒子に関しては3次元デカルト座標系で追跡し、必要な気流速度は円筒座標系で求められる主流方向と半径方向の速度をデカルト座標系にベクトル分解して用いた。

2.2 気流速度のランダムサンプリング

各方向の乱流変動速度の確率密度をガウス分布と仮定したときの標準偏差が各変動速度の r. m. s. に対応することを利用して、気流速度の瞬時値をランダムサンプリングすることができる。ここで、気相速度分布は軸対称であるので、 w' に関しては独立にサンプリングすることができるが、残り2方向の変動速度 u' , v' も独立にサンプリングすると結果的にレイノルズ応力 $\overline{u'v'}$ のない場での粒子の運動を追跡することになる。このことが計算結果に与える影響は必ずしも明らかでないが、実際の状況に対応させるために次の手順にしたがって2方向の変動速度に関する結合確率密度関数を求めた。

まず、それぞれの変動速度に対する確率密度関数を単に掛け合わせる。

$$P(u', v') = \frac{1}{2\pi \sigma_u \sigma_v} \exp\left(-\frac{u'^2}{2\sigma_u^2}\right) \times \exp\left(-\frac{v'^2}{2\sigma_v^2}\right) \quad (12)$$

ここで、 $\sigma_u^2 = \overline{u'^2}$, $\sigma_v^2 = \overline{v'^2}$ である。

次にこれを $(-\theta)$ だけ回転させて、レイノルズ応力を模擬する (**Fig. 2**)。

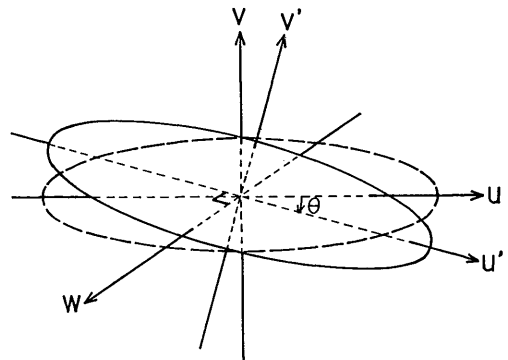


Fig. 2 Coupled probability density function

Table 1 Model constants

γ_1	γ_2	γ_3	C_1	C_s	C_ϵ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$
0.76	0.18	0.20	1.17	0.25	0.15	1.43	1.92

$$P(u', v') = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v} \exp\left\{-\frac{(u'\cos\theta + v'\sin\theta)^2}{2\sigma_u^2}\right\} \\ \times \exp\left\{-\frac{(-u'\sin\theta + v'\cos\theta)^2}{2\sigma_v^2}\right\} \quad (13)$$

このようにしても、規格化条件

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} P(u', v') du' dv' = 1 \quad (14)$$

は満たされる。しかし、回転によって、 $\overline{u'^2}$ と $\overline{v'^2}$ は本来のものとは異なってくる。そこで、標準偏差 σ_u と σ_v を調整可能な変数とみなすと、(11)式は σ_u , σ_v および θ という3つの未知数を含んでいることになり、これらを以下のように流れ場の量と結び付けることにする。ここで、(13)式は次の条件を、満たさなければならない。

$$\overline{u'^2} = \iint_{-\infty}^{+\infty} u'^2 P(u', v') du' dv' \quad (15)$$

$$\overline{v'^2} = \iint_{-\infty}^{+\infty} v'^2 P(u', v') du' dv' \quad (16)$$

$$\overline{u'v'} = \iint_{-\infty}^{+\infty} u'v' P(u', v') du' dv' \quad (17)$$

したがって、 $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{u'v'}$ が流れ場の各点で与えられれば、 σ_u^2 , σ_v^2 , θ を求めることができ、各位置での結合確率密度関数が決まる。実際に代入して演算を行えば σ_u^2 , σ_v^2 , θ の関数は次のようになる。

$$\sigma_u^2 = \frac{\overline{u'^2}\cos^2\theta - \overline{v'^2}\sin^2\theta}{\cos 2\theta}, \\ \sigma_v^2 = \frac{-\overline{u'^2}\sin^2\theta + \overline{v'^2}\cos^2\theta}{\cos 2\theta} \quad (18)$$

$$\overline{u'v'} = \frac{1}{2} \tan 2\theta \cdot (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) \quad (19)$$

レイノルズ応力モデルでは、 $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{u'v'}$ は従属変数として与えられるから、(19)式で確率密度関数の回転角 θ が求まり、(18)式で両方向の標準偏差 σ_u , σ_v が求まる。

2.3 粒子ソースタームの定式化

気相が粒子相から受ける力はストークスの法則にし

たがうと仮定すると、

$$F_i = \frac{\rho_{dp}}{\tau} (u_{p,i} - u_i) \quad (21)$$

となる。ここで、 τ は粒子緩和時間を、 ρ_{dp} は粒子分散密度を表す。これを気相の運動方程式に組み込み、通常のレイノルズ分解と平均操作を施して (2)~(7) の各方程式を求めると、レイノルズ応力の対角成分に対する方程式中には $S_{pRii} = 2\overline{u'_i F_i}$ (i についての縮約なし)、乱流エネルギー方程式中には、 $S_{pk} = \overline{u'_i F_i}$ (i についての縮約あり)、そして乱流エネルギー消散率方程式中には $S_{p\epsilon} = 2\mu (\partial u'_i / \partial x_i) (\partial F_i / \partial x_i)$ の形で粒子ソースタームが導入される。ただし、レイノルズ応力に関しては、粒子による垂直応力への寄与のみを考え、乱流せん断応力に対する粒子の影響は考慮していない。相関 $\overline{u'_i F_i}$ の厳密形は次のようになる。

$$\overline{F_i u'_i} = \frac{\rho_{dp} (\overline{u'_i u'_i} - \overline{u'_i u'_i})}{\tau} \quad (a)$$

$$+ \frac{\rho'_{dp} \overline{u'_i} (U_{p,i} - U_i)}{\tau} \quad (b)$$

$$+ \frac{\rho'_{dp} \overline{u'_i} (\overline{u'_{p,i}} - \overline{u'_i})}{\tau} \quad (c) \quad (22)$$

(c)項は三重相関を含むため無視する。C. P. Chen らは(b)項も無視し、(a)項のモデル化として、

$$\frac{\overline{u'_i u'_i}}{\overline{u'_i u'_i}} = \exp(-B \frac{\tau}{t_e}) \quad (23)$$

を仮定した。ここで、 t_e はエネルギー含有渦の時間スケール、 B はモデル定数である。結局、C. P. Chen らによる粒子ソースタームは、乱流エネルギーと乱流エネルギー消散率について次のようになる。

$$S_{pk} = \frac{2\rho_{dp}}{\tau} k \left\{ \exp(-0.503 \frac{\epsilon}{k} \tau) - 1 \right\} \quad (24)$$

$$S_{p\epsilon} = -\frac{2\rho_{dp}}{\tau} \epsilon \quad (25)$$

本研究では、C. P. Chen らが無視した (b) 項に着目し、以下のようなモデル化を行った。固気両相間の大きな慣性の差によって大きな相対速度が発生する。これにより、粒子の後流に発生する渦によって周囲流体の乱れが生成されると仮定すると、(b) 項を両相間の相対速度の大きさに依存した付加的な乱れの生成項と

見なすことができる。そこで、本研究では以下のモデルを提唱する。

$$S_{pRii} = \frac{2\bar{\rho}_{dp}}{\tau} \sqrt{u_i'^2} \left\{ \exp\left(-0.503 \frac{\epsilon}{k} \tau\right) - 1 \right\} + \frac{c_i \bar{\rho}_{dp}}{\tau} \sqrt{u_i'^2} |U_{p,i} - U_i| \quad (26)$$

$$S_p \epsilon = C_p \frac{\epsilon}{k} (S_{pR11} + S_{pR22} + S_{pR33}) \quad (27)$$

c_i, c_p はモデル定数で、それぞれ $c_i = 0.4, c_p = 0.5$ である。

3. 解析結果と検討

固気混相流を計算する前に、単相流の解析を行い計算コードの妥当性を確かめた。また、混相流の計算で

追跡する試行粒子の数は2,000~4,000個とし、円筒座標に対応した重み処理を行い、全ての粒子が計算体系を出た後に粒子に関する諸量を統計処理した。以下では C. P. Chen らによる粒子ソースタームモデルを用いた場合を Case 1, 本研究で提唱した粒子ソースタームモデルを用いた場合を Case 2 とする。

Fig. 3 に両相の流れ方向の平均速度を単相時の噴流中心速度 U_m で無次元化し、同じく単相時の半値幅 b で無次元化した半径方向距離との関係を示す。両ケースとも気相に関しては流れ場全体で実験結果をよく再現しているが、いずれの場合もノズル出口下流10直径 ($X/D=10$) の位置で粒子速度の計算値は噴流外縁に行くにしたがって実験値よりも遅れてくる。これは、計算では粒子相のノズル出口での速度分布を気相速度分布と一致させたために、ノズル管壁付近での粒子速度分布が実際の状況と矛盾しているためと考えられる。

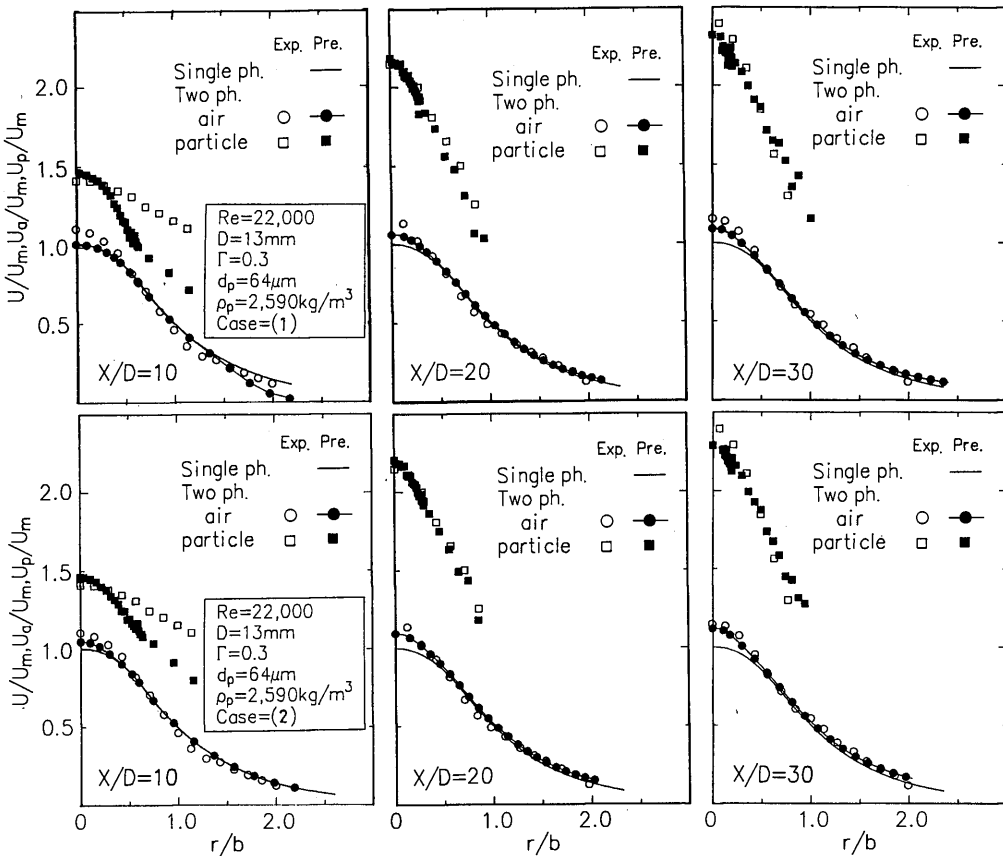


Fig. 3 Mean velocity profiles

この図からわかるように、両相間の速度差は下流に行くにしたがって大きくなり、粒子速度は最大で気相速度の約2倍となる。Fig. 4, Fig. 5 にそれぞれ混相噴流の噴流軸中心気相速度 U_{ma} で無次元化された流れの方向および半径方向の乱れ速度と、同じく混相噴流の半値幅 b_a で無次元化された半径方向距離との関係を示す。Case 1 の流れ方向の乱れ強度は、流れ場全体で単相噴流とほぼ同じ分布形状を保っており、単相時の値よりわずかに減少しているに過ぎない。これに

対し、Case 2 では、粒子添加によって乱れ強度が単相噴流の値よりも噴流軸中心付近で増加し、噴流外縁に行くにしたがって逆に単相時の値よりも減少する傾向が再現されている。一方、半径方向の乱れ強度の実験結果は、流れ場全体で単相噴流の値より一様に減少しているが、Case 1 の $X/D=10$ では、粒子が存在しない領域で乱れ強度が増加している。また、それよりも下流域では全体的に乱れ強度は減少しているが、実験結果を再現するには至っていない。Case 2 の

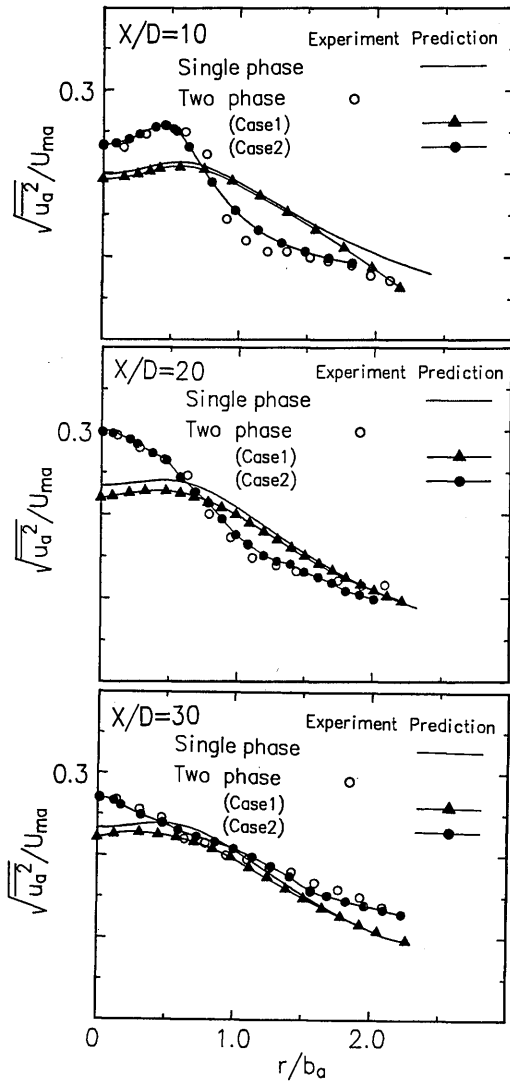


Fig. 4 Streamwise turbulence intensity profiles

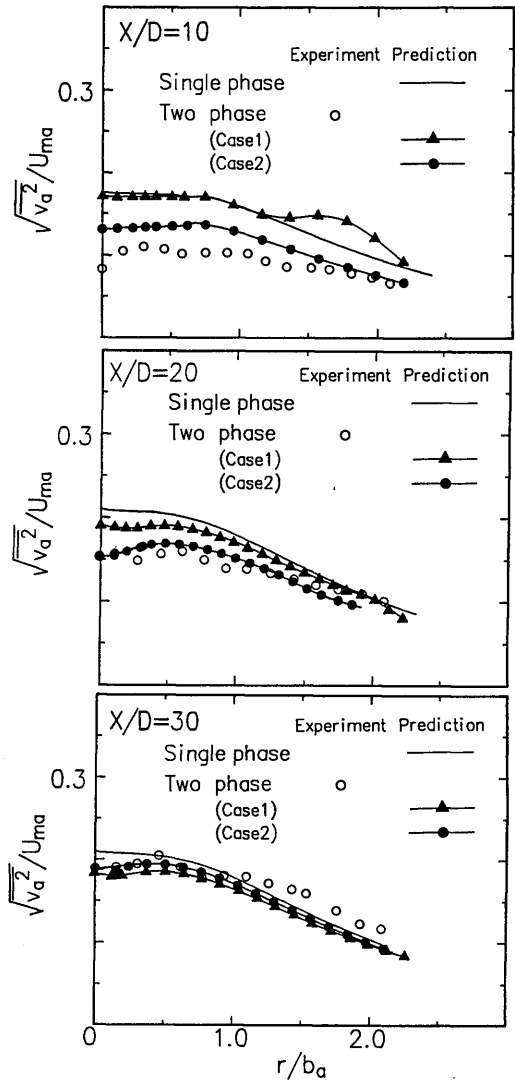


Fig. 5 Radial turbulence intensity profiles

X/D=10での結果はCase 1よりも改善されているが、実験値よりも約30%程大きくなっている。しかし、それよりも下流域においては、実験値をほぼ再現することができている。Fig. 6に上と同じく U_{ma} で無次元化されたレイノルズ応力と b_a で無次元化された半径距離との関係を示す。Case 1の結果は、X/D=10で単相時と変化がなく、またそれより下流域では実験値の定性的な変化は再現しているが、定量的には不十分である。Case 2の結果は、Case 1と比べてX/D=

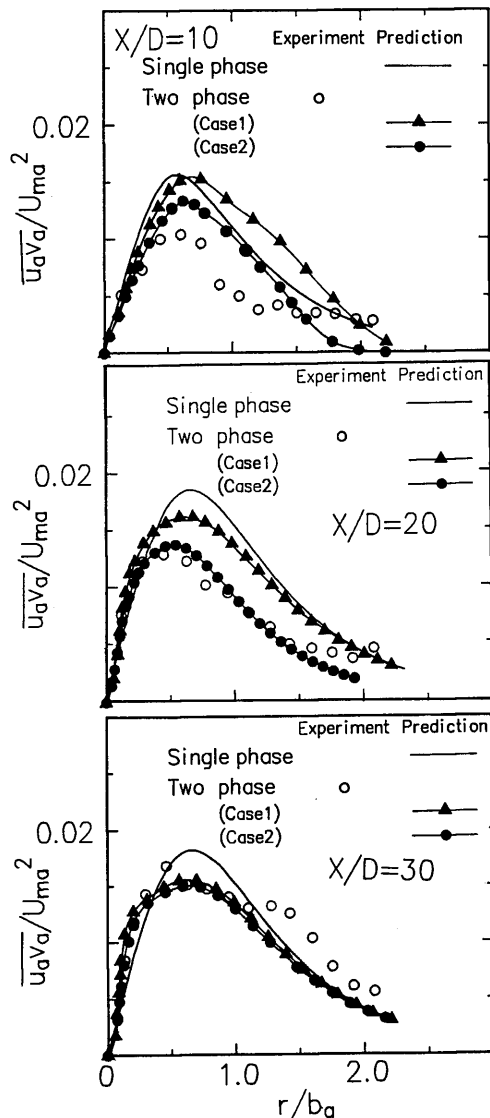


Fig. 6 Turbulent shear stress profiles

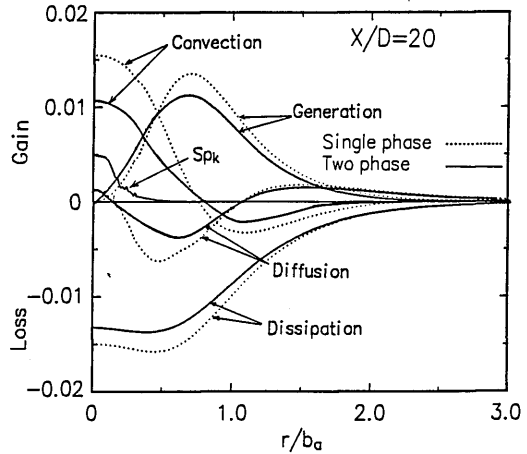


Fig. 7 Turbulent energy balance

10で改善されているが、実験結果を過大評価している。また、X/D=20, 30での値は定量的にも実験結果を再現している。

Fig. 3からFig. 6を通じて、未発達領域のX/D=10における解析結果はX/D=20より下流の発達領域でのそれに比べて、実験値を十分に再現していない。これは、計算でノズル出口条件として与えた乱流エネルギー分布が実状と一致しないことに起因すると思われる。

Fig. 7は、X/D=20において乱流エネルギー方程式の各項に b_a/U_{ma}^3 を乗じて無次元化した値をとったものである。点線は単相噴流の値を、実線は混相噴流の値を示しており、粒子ソースタームとしては本モデルを用いた結果である。粒子が添加されることにより、乱流エネルギーの生成項及び消散項のいずれも全体的に低下している。また、粒子ソースタームは、乱流エネルギーの生成がほとんどない領域で付加的な生成項として働き、 r/b_a が0.5付近からは逆に付加的な消散項としての働きをしている。

C. P. Chenらによる粒子ソースタームは、流体と粒子の変動速度スケールでの相対運動で生じる付加的な乱れの生成によって、流体の乱流エネルギーの余分な消散が引き起こされる過程をモデル化したものである。そのため、対応する各方程式に対しては消散項としてしか働かない。現段階ではその定量的な面での妥当性を議論することはできないが、C. P. Chenらによるモデル単独では流れ場の乱れ構造の変化を定性的にも再現することができなかった。これに対し、平均速度ス

ケールでの相対運動で生じる粒子の後流の渦が周囲流体の乱れの増加につながると考えて、C. P. Chen らが無視した (24) 式 (b) 項をモデル化した場合、少なくともここで対象とした固気混相自由噴流に関しては、このモデル化により未発達領域については定性的に、発達領域については定量的かつ定性的に実験結果をある程度再現することができた。

4. 結 言

ストカスティックモデルを用いて固気混相流の数値シミュレーションを行う際に問題となる粒子の存在による気流の乱れ構造の変化を記述する方法として、粒子ソースタームを乱流モデルの保存方程式中に付加することを考え、そのモデル化を行った。C. P. Chen らによるモデルに両相の平均相対速度に依存した間接的な乱れの生成項を付加した粒子ソースタームを用いることによって、固気混相自由噴流についての実験結果をある程度再現することができた。しかし、本来流体渦と粒子の相互作用を考える場合、流体の乱れのスケールに対する粒子のスケールの関係がなんらかの形で考慮に入れられるべきであるが、本モデルには両者の関係式は含まれていない。本モデルを自由噴流に限らず、様々な流れに適用するにはこの点の解決が今後必要になるであろう。

記 号

b : 気相速度半値幅
 C_D : 粒子抗力係数
 D : ノズル径
 d_p : 粒径
 g : 重力加速度

k : 乱流運動エネルギー
 r : 半径方向距離
 Re : ノズル出口レイノルズ数
 Re_p : 粒子レイノルズ数
 U, u, u' : 流れ方向気相速度
 u_{p1}, u_{p2}, u_{p3} : 粒子速度
 V, v, v' : 半径方向気相速度
 w, w' : 周方向気相速度
 x : 流れ方向距離
 Γ : ローディング比
 ϵ : 乱流エネルギー消散率
 μ : 粘性係数
 ρ : 密度
 ρ_p : 粒子物質密度
 ρ_ϕ : 粒子分散密度
 σ : 標準偏差
 τ : 粒子緩和時間

添 字

a : 混相噴流における気相の値
 i, j : i, j 方向
 m : 噴流中心軸上の値
 $'$: 乱流変動値

参 考 文 献

- 1) C. P. Chen and P. E. Wood, Can. J. Engng., **Vol. 63**, p. 349 (1985).
- 2) 菱田, 金子, 前田, 機論 (B編), 51-467, p. 2330 (昭60).
- 3) W. Rodi, ZAMM, **56**, p. 219 (1976).
- 4) C. T. Crow, M. P. Sharma, and D. E. Stock, ASME J. Fluid Eng., **99**, p. 325 (1977).