

任意に配置された分散熱源をもつ垂直平行平板間の 層流共存対流熱伝達（第1報：平板内での熱伝導を 無視した場合）

藤井, 丕夫
九州大学大学院総合理工学研究科熱エネルギーシステム工学専攻

富村, 寿夫
九州大学大学院総合理工学研究科熱エネルギーシステム工学専攻

竹之下, 健
九州大学大学院総合理工学研究科熱エネルギーシステム工学専攻

<https://doi.org/10.15017/17170>

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告．11（4），pp.395-401，1990-03-01．九州大学大学院総合理工学研究科
バージョン：
権利関係：



任意に配置された分散熱源をもつ垂直平行平板間の 層流共存対流熱伝達

(第1報：平板内での熱伝導を無視した場合)

藤井 丕夫*・富村 寿夫*・竹之下 健**

(平成元年11月30日 受理)

Laminar Mixed Convection Heat Transfer between Vertical Parallel Plates with Discrete Heat Sources Placed at Arbitrary Intervals (Part 1 : Insulated Plates)

Motoo FUJII, Toshio TOMIMURA and Takeshi TAKENOSHITA

Two-dimensional Navier-Stokes and energy equations are numerically solved for laminar air flow between insulated parallel plates with five discrete heat sources placed at arbitrary intervals. Parametric calculations are performed to determine the effects on velocity and temperature distributions of Reynolds number ($500 \leq Re \leq 2000$), modified Grashof number ($0.5 \times 10^6 \leq Gr^* \leq 2.0 \times 10^6$), and heat source locations. A general method to predict the maximum and minimum temperatures on each heat source is proposed. Comparing the numerical results, it is shown that by using the method the maximum and minimum temperatures can be predicted within a practical accuracy.

1. 緒 言

半導体パッケージなどの電子部品からの発熱による電子機器の温度上昇は、その信頼性や情報処理性能の向上に大きな障害となる¹⁾。特に、最近の電子部品の高密度実装に伴う発熱密度の増加は著しく、電子機器の冷却の合理的な熱設計法の開発が急がれている。その一つの試みとして、電子計算機の基板群上に分散配置された任意の発熱量、形状、寸法の半導体パッケージ群を空冷した場合の最高温度の予測法に関する研究^{2)~9)}が盛んに行われているが、その形態が多様であるため、一般的な方法は未だ確立されていない。

本問題に関連して、著者らはこれまでに基板上のパッケージ群を平行平板間に分散配置された厚みの無い熱源群で置き換えた簡単な二次元モデルを用い、層流共存対流に関する一連の数値解析を行ってきた^{10)~13)}。その結果、まず平板内での熱伝導を無視し、発熱量および寸法が同じ熱源が等間隔で配置されている場合、

各熱源の最高温度が簡単な整理式で表示できることを示した¹⁰⁾。続いて最高温度におよぼす平板内での熱伝導の影響を調べ、その影響も考慮した整理式を提案した¹¹⁾。さらに、熱源の発熱量が異なる場合についても数値解析を行い¹²⁾¹³⁾、熱源がある側の最低温度に関する整理式を求め、この式と先に提案した最高温度の整理式を用いて発熱量が異なる場合の最高温度を予測する方法を提案した。

本報では、平板内での熱伝導を無視した場合について、発熱量および寸法が同じ熱源が異なる間隔で置かれた条件での数値解析を行うことにより、任意に配置されたパッケージ群の最高温度を予測するための整理式を提案する。

【使用記号】

c_p : 定圧比熱

Gr^* : 修正グラスホフ数 $= g \beta q_m h^4 / \lambda \nu^2$

Gr^{**} : 修正グラスホフ数 $= Gr^* H_{w,j, max}$

g : 重力加速度

H_w : Y 方向の無次元熱流束 $= -\lambda \partial T / \partial y |_{y=0/q_m}$

*熱エネルギーシステム工学専攻

**熱エネルギーシステム工学専攻修士課程

- h : 平板間隔
 L : 無次元平板高さ $= l/h$
 L_i : 平板入口から第1熱源先端までの無次元距離 $= l_i/h$
 L_o : 第5熱源後端から平板出口までの無次元距離 $= l_o/h$
 l : 平板高さ
 l_i : 平板入口から第1熱源先端までの距離
 l_o : 第5熱源後端から平板出口までの距離
 Pr : プラントル数 $= c_p \mu / \lambda$
 Q_{wj} : 分散熱源の無次元熱流束 $= q_{wj} / q_m$
 q_m : 平均熱流束 $= \sum_{j=1}^5 q_{wj} / 5$
 q_{wj} : 分散熱源の熱流束
 Re : レイノルズ数 $= u_m 2h / \nu$
 S_j : 無次元熱源間隔 $= s_j / h$
 s_j : 熱源間隔
 T : 絶対温度
 U : X方向の無次元速度成分 $= u / u_m$
 u : x方向の速度成分
 u_m : 平均速度
 V : Y方向の無次元速度成分 $= v / u_m$
 v : y方向の速度成分
 W : 無次元熱源長さ $= w/h$
 w : 熱源長さ
 X : 平板に平行な無次元空間座標 $= x/h$
 x : 平板に平行な空間座標
 Y : 平板に直角な無次元空間座標 $= y/h$
 y : 平板に直角な空間座標

【ギリシャ文字】

- β : 体膨張係数 $= 1/T_\infty$
 θ : 無次元温度 $= (T - T_\infty) / (q_m h / \lambda)$
 μ : 粘性係数
 λ : 熱伝導率
 ν : 動粘性係数
 Ψ : 無次元流れ関数 $= \psi / (u_m h)$
 ψ : 流れ関数
 Ω : 無次元渦度 $= \omega / (u_m / h)$
 ω : 渦度

【添字】

- j : 熱源あるいは熱源間の番号
 max : 最大値
 min : 最小値

- w : 平板表面
 ∞ : 周囲状態

2. 理 論

2.1 物理モデル、基礎方程式および境界条件

物理モデルと座標系を Fig. 1 に示す。間隔 h で置かれた高さ l の垂直平行平板の一方に、長さ w と熱流束 $q_{wj} = q_w$ ($j = 1 \sim 5$) が同じ5個の熱源が間隔 s_j ($j = 1 \sim 4$) で並んでいる場合を取り扱う。熱源 $j = 5$, 1と流路出入口の距離は l_o , l_i である。空気 ($Pr = 0.7$) は一様速度 u_m , 周囲温度 T_∞ で流入すると仮定し、流入速度は浮力の影響が無視できない程度に小さく、流れは共存対流域にあるとする。平板内の熱伝導と平板間でのふく射熱交換は考えない。

本モデルに対する二次元の基礎方程式は、速度 u, v に関する Navier-Stokes 方程式と温度 T に関するエネルギー方程式である。浮力項に現れる密度以外の物性値は一定と仮定し、Boussinesq 近似を用い、流れ関数 ψ と渦度 ω を導入すると、無次元化した基礎方程式は次式となる。

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (1)$$

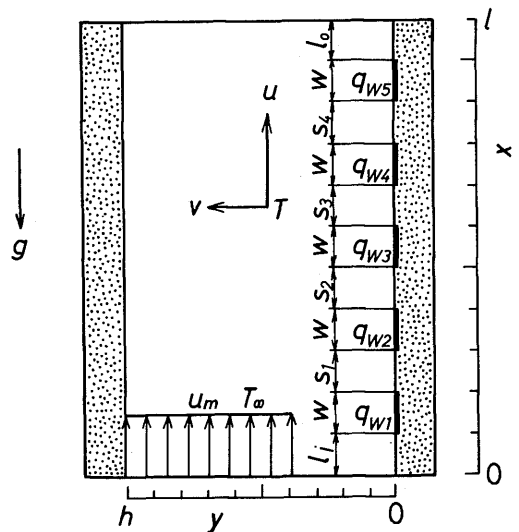


Fig. 1 Physical model and coordinate system

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial X} \left(\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right) \\
&= -4 \frac{Gr^*}{Re^2} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\
&+ \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right) \right] \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial X} \left(\theta \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\theta \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right) \\
&= \frac{2}{RePr} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] \quad (3)
\end{aligned}$$

また、境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
X=0, 0 \leq Y \leq 1 : \Psi=Y, \Omega=0, \theta=0 \\
X=L, 0 \leq Y \leq 1 : \Psi=\Psi_{ex}, \Omega=\Omega_{ex}, \theta=\theta_{ex} \\
0 \leq X \leq L, Y=0 : \Psi=0, \Omega=-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \\
\frac{\partial \theta}{\partial Y} = -Q_{wj} (\text{熱源部}), 0 (\text{非加熱部}) \\
0 \leq X \leq L, Y=1 : \Psi=1, \Omega=-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}, \frac{\partial \theta}{\partial Y}=0
\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、流路出口 ($X=L$) での Ψ , Ω , θ は一般に予め与えられないので、既報¹⁰⁾と同様に数値計算の反復過程で上流側2格子点の値から得られる外挿値 Ψ_{ex} , Ω_{ex} , θ_{ex} を流出境界条件として用いた。本条件を与えることの妥当性については既に報告した¹⁰⁾。なお、式(1)~(4)の無次元数は次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned}
X=\frac{x}{h}, Y=\frac{y}{h}, U=\frac{u}{u_m}, V=\frac{v}{u_m} \\
\theta=\frac{T-T_\infty}{(q_m h/\lambda)}, q_m=\sum_{j=1}^5 \frac{q_{wj}}{5} \\
\Psi=\frac{\phi}{u_m h}, \Omega=\frac{\omega}{(u_m/h)} \\
U=\frac{\partial \Psi}{\partial Y}, V=-\frac{\partial \Psi}{\partial X}, \Omega=\frac{\partial V}{\partial X}-\frac{\partial U}{\partial Y} \\
Re=\frac{u_m 2h}{\nu}, Gr^*=\frac{g\beta q_m h^4}{\lambda \nu^2}, Pr=\frac{c_p \mu}{\lambda} \\
L=\frac{l}{h}, L_i=\frac{l_i}{h}, L_o=\frac{l_o}{h}, S_j=\frac{s_j}{h}, W=\frac{w}{h} \\
Q_{wj}=\frac{q_{wj}}{q_m} (j=1\sim 5)
\end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2.2 基礎方程式の差分化と数値計算方法

既報¹⁰⁾と同様、基礎方程式(1)~(3)を不等間隔メッシュで分割した要素に関して積分し、風上差分を適用して差分化した¹⁴⁾。

数値計算は逐次代入法によって行い¹⁰⁾、解の収束判定として、次の条件を与えた。

$$\frac{|\Gamma^n_{IJ}-\Gamma^{n-1}_{IJ}|_{\max}}{|\Gamma^n_{IJ}|_{\max}} \leq 5 \times 10^{-5} \quad (6)$$

ここで、 I, J は X, Y 方向の格子点、 n は数値計算の反復回数、 $\max$ は最大値を表し、 Γ は θ , Ψ あるいは Ω のうちで、上式の左辺の値が最大となるものである。

計算は $Re=500\sim 2000$, $Gr^*=0.5 \times 10^6 \sim 2.0 \times 10^6$, $Pr=0.7$, $L=11$, $W=1$, $L_i=0.25\sim 1.75$ ($L_o=1.75\sim 0.25$), $S_j=0.5\sim 1.5$ の条件で行った。

本計算精度の目安となる流路出口でのエネルギー・バランスは、この条件下で $\pm 2\%$ 以内であった。

3. 結果と考察

3.1 温度分布と速度分布

$Re=1000$, $Gr^*=0.5 \times 10^6$, $Pr=0.7$, $L=11$, $W=1$ の条件下で、**Fig. 2** は $L_i=0.25\sim 1.75$ ($L_o=1.75\sim 0.25$), $S_j=1$ ($j=1\sim 4$) の場合について、**Fig. 3** は $S_j=0.5\sim 1.5$, $L_i=L_o=1$ の場合についての熱源がある側 ($Y=0$) の平板温度 θ_w に関する計算結果である。また、**Figs. 4, 5** に **Figs. 2, 3** に対応する速度分布を示す。なお、熱源を“■”で示してある。

熱源の間隔 S_j を一定にして、 $L_i(L_o)$ を変化させた **Fig. 2** の場合、入口近傍の平板温度は、速度分布の発達の程度が異なるために L_i によってわずかに異なる分布となる。しかし、出口近傍の最高温度は L_i によってほとんど影響を受けない。一方、 $L_i(L_o)$ を一定にして、間隔 S_j を変化させた **Fig. 3** の場合には、間隔が不均一となる場所 X によって出口近傍の最高温度は若干異なる値を示す。なお、温度分布の場合と異なり、速度分布におよぼす熱源の配置の違いによる影響はほとんど見られない。

3.2 最高および最低温度

先に、熱源 $j=5$, 1 と流路出入口の距離が $L_i=L_o=1$, 熱源の長さが $W=1$, 熱源の間隔が $S_j=1$ の場合、任意に発熱する熱源 q_{wj} の最高温度 $\theta_{wj,\max}$ および熱源 j と $j+1$ の間での最低温度 $\theta_{wj,\min}$ は、平板

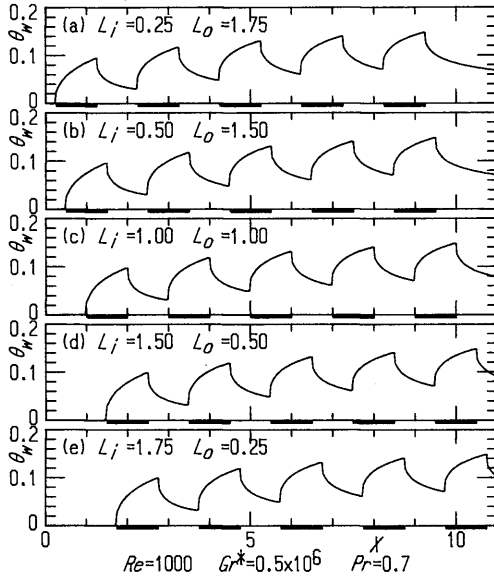


Fig. 2 Wall Temperature distributions
 $L_i = 0.25 \sim 1.75$ ($L_o = 1.75 \sim 0.25$), $S_j = 1$

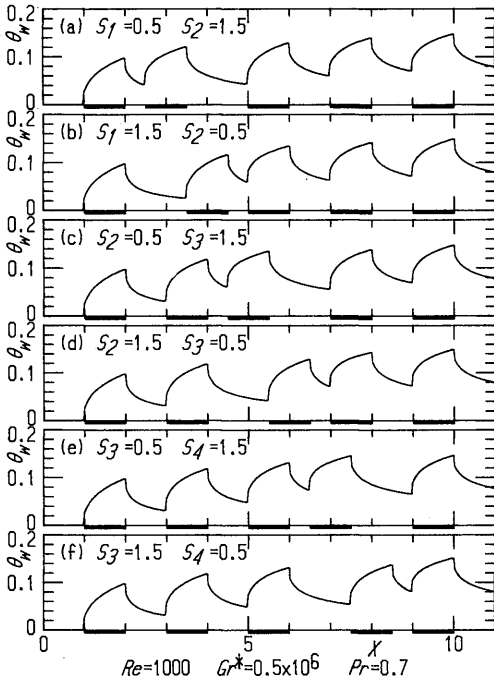


Fig. 3 Wall Temperature distributions
 $S_j = 0.5 \sim 1.5$, $L_i = 1$ ($L_o = 1$)

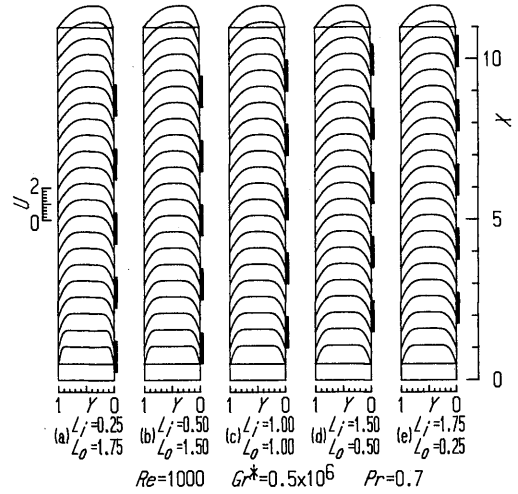


Fig. 4 Velocity distributions
 $L_i = 0.25 \sim 1.75$ ($L_o = 1.75 \sim 0.25$), $S_j = 1$

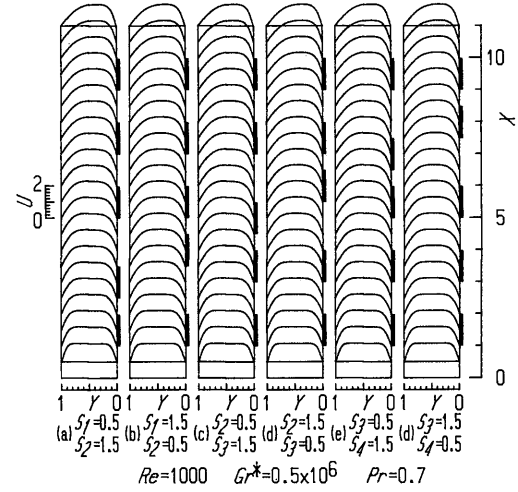


Fig. 5 Velocity distributions
 $S_j = 0.5 \sim 1.5$, $L_i = 1$ ($L_o = 1$)

内での熱伝導を考慮した場合も含め、次式で表せることを示した¹³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{H_{w,j,\max}/\theta_{w,j,\max}}{Gr^{**0.34}/Re^{0.26}} &= a \left[\frac{Gr^{**}}{Re^2} X_{j,\max} \right]^{-k} \\ k &= 0.34 \quad \text{for} \quad 0.1 \leq \frac{Gr^{**}}{Re^2} X_{j,\max} \leq 2 \\ k &= 0.20 \quad \text{for} \quad 2 \leq \frac{Gr^{**}}{Re^2} X_{j,\max} \leq 100 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\frac{H_{wj, \max}/\theta_{wj, \min}}{Gr^{**0.8}/Re} = \left[\frac{Gr^{**}}{Re^2} X_{j, \min} \right]^{-0.65} \quad (8)$$

$$Gr^{**} = Gr^* H_{wj, \max} \quad (9)$$

ここで、 $X_{j, \max}$, $X_{j, \min}$ は $\theta_{wj, \max}$, $\theta_{wj, \min}$ の位置、 $H_{wj, \max}$ は位置 $X_{j, \max}$ での Y 方向熱流束である。式(7)の定数 a は、平板内での熱伝導を無視した場合、各々の k に対し $a = 0.72$ ($k = 0.34$)、 $a = 0.65$ ($k = 0.20$) となる¹¹⁾。

本報で対象とする L_i (L_o) あるいは S_j が異なり平板内での熱伝導を無視した場合、熱源 j の Y 方向熱流束 H_{wj} は一様であり、各熱源の q_{wj} が等しいので、 $H_{wj} = Q_{wj} = H_{wj, \max} = 1$ である。

Fig. 6 に、 $L_i = 0.25 \sim 1.75$ ($L_o = 1.75 \sim 0.25$)、 $S_j = 1$ ($j = 1 \sim 4$) の場合について、熱源の最高温度 $\theta_{wj, \max}$ とその位置 $X_{j, \max}$ の関係を整理した結果を示す。この場合、図中に実線で示したように、 $\theta_{wj, \max}$ は次式で表すことができる。

$$\frac{H_{wj, \max}/\theta_{wj, \max}}{Gr^{**0.34}/Re^{0.26}} = a \left[\frac{Gr^{**}}{Re^2} \{X_{j, \max} - (L_i - 1)\}^{3/4} X_{j, \max}^{1/4} \right]^{-k} \quad (10)$$

同様に、熱源 j と $j+1$ の間での最低温度 $\theta_{wj, \min}$ とその位置 $X_{j, \min}$ の関係を整理した結果を Fig. 7 に示す。図中に実線で示したように $\theta_{wj, \min}$ は次式で表すことができる。

$$\frac{H_{wj, \max}/\theta_{wj, \min}}{Gr^{**0.8}/Re} = \left[\frac{Gr^{**}}{Re^2} \{X_{j, \min} - (L_i - 1)\}^{3/4} X_{j, \min}^{1/4} \right]^{-0.65} \quad (11)$$

次に、熱源の間隔を変えた $S_j = 0.5 \sim 1.5$ 、 $L_i = L_o = 1$ の場合について、 $\theta_{wj, \max}$ と $\theta_{wj, \min}$ を整理した結果を Figs. 8, 9 に示す。この場合の最高、最低温度はそれぞれ式(12)、(13)で近似することができる。図にはこれらの式を実線で示してある。

$$\frac{H_{wj, \max}/\theta_{wj, \max}}{Gr^{**0.34}/Re^{0.26}} = a \left[\frac{Gr^{**}}{Re^2} X_{j, \max} S_{j-1}^{-1/4} \right]^{-k} \quad (12)$$

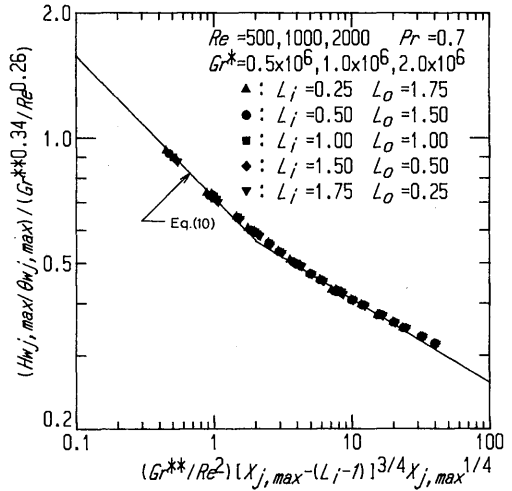


Fig. 6 Correlation of local maximum of temperatures for discrete heat sources
 $L_i = 0.25 \sim 1.75$ ($L_o = 1.75 \sim 0.25$), $S_j = 1$

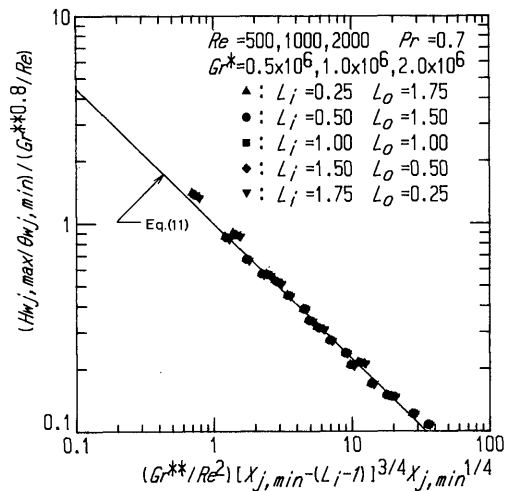


Fig. 7 Correlation of local minimum of temperatures for discrete heat sources
 $L_i = 0.25 \sim 1.75$ ($L_o = 1.75 \sim 0.25$), $S_j = 1$

$$\frac{H_{wj, \max}/\theta_{wj, \min}}{Gr^{**0.8}/Re} = \left[\frac{Gr^{**}}{Re^2} X_{j, \min} S_j^{-1/2} \right]^{-0.65} \quad (13)$$

ここで、 $S_0 = 1$ とする。

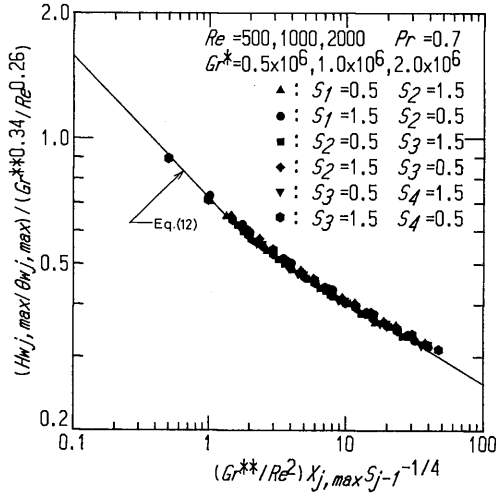


Fig. 8 Correlation of local maximum of temperatures for discrete heat sources
 $S_j = 0.5 \sim 1.5$, $L_i = 1$ ($L_o = 1$)

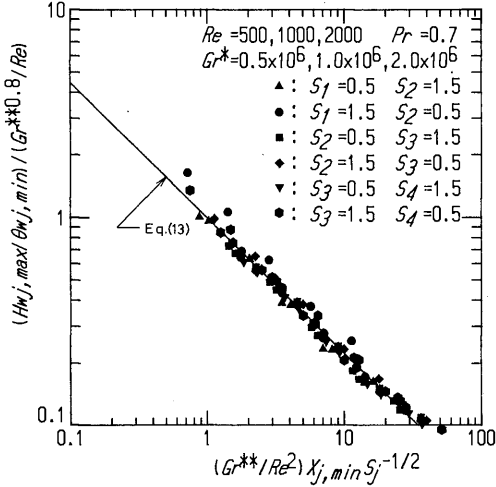


Fig. 9 Correlation of local minimum of temperatures for discrete heat sources
 $S_j = 0.5 \sim 1.5$, $L_i = 1$ ($L_o = 1$)

以上の結果から、平板内での熱伝導が無視できる場合、発熱量および寸法が同じ熱源が任意の L_i (L_o) および S_j で分散配置されたときの、各熱源の最高、最低温度はそれぞれ次の式(14)、(15)を用いて予測できることになる。

$$\frac{H_{wj, \max} / \theta_{wj, \max}}{Gr^{**0.34} / Re^{0.26}} = a \left[\frac{Gr^{**}}{Re^2} \{X_{j, \max} - (L_i - 1)\}^{3/4} X_{j, \max}^{1/4} S_{j-1}^{-1/4} \right]^{-k} \quad (14)$$

$$\frac{H_{wj, \max} / \theta_{wj, \min}}{Gr^{**0.8} / Re} = \left[\frac{Gr^{**}}{Re^2} \{X_{j, \min} - (L_i - 1)\}^{3/4} X_{j, \min}^{1/4} S_j^{-1/2} \right]^{-0.65} \quad (15)$$

Fig. 10 に $Re = 1000$, $Gr^{**} = 1.0 \times 10^6$, $Pr = 0.7$, $L = 11$, $W = 1$ の条件下で、 L_i (L_o) と S_j を任意に変えた場合について、式(14)、(15)から予測した、位置

$$\left. \begin{aligned} X_{j, \max} &= L_i + W \times j + \sum_{n=1}^{j-1} S_n \\ X_{j, \min} &= L_i + W \times j + \sum_{n=1}^j S_n \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

での最高(▲)、最低(▼)温度と数値計算結果を比較した例を示す。図から、本整理式により任意に配置された各熱源の最高温度と最低温度の妥当な予測値が得られることがわかる。

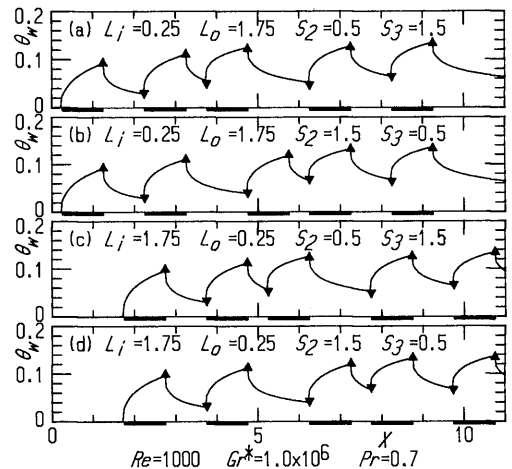


Fig. 10 Comparison of predicted maximum and minimum temperatures with numerical results

4. 結 言

任意に配置された発熱量および寸法が等しいパッケージ群を空冷する場合の最高温度を予測する方法を基礎的に検討するため、パッケージ群を垂直平行平板間に配列された厚みの無い熱源群で置き換えた簡単な二次元モデルを用い、層流共存対流熱伝達に関する数値解析を行った。平板内での熱伝導を無視した場合について、熱源が任意に配列された条件での数値解析を行い、以下の結論を得た。

[1] 総発熱量が等しい場合、速度分布におよぼす熱源の配置の違いによる影響はほとんど見られないが、温度分布に関してはその影響が顕著に現れる。

[2] 各熱源の最高温度 $\theta_{wj, \max}$ および熱源 j と $j+1$ の間での最低温度とその位置 $X_{j, \max}$, $X_{j, \min}$ の関係は、 $L_i = 0.25 \sim 1.75$ ($L_o = 1.75 \sim 0.25$), $S_j = 1$ の場合、式(10), (11)のパラメータで、 $S_j = 0.5 \sim 1.5$, $L_i = L_o = 1$ の場合、式(12), (13)のパラメータで整理できる。

[3] 熱源が任意に分散配置された場合の $\theta_{wj, \max}$ と $\theta_{wj, \min}$ を予測する整理式(14), (15)を提案した。数値計算結果との比較から、この整理式により各熱源の最高、最低温度を精度良く推定できることがわかった。

参 考 文 献

- 1) 日本機械学会編：電子機器の冷却技術，pp. 3-58，技報堂出版，(1987)。
- 2) K. J. Kennedy and A. Zebib: Int. J. Heat Mass Transfer, **26**, 3, 471 (1983)。
- 3) 柳田武彦，中山 恒，根本武夫：日本機械学会論文集（B編），**50**, 453, 1294 (1984)。
- 4) 中山 恒，広岡有子：第23回日本伝熱シンポジウム講演論文集，406 (1986)。
- 5) F. P. Incropera, J. S. Kerby, D. F. Moffatt and S. Ramadhyani: Int. J. Heat Mass Transfer, **29**, 7, 1051 (1986)。
- 6) J. Davalath and Y. Bayazitoglu: Journal of Heat Transfer, **109**, 321 (1987)。
- 7) T. W. Nickell, R. D. Ulrich and W. Webb: ASME Winter Annual Meeting, #87-WA/EEP-1, (1987)。
- 8) 柳田武彦：日本機械学会論文集（B編），**54**, 503, 1730 (1988)。
- 9) 山崎 進，柳田武彦，池川昌弘：日本機械学会第66期全国大会講演会講演概要集，283 (1988)。
- 10) 富村寿夫，藤井丕夫：九州大学生産科学研究所報告，**82**, 15 (1987)。
- 11) 富村寿夫，藤井丕夫：第26回日本伝熱シンポジウム講演論文集，731 (1989)。
- 12) 富村寿夫，藤井丕夫：九州大学総合理工学研究科報告，**11**, 3, 321 (1989)。
- 13) 富村寿夫，藤井丕夫：九州大学機能物質科学研究所報告（印刷中）。
- 14) A. D. Gosman, W. M. Pun, A. K. Runchal, D. B. Spalding and M. Wolfshtein: *Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows*, pp. 89-137, Academic Press, London (1969)。