九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

Coqによる初等幾何学の証明方法について

田中, 久治
佐賀大学大学院工学系研究科

溝口, 佳寛
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

https://hdl.handle.net/2324/1685899

出版情報：数式処理. 22 (2), pp.43-46, 2016-05-01. 日本数式処理学会
バージョン：
権利関係：(C)2016 Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation

数式処理 *Bulletin of JSSAC (2016)*
Vol. 22, No. 2, pp. 43 - 46

大会報告

Coqによる初等幾何学の証明方法について

田中 久治　　溝口 佳寛

佐賀大学大学院 工学系研究科　　九州大学 マスフォアインダストリ研究所

1 はじめに

初等幾何学を指導する知的教育システムの研究は計算機の教育利用の分野ではポピュラーなテーマの一つであるが，実用的なシステムの開発に成功した例は少ない [1, 2]．本報告では比較的新しい計算機による初等幾何学定理証明法である面積法 [6] の Janičić らによる証明支援系言語である Coq による実装 [7] を紹介している．特に，Janičić らの面積法の実装により自動証明できていない命題を考察している．本研究は，より多くの命題を自動証明可能にすること，そして，そのための面積法による初等幾何証明の基本命題を整理することを目標としている. ここでは自動証明できない具体的な命題を考察し，対策のために必要な基本的な補題を構築したので紹介する.

2 面積法 (Area Method)

初等幾何学定理の自動証明法には，主に二つのアプローチがある．幾何学的アプローチと，代数的アプローチである．

幾何学的アプローチ [3] では，ユークリッド幾何学の公理等の幾何学的知識に基づいて，与えられた関係を変形して行くことにより，定理を証明する．証明を理解しやすいという利点を持つが，発見的に得られる補助線を用いる証明は自動化が難しいという問題点がある．

代数的アプローチ [4, 5] では定理が示す幾何学的な関係を代数方程式の集合として表現し，与えられた全ての方程式を満たす解が存在することを示すことによって定理を証明する．証明過程が幾何学的知識に依存せず，同一の手順によって多くの定理の証明が可能であり，幾何学的アプローチに比べて証明可能な問題の数が圧倒的に多いという利点を持つが，得られる証明は，方程式の式変形の集合であるため，証明過程が必ずしも理解しやすいとは限らないという問題点を持つ．

面積法は上の２つのアプローチの中間的性質を持つ．幾何学的性質に基づいて式変形を行い定理の証明を行うという点では幾何学的アプローチと同じであるが，定理の記述は，必ず，線分の長さの比や三角形，四角形の面積，ピタゴラス差分などの幾何学的量に基づく方程式である．式変形は，幾何学的量の関係を保つような，作図過程で現れた頂点の，出現順序の逆順での消去が主となる．

© 2016 Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation

2.1 面積法による証明

面積法では代数的アプローチと同様に作図過程が重要となる．作図は頂点を順に追加しながら行う．結論から，幾何学的量を保ちながら，作図時と逆順に頂点を消去し，定理に示された幾何学的量が得られれば証明が成功したことになる．以下に基本的な命題を例に面積法による証明を紹介する．ここでは三角形 ABC の面積を S_{ABC} で記述している．

命題 **1** (座標消去の基本命題)
C，D を直線 AB 上の点とし，P を直線 AB 上にない点とする時，$\dfrac{S_{PCD}}{S_{PAB}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ が成り立つ．

証明　一般性を保つため，$C \neq A$ と仮定する．この時，

$$\frac{S_{PCD}}{S_{PAB}} = \frac{S_{PCD}}{S_{PCA}}\frac{S_{PCA}}{S_{PAB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CA}}\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$$

∎

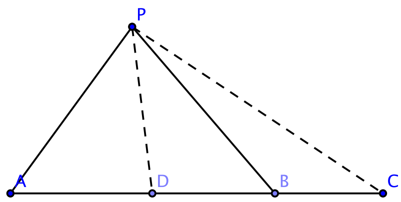

図 1: 座標消去の基本命題

この証明では，頂点 P を消去することによって命題が成り立つことを示している．

3 Coq による面積法の実装

Janičič らは，面積法による初等幾何学定理の証明システムを証明支援系言語である Coq を用いて実装している [8]．Coq を用いることにより与えられた証明は機械検証が可能であり，Tactic を用いた基本命題については自動証明も可能となる．

3.1 面積法パッケージのインストール

Janičič らによる実装は, Coq Ver.8.4 で動作するライブラリが git レポジトリ

`https://gforge.inria.fr/git/coq-contribs/area-method.git`

に保存されている. レポジトリからソースファイルを取得し, `make install` することで実装される. それまでに Area Method がインストールされている場合には，`make` の前に古いライブラリディレクトリは消去しておく (cf. `user-contrib/AreaMethod`).

3.2 Coq による面積法の証明例

定理 **2** (**Ceva** の定理)
三角形 ABC とその内部の点 O に対し, 各頂点 A,B,C から O へ引いた半直線の対辺との交点をそれぞれ L,M,N としたとき,

$$\frac{\overline{OL}}{\overline{AL}} + \frac{\overline{OM}}{\overline{BM}} + \frac{\overline{ON}}{\overline{CN}} = 1$$

が成り立つ

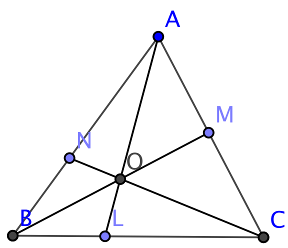

図 2: Ceva の定理

Coq における実装では定理及び証明は以下のように記述される．

```
Theorem Ceva:
  forall A B C L M N O : Point,
  inter_ll L B C A O -> inter_ll N B A C O -> inter_ll M A C B O ->
  A <> L -> B <> M -> C <> N ->
  parallel O L A L -> parallel O M B M -> parallel O N C N ->
  O ** L / A ** L + O ** M / B ** M + O ** N / C ** N = 1.
Proof.
  area_method.
Qed.
```

4 自動証明できない例と補題の追加

Janičić らによる実装は，点の消去に結びつかない手順が必要な定理を自動証明することができない場合がある．例えば，以下の命題は Tactic(area_method) が失敗する．

命題 3 (自動証明できない例)
同一直線上の 4 点 A, B, C, D が $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ をみたすとき，直線 AB 上にない点 O に対し B を通り線分 OA に平行な直線が，直線 OC, OD と交わる点をそれぞれ P, Q とすると，$\overline{PB} = \overline{BQ}$ が成り立つ．

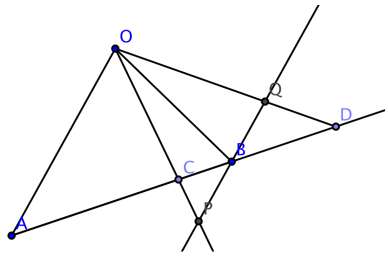

図 3: 自動証明できない命題

Coq においてこの命題は以下のように記述される．

```
Proposition NotProvable:
 forall A B O C D P Q : Point, r : F,
 m_ratio C A B r -> m_ratio D A B (- r) ->
 C <> D -> r <> 0 ->
 on_inter_line_parallel P B O C O A ->
 on_inter_line_parallel Q B O D O A ->
 P <> B -> Q <> B -> P <> Q ->
 P ** B = B ** Q.
```

結論 `P ** B = B ** Q` を Tactic(area_method) で直接証明することは出来ない．そこで，一般的な Area Method による証明手順から，Taictic による証明が成功する段階を確認し，そこまで命題を変形するために必要な基本的な補題として以下の 2 つを構成した．

```
Lemma sub_1:  B ** P * S B O D = B ** Q * S4 B O P D.
Lemma sub_2:  S B O D = -S4 B O P D.
```

さらに，これらの補題を証明する過程で，より一般的な

```
Lemma parachange: forall A B C D: Point,
parallel A B C D -> S A C D = S B C D.
```

という補題が得られた．この補題自身も Tactic によって自動証明することができないが，与えられた条件下で成立する一般的な補題であり，他の命題においても利用可能なものである．

5 今後の課題

今回，Janičič らによる面積法の Coq における実装を紹介するとともに，この実装において自動証明できない命題を考察し， この命題において証明が成功するために必要な補題を導いた. さらに，その補題を証明するために必要な一般的補題も 1 つ構成した．今回の報告で示したように，自動証明できない命題を調べることによって，システムの適用範囲が拡張されるような一般的命題が得られることが期待できる．今後の課題は面積法を用いた幾何証明の形式化とその証明体系の整理である.

参 考 文 献

[1] 新井 浩史郎, 筧 捷彦: 初等幾何学教育のための作図ソフトウェア「HiZy」, 第 70 回情報処理学会全国大会予稿集 (*4*),715–716,2003.

[2] 岡本 敏雄, 松田 昇, 佐々木 宏: 直接操作可能なグラフィック・インタフェースを有する幾何論証知的 CAI システム: 情報処理学会論文誌, *37(9)*, 1679–1687, 1996.

[3] Nevins, A.J.: Plane geometry theorem proving using forward chaining, *Artificial Intelligence*, *6*, 1–23, 1975.

[4] Wu, W.-T.: On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary geometry,*Automated Theorem Proving:after 25 years, Contemporary Mathematics*,*29*, 213–234, 1984.

[5] Kapur, D.: Using Grobner Bases to Reason About Geometry Problems, *J.Symbolic Computaion*, *2(4)*, 399–408, 1986.

[6] Chou, S.C., Gao, X.S., and Zhang, J.Z. : Machine Proof in Geometry. *World Scientific*, Singapore, 1994.

[7] Janičič, P., Narboux, J., and Quaresma, P.: The Area Method : a Recapitulation, *Journal of Automated Reasoning*, Springer Verlag, Germany, *48(4)*, 489–532, 2012.

[8] Coq Homepage <https://coq.inria.fr/>.