

日本海深層流の形成機構に関する数値実験

酒井, 良介
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

吉川, 裕
九州大学応用力学研究所力学シミュレーション研究センター

<https://doi.org/10.15017/16752>

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 26 (4), pp.423-430, 2005-03. Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

日本海深層流の形成機構に関する数値実験

酒井 良介^{*1,†}・吉川 裕^{*2}

(平成17年1月31日 受理)

Numerical Experiments on the Formation Mechanism of Abyssal Current in the Japan Sea

Ryousuke SAKAI and Yutaka YOSHIKAWA

[†]E-mail of corresponding author: sakaryo@riam.kyushu-u.ac.jp

To understand the roles of baroclinic instability and bottom slope in the formation mechanism of abyssal current in the Japan Sea, numerical experiments were performed with two layer model. It was found that in the first stage, baroclinic instability plays a role to generate barotropic eddies, and in the second stage, barotropic eddies cascade up to larger scales due to nature of two-dimensional turbulence. Bottom slope affects in the latter stage. Because barotropic potential vorticity is almost conserved in this stage, vorticity is negative(positive) on shallower(deeper) region as a result of eddy stirring of fluid particle. Consequently, current with shallower region on his right is formed.

Key words : Japan Sea, abyssal current, baroclinic instability, bottom slope, two-dimensional turbulence

1. 緒 言

日本海は東西、南北幅ともに最長部でおよそ1000km、最大水深は3700m以上あり、大規模な海水循環が起こる地形的な条件を備えている。また他の海洋(太平洋、東シナ海、オホーツク海)と日本海を繋ぐ海峡(津軽、対馬、宗谷)はいずれも水深150m以浅であるため、外海との直接的な海水交換は150m以浅の表層に限られる。そのため日本海深層(500m～3500m)においては、日本海内部で形成された様な深層水(日本海固有水¹⁾)が存在する。深層水は日本海全体積のおよそ80%以上を占めるため²⁾、その流動構造を理解することは、日本海全体の循環の理解を進める上で非常に重要である。

近年、日本海深層における直接測流が活発に行われてきた³⁾。それらの結果によれば、Fig. 1に示すような日本海全体に及ぶ浅い領域を右に見る反時計回りの循環が存在することが示唆される。同様の流れは、最近の超高分解能数値実験⁴⁾の結果にも見られている。

一方、深層循環の標準理論と目されているStommel-Arons理論⁵⁾⁶⁾によれば、強い流れは西岸のみに存在する。従って観測により示唆される(東岸での強い流れを含む)深層流は、Stommel-Arons理論とは全く異なる力学で駆動されている可能性が高い。Hogan and Hurlburt(2000)は、対馬暖流による傾圧不安定と海底地形が日本

海の深層循環の形成に大きな役割を担うと述べているが、その具体的な内容については述べられていない。

そこで本研究では、傾圧不安定ならびに海底斜面が日本海の深層流形成機構にどのような役割を果たしているのかわらかにするため、二層模型を用いて数値実験を行った。

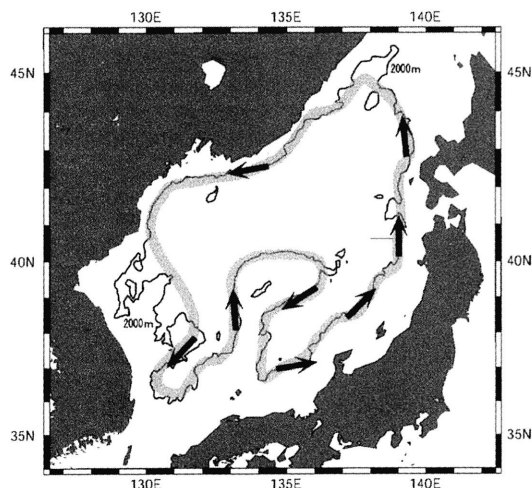


Fig. 1 Schematic view of observed abyssal current in the Japan Sea (after Nagano 2000³⁾).

*1 大気海洋環境システム学専攻

*2 応用力学研究所力学シミュレーション研究センター

2. 模型概要

日本海程度の大きさでは地球表面の曲率の効果は小さいため、 x 軸、 y 軸、 z 軸の正方向をそれぞれ東、北、鉛直上向きとした局所直交座標系を用いた。

支配方程式は、ブシネスク近似およびリジッド・リッド近似のもとでの運動方程式と連続の式である。各層における支配方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \left(f + \frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) v_k = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{p_s}{\rho_{ref}} + \delta_{2k} g' h_1 - \frac{u_k^2 + v_k^2}{2} \right) + A_h \nabla_h^4 u_k \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + \left(f + \frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) u_k = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{p_s}{\rho_{ref}} + \delta_{2k} g' h_1 - \frac{u_k^2 + v_k^2}{2} \right) + A_h \nabla_h^4 v_k \quad (2)$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial t} + \frac{\partial (h_k u_k)}{\partial x} + \frac{\partial (h_k v_k)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$h_1 + h_2 = H \quad (4)$$

ここで、 k は層番号、 u_k 、 v_k はそれぞれ各層における x 、 y 方向の流速、 p_s は海面圧力、 h_k は各層の層厚、 t は時間、 $f (= f_0 + \beta y)$ はコリオリ係数、 g' は換算重力、 ρ_{ref} は参照密度、 A_h は水平粘性係数である。ただし δ_{2k} はデルタ記号で、 $\delta_{21} = 0$ 、 $\delta_{22} = 1$ と定義する。各パラメータの値については Table 1 に示す。

粘性項には小スケールの渦を優先的に減衰させるため重調和型を採用した。また水平粘性係数 A_h は、計算が安定する範囲内で可能な限り小さな値を用いた。鉛直粘性については考慮していない。

支配方程式の差分化には、時空間ともに二次精度の中央差分を用いた。また、時間積分の際には、中央差分(蛙飛び法)を用いることによって生じる解の分離を防ぐために、10 ステップに1回の割合で松野スキームを実行した。各変数の格子点配置には Arakawa C-grid を用い、移流項には渦位保存スキーム (Arakawa スキーム)⁷⁾ を採用した。

Table 1 Model parameters used in this study. JS/SC Exp. represents Japan Sea/Simple Channel Experiment.

Parameter	Value	
f_0	1.0×10^{-4}	s^{-1}
β	0 or 2.0×10^{-11}	$m^{-1} s^{-1}$
g'	1.0×10^{-2}	$m s^{-2}$
ρ_{ref}	1.0×10^3	$kg m^{-3}$
A_h	1.0×10^8 (JS Exp.)	$m^4 s^{-1}$
	1.0×10^7 (SC Exp.)	$m^4 s^{-1}$

3. 日本海想定実験

3.1 条件設定

日本海の深層流の形成機構を調べるため、Fig. 2 に示す日本海を模した東西、南北幅 (L_x, L_y) 1000km、深さ (H) 3000m の二層模型を用いて実験を行った。日本海の深層はこの模型では下層に対応している。模型内部で生じる力学を出来るだけ簡単にし深層流を再現するために、上層に対馬暖流を模した定常的な流入・流出のみを与え、その他の外部強制力(風、海面加熱・冷却など)は与えなかった。海底地形は東西、南北境界から幅 75km は深さ 1000m で一定とし、75km から 125km までは海底に向かって一定角度 (2.0°) の直線で斜面を与え、境界から幅 125km 以遠は深さ 3000m で一定とした。水平格子間隔は $7.8km \times 7.8km$ 、時間間隔は 432s、積分時間は運動エネルギーが定常となるまでの 5 年とした。

初期の層厚分布は以下に示す式で与えた。

$$h_1(x, y) = H_1 - \Delta H \times \tanh \left(\frac{2 \times (y - \frac{L_y}{2})}{W_j} \right) \quad (5)$$

$$h_2(x, y) = H_2 + \Delta H \times \tanh \left(\frac{2 \times (y - \frac{L_y}{2})}{W_j} \right) \quad (6)$$

ここで H_1 (上層平均層厚) は 500m、 H_2 (下層平均層厚) は 2500m、 ΔH (層厚の南北変化量) は 150m、 W_j (ジェット幅) は 100km とした。実際の日本海では H_1 は 200 ~ 300m 程度であるが、ここでは傾圧不安定の効果を強調するため、不安定が強くなるよう 500m とした。また、傾圧不安定を励起するために初期に微小擾乱を境界面に与えている。

下層流速の初期値は、下層の流れの形成機構に着目しているため 0 とし、一方上層流速の初期値は、上式で与えた初期層厚に対して地衡流平衡が成り立つようを与えた。従って上層厚の変化のある所に対馬暖流に対応する東向きのジェットが位置する。

境界条件は、流入・流出域を除く東西、南北境界で壁に直交する流速成分は 0、摩擦なし、層厚固定とする。また数値的安定性のため、東西、南北境界から 50km までは各層厚を初期値に復元するような強制力を与え、この復元力によって対馬暖流を模した定常的な流入・流出が維持されている。

3.2 結果

f 面 ($\beta=0$) での実験における下層および上層流速場を Fig. 3 に示す。下層流速場を見ると、300 日目 (Fig. 3a) においては、傾圧不安定の成長に伴って数 100km 程度の大きさの高・低気圧性渦が形成された。これらの渦は上層にも見られ(図省略)、順圧的な構造を有していることから、傾圧不安定による順圧流形成機構によって生じていることが分かる。その後、これらの順圧渦は二次元乱

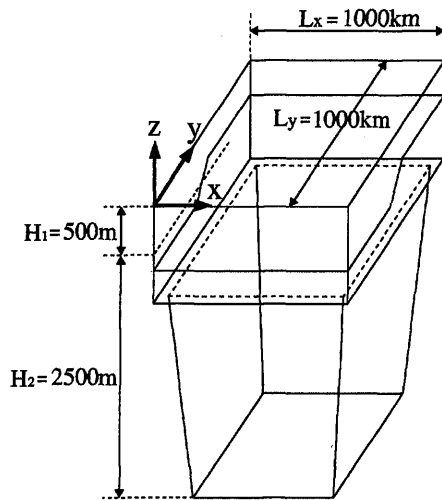


Fig. 2 Schematic view of model configuration in Japan Sea Experiment.

流の特性によって大規模な渦へとカスケードアップしてゆく。そして実験開始後 1825 日目 (Fig. 3b) には、日本海の深層と定性的に一致するような、領域全体を覆う浅い領域を右に見る反時計回りの循環が形成された。

一方、 β 面 ($\beta = 2 \times 10^{-11} m^{-1} s^{-1}$) での実験 (Fig. 4) においても傾圧不安定による順圧流形成機構により順圧流が形成されるが、 β によって傾圧不安定が弱まるため順圧渦の強さも弱くなる (Fig. 4a)。またカスケードアップすることで大規模な流れが形成されるが、 β 面の場合には反時計回りの循環は領域南部に見られる結果となった (Fig. 4b,c)。これは、渦位の背景場 ($f_0 + \beta y/H$) が水深変化の無い領域中央部でも変化することに起因すると考えられる。 β が 0 であれば領域全体に渡り正の相対渦度が分布するが (Fig. 3b,c)、 β が正であるため北側に輸送された流体は惑星渦度の変化を補償するため負の相対渦度を、南側に輸送された流体は正の相対渦度を獲得する。従って、南側では正の相対渦度が強まり、北側では弱まるため、領域南部に反時計回りの循環が局在する結果となる (Fig. 4b,c)。

f 面、 β 面いずれの実験においても、定常状態では順圧成分が卓越する結果となった。このため、上層の流速場は下層の流速場とはほぼ同様であった (Fig. 3b,c Fig. 4b,c)。このような上層の流れは現実の日本海の循環とは大きく異なるが、これは本実験では傾圧不安定を現実より強くしているため、傾圧不安定の解消によって生じる順圧流が現実より強すぎるのが一因と思われる。

4. 単純水路実験

4.1 条件設定

日本海想定実験では、少なくとも下層 (深層) については日本海と定性的に一致する結果が得られた。しかし日

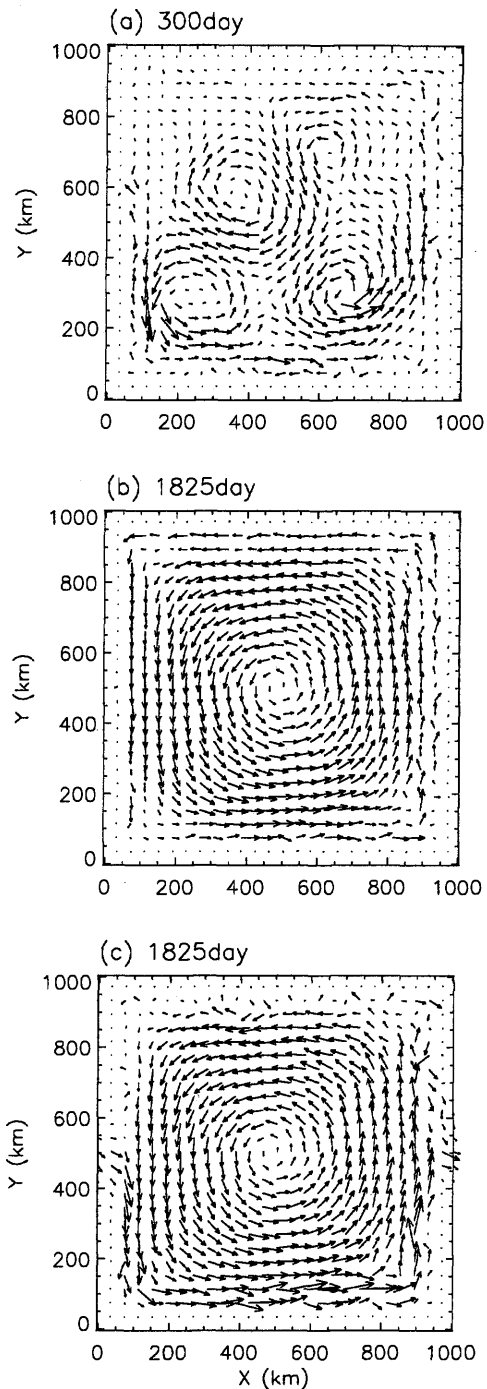


Fig. 3 Horizontal velocity in Japan Sea Experiment with f -plane approximation. Lower layer velocity on (a)300day and (b)1825day, and (c) upper layer velocity on 1825day.

本海想定実験には、傾圧不安定と海底斜面に加え、境界面に復元力を加えていることや、流入・流出系であるため運動量や運動エネルギーが保存しないこと等により、模型内部で生じる力学は複雑となっている。そこで傾圧不安定と海底斜面の役割を明瞭にするため、Fig. 5 に示すような更に単純にした模型で実験を行った。

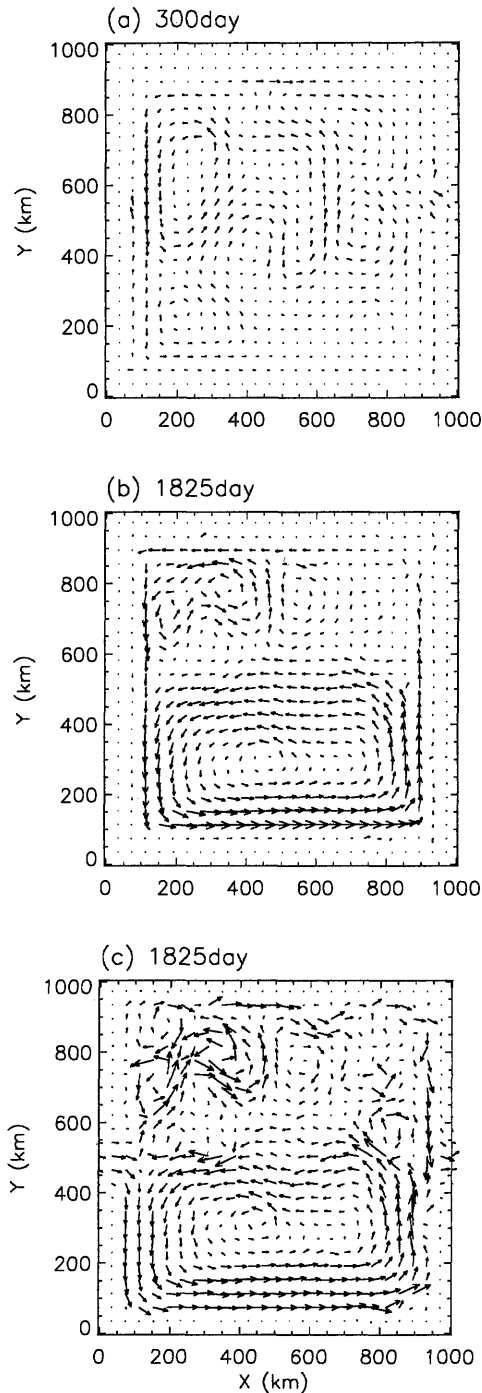


Fig. 4 Same as Fig. 3 but for the experiment with β -plane approximation.

この実験では東西を周期境界とし、また復元力も与えなかった。海底地形は南北境界から幅 40km の領域において、水深 3000m から海底に向かって一定角度 (1.5°) の直線によって斜面を与えた場合と、斜面を与えない平坦な地形の場合の二種類の実験を行う。

計算領域は東西に 628km、南北に 314km、鉛直に

4000m とした。水平格子間隔は $4.9\text{km} \times 4.9\text{km}$ 、時間間隔は 108s、積分時間は運動エネルギーが定常になるまでの 3 年とした。

初期の層厚分布には、日本海想定実験と同様に (5)(6) 式を用いた。ただし H_1, H_2 はそれぞれ 2000m、 ΔH は 200m、 W_j は 100km とした。

初期流速は、層厚に対して地衡流平衡が成り立つように与えるが、順圧流速の形成過程を調べるため順圧成分が 0 となるようにした。従って、上層と下層の流れは大きさが等しく向きが逆になっている。

境界条件は、東西に周期条件、南北は壁からの流速なし ($v=0$)、摩擦なし、層厚のフラックスなしとした。

なお f 面、 β 面の両実験を行ったが、本実験の設定の下では両者に違いは生じなかった。従ってここでは f 面の結果を示す。

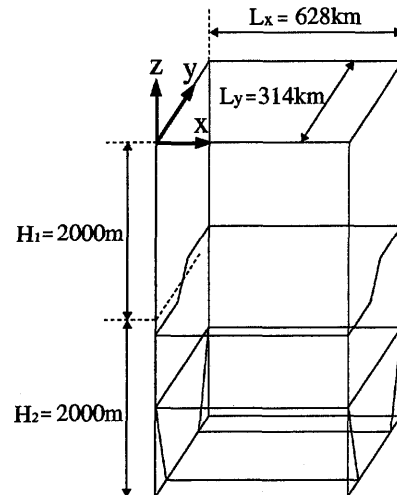


Fig. 5 Same as Fig. 2 but for Simple Channel Experiment.

4.2 結果

海底地形に斜面がある場合の順圧流速の時間発展を Fig. 6 に示す。100 日目 (Fig. 6a) には、傾圧不安定波が有限振幅にまで成長し、水平幅 150km 程度の高・低気圧性の順圧渦が 2 個ずつ形成された。その後これらの順圧渦が二次元乱流の特性によりカスケードアップしてゆき、160 日目 (Fig. 6b) には浅い領域を右に見る流れが卓越した。そしてこれらの順圧流は更にカスケードアップしてゆき、3 年後 (Fig. 6c) には浅い領域を右に見る流れと直径 300km 程度の反時計回りの順圧渦が形成された。

一方海底地形が平坦な場合 (Fig. 7)、160 日目まで (Fig. 7a, b) は斜面がある場合と同様の時間発展をするが、3 年後 (Fig. 7c) には斜面がある場合と異なり対称な高・低気圧性の順圧渦が 1 個ずつ存在する結果となった。

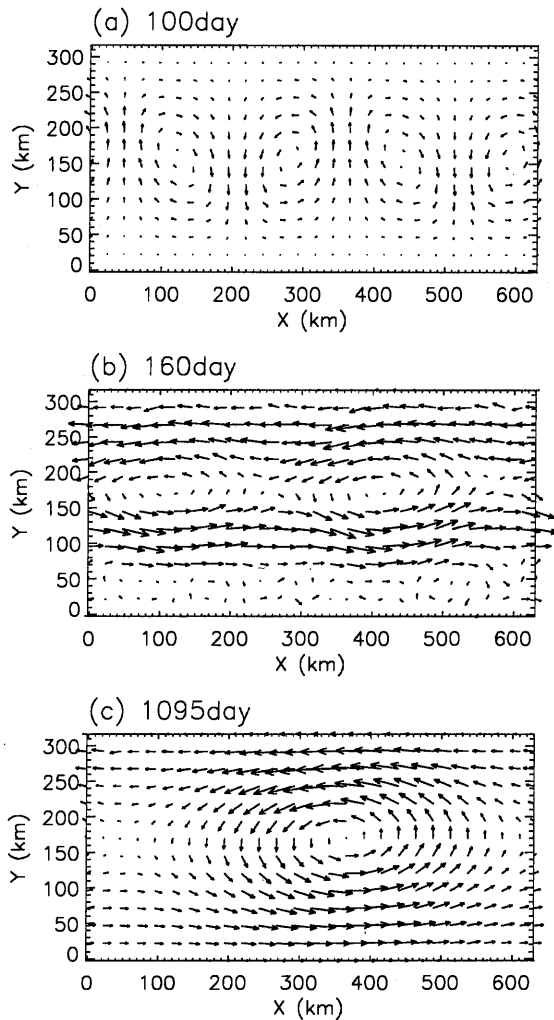


Fig. 6 Barotropic component of horizontal velocity in Simple Channel Experiment with bottom slope. (a)100day, (b)160day, (c)1095day.

4.3 傾圧不安定と海底斜面の役割

上述の結果より、傾圧不安定は順圧渦を形成すること、順圧渦は二次元乱流の特性によってカスケードアップすること、斜面がある場合には最終的に浅い領域を右に見る流れが形成されることが分かった。そこで、ここでは斜面が傾圧不安定による順圧流形成過程に影響を及ぼしているのか、二次元乱流特性によるカスケードアップ過程に影響を及ぼしているのか定量的に明らかにする。

浅い領域を右に見る流れの有無は、順圧相対渦度の東西平均値に明瞭に現れている。ここでは後に順圧渦位で議論をするため、順圧相対渦度を水深で割った相対渦位の東西平均値の時間変化を示す (Fig. 8)。およそ 100 日までは相対渦位の東西平均値がほぼ 0 であり (Fig. 8a,b)、対称な順圧渦が形成されている。斜面がある場合 (Fig. 8a) には、浅い領域を右に見る流れがおよそ 100 日以降存在

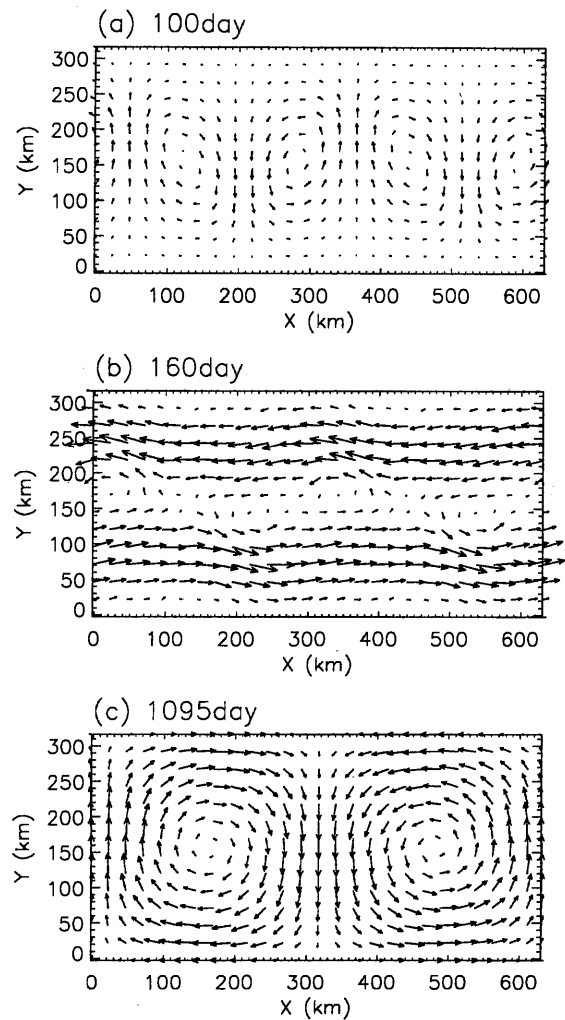


Fig. 7 Same as Fig. 6 but for the experiment without bottom slope.

するため、相対渦位の東西平均値も南北境界付近で負、領域中央で正の分布となっている。一方斜面がない場合 (Fig. 8b) には、およそ 240 日までは斜面がある場合と同様であるが、それ以降は対称な順圧渦が形成されるため、相対渦位の東西平均値はほぼ 0 となっている。

斜面の有無がどのような力学機構で相対渦位の分布を変化させているのか調べるため、順圧渦位の時間発展方程式を調べる。順圧渦位方程式は、順圧流速 (u_t, v_t) と傾圧流速 (u_c, v_c) を

$$u_t = \frac{1}{H}(h_1 u_1 + h_2 u_2), u_c = u_1 - u_2 \quad (7)$$

$$v_t = \frac{1}{H}(h_1 v_1 + h_2 v_2), v_c = v_1 - v_2 \quad (8)$$

と定義し、(1) ~ (4) 式を変形することによって以下のよう導出される。

$$\frac{\partial f + \zeta_t}{\partial t} \frac{1}{H} + u_t \frac{\partial f + \zeta_t}{\partial x} \frac{1}{H} + v_t \frac{\partial f + \zeta_t}{\partial y} \frac{1}{H} =$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{H} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{h_1 h_2}{H} u_c v_c \right) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{H} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{h_1 h_2}{H} v_c v_c \right) \right. \\
 & \left. - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{H} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{h_1 h_2}{H} u_c u_c \right) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{H} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{h_1 h_2}{H} u_c v_c \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{H} J \left[\frac{1}{H}, \frac{g'_2}{2} h_1^2 \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

ここで ζ_t (順圧渦度) = $\partial v_t / \partial x - \partial u_t / \partial y$ である。

左辺第1項は順圧渦位(相対渦位)の時間変化(BPV)を、第2、3項は順圧流による順圧渦位の移流(ADV)を、右辺第1項は傾圧流の非線形性による傾圧流から順圧流へのモード変換(CNV)を、第2項は傾圧運動と地形変化に伴う順圧流形成機構(JBR)を表している。なおCNV、JBRは様々な現象による傾圧流から順圧流へのモード変換を表しているが、今回使用したモデルにおいては特に傾圧不安定によるモード変換(傾圧から順圧)が主である。

斜面がある実験におけるBPV、ADV、CNV、JBRの東西平均値をFig. 9に示す。これらの図から、およそ75日まではCNV(Fig. 9c)が、75日以降についてはADV(Fig. 9b)がBPV(Fig. 9a)を支配していることが分かる。従って浅い領域を右に見る流れの形成期間(100日から240日)に卓越したのはADVであり、浅い領域を右に見る流れは順圧流による順圧渦位の移流の効果によって形成されていることが分かった。また傾圧不安定はCNVの効果により、初期(75日程度まで)に対称な順圧渦を形成させる役割を担うことが分かった。なおJBR(Fig. 9d)はADV、CNVに比べ7桁程度小さく本実験に殆ど影響を及ぼしていなかった。

一方、斜面がない場合についても順圧渦位の時間発展方程式を調べた(Fig. 10)。その結果、斜面がある場合と同様75日まではCNVが、75日以降はADVがBPVを支配していた。斜面がない実験においても、南北境界を右に見る流れが一時期(100~240日)卓越した(Fig. 7b)が、このような流れは一層模型による検証実験では生じなかったことから、傾圧不安定に伴う流動構造がこのような流れの形成に寄与していると考えられる。しかし、その後斜面がない場合にはそのような流れは維持されない。これは南北壁の他には渦度の南北分布に制限を与えるものはないため、波数最小となる流動構造とし対称な高・低気圧性渦一対が形成されるからである。

4.4 浅い領域を右に見る流れの形成機構

順圧流による順圧渦位の移流の効果(ADV)による、浅い領域を右に見る流れの形成機構は以下のように考えられる(Fig. 11)。まず初期に傾圧不安定によって対称な順圧渦が形成され、その渦が領域全体をかき混ぜる。それによって浅い斜面領域の流体が深い内部領域へ、そして深い内部領域の流体が浅い斜面領域へ移流される。その際、ADVに比べCNVやJBRは小さいため、順圧渦位 $(f + \zeta_t)/H$ はラグランジュ的にほぼ保存される。従って、

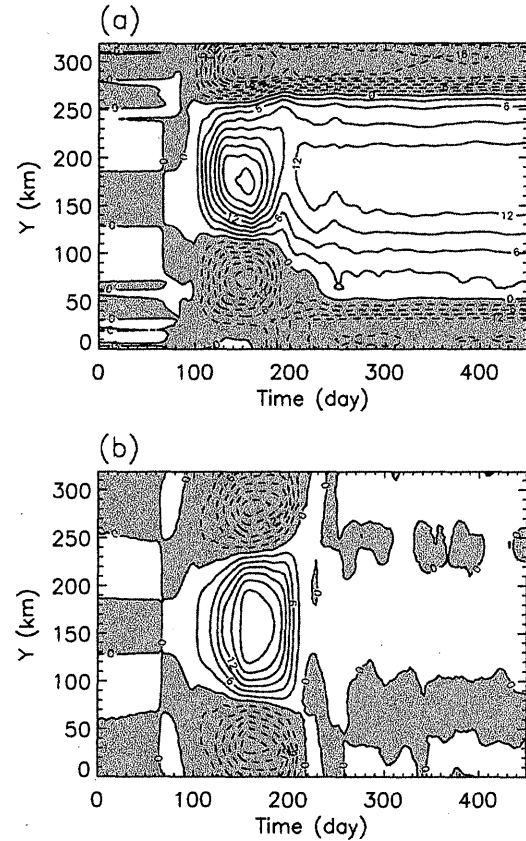


Fig. 8 Zonal average of relative potential vorticity as a function of time (zonal axis) and meridional distance (vertical axis). (a)with bottom slope, (b)without bottom slope. Contour interval is $3 \times 10^{-8} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Shaded areas represent negative value.

浅い領域に移動した流体は負の渦度を、深い領域に移動した流体は正の渦度を持つ。その結果、斜面上には負の順圧渦度が、内部領域には正の順圧渦度が形成される。かき混ぜが十分に行われ定常状態に達すれば、上述の順圧渦度分布が定常的に維持される結果となる。このような順圧渦度分布は浅い領域を右に見る流れに対応する。

上記の形成機構によれば、順圧渦を形成するのは傾圧不安定である必要はない。実際、初期値として傾圧不安定が形成するのと同様な順圧渦を配置した実験を一層模型で行ったところ、斜面がある場合のみ浅い領域を右に見る流れが形成された。また、海底地形は斜面である必要はなく、水深に変化があれば良いことになる。実際、斜面ではなく3000mから4000mに急激に変化する海底地形で実験を行ったところ、同様の結果が得られた。

5. 結言

本研究では傾圧不安定ならびに海底斜面が、日本海における深層循環の形成機構に対してどのような影響を及

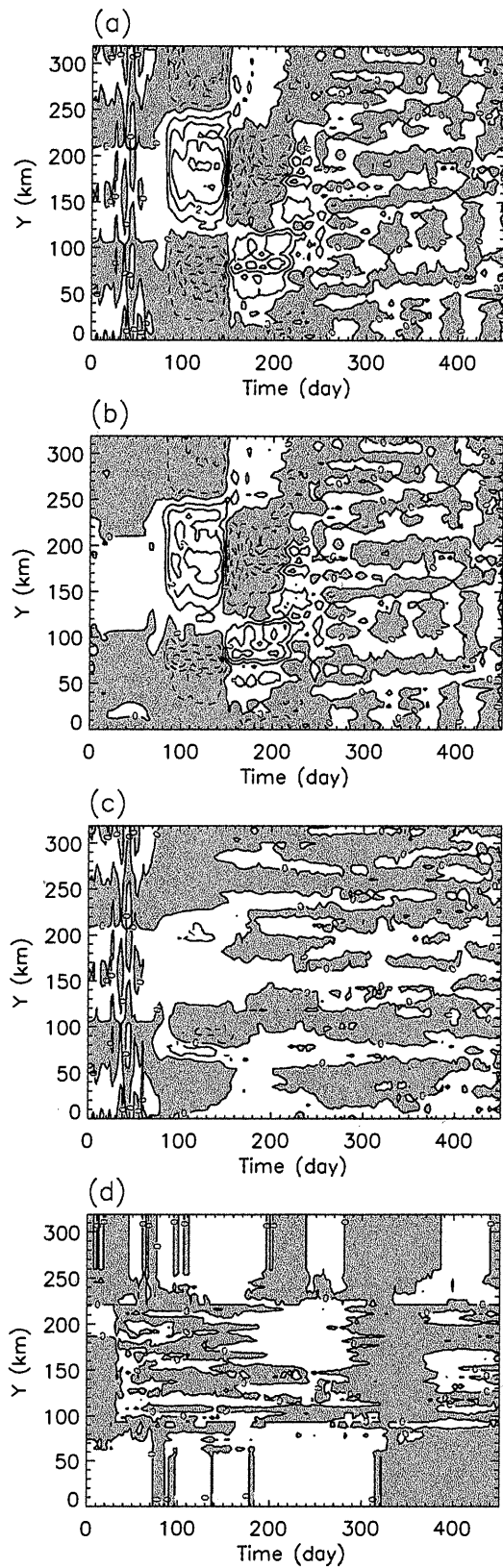


Fig. 9 Zonally averaged (a)time variation of barotropic potential vorticity(BPV), (b)advection term of barotropic potential vorticity (ADV), (c)nonlinear conversion term (CNV) and (d)JEBAR term(JBR) in Simple Channel Experiment with bottom slope. Contour interval is $1 \times 10^{-14} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Shaded areas represent negative value.

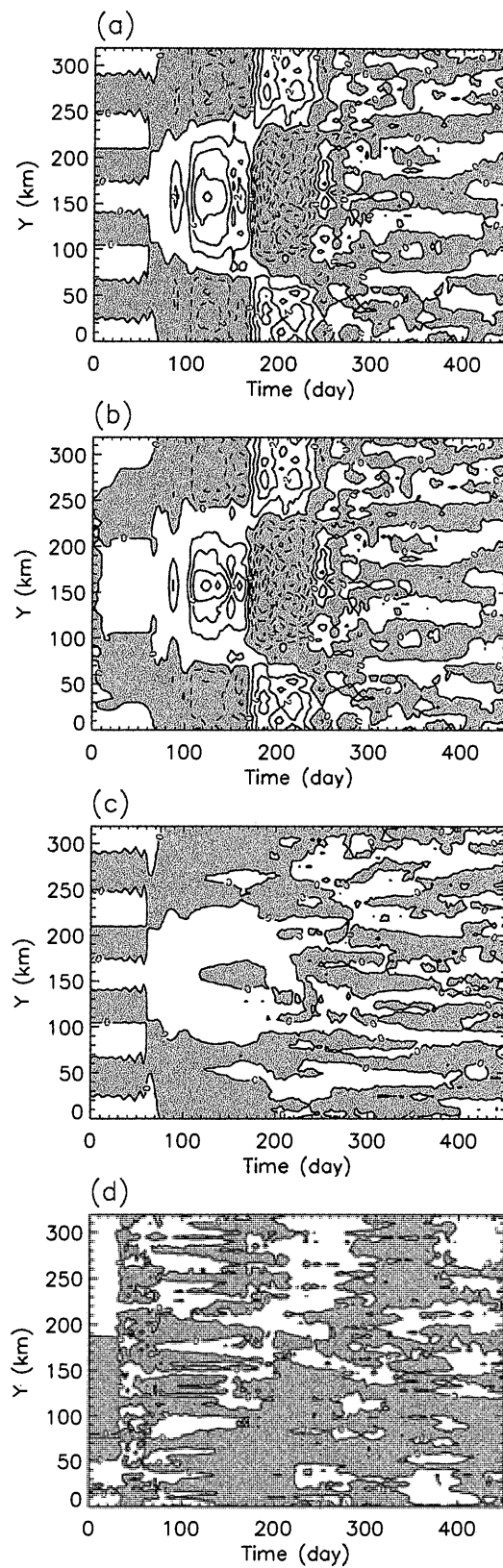


Fig. 10 Same as Fig. 9 but for the experiment without bottom slope.

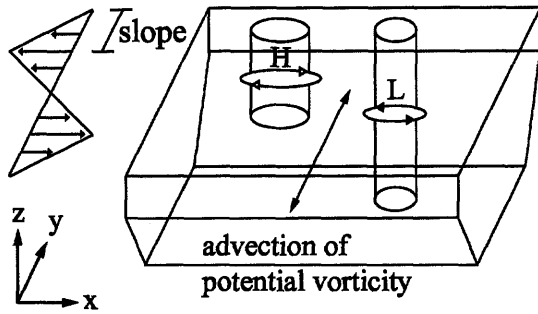


Fig. 11 Schematic figure for generation of current with shallower region on his right.

ばすのかを明らかにするため、二層模型を用いて実験を行った。

まず日本海を想定し、定常的に流入・流出する対馬暖流と、東西・南北境界付近に斜面を設けた海底地形のもとで実験を行った。その結果、日本海と定性的に一致する、浅い領域を右に見る流れが形成された。これにより傾圧不安定と海底斜面が深層流形成に重要な役割を果たし得ることが確認された。

次に、傾圧不安定と海底斜面のそれぞれが日本海の深層循環の形成に対し、どのような役割を果たしているのかを明らかにするため、より単純な水路模型を用いて実験を行った。順圧渦位の時間発展方程式を調べた結果、傾圧不安定は初期に順圧渦を形成する役割のみを果たしていること、順圧渦は二次元乱流の特性によって大規模な流れへとカスケードアップすることが分かり、また海底斜面の有無はカスケードアップ過程に影響を与えることが分かった。カスケードアップ過程では順圧渦位がほぼ保存されるため、斜面がある場合には、浅い斜面領域に移動した流体は負の相対渦度を、深い内部領域に移動した流体は正の相対渦度を持つ。従って、十分流体が水平にかき混ぜられた定常状態においては、そのような相対渦度分布を満たすように、浅い領域を右に見る流れが形成される。

以上のように、傾圧不安定と海底斜面の効果に着目した数値実験を行い、Stommel-Arons理論とは異なる力学で日本海の深層流が駆動され得ることを示すことができた。しかし、例えば表層の流れは日本海のそれと一致しないことや、 β 面の場合の深層の流れは前線の南側に局在すること等、現実とは一致しない点も見られる。これらの不一致は今回考慮しなかった要因(例えば風成循環や現実的な海底地形)が原因と考えられる。今後は観測結果との比較を通じて、これらの点についても更に議論を進めていく必要がある。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、増田章教授には多くの有益な助言をして頂きました。記して感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 宇田 道隆 (1934): 日本海及び其の隣接海区の海況. 水産試験場報告, 5, 57-190.
- 2) Yasui, M., T. Yasuoka, K. Tanioka and O. Shiota (1967): Oceanographic studies of the Japan Sea -Water characteristics-. *Oceanogr. Mag.*, 19, 177-192.
- 3) 永野 善太郎 (2000): 日本海深層の流動構造に関する研究. 九州大学総合理工学府博士論文.
- 4) Hogan, P.J. and H.E. Hurlburt (2000): Impact of upper ocean-topographical coupling and isopycnal outcropping in Japan/East Sea models with $1/8^\circ$ to $1/64^\circ$ resolution. *J. Phys. Oceanogr.*, 30, 2535-2561.
- 5) Stommel, H. and A.B. Arons (1960a): On the abyssal circulation of the world ocean. I. Stationary planetary flow patterns on a sphere. *Deep-Sea Res.*, 6, 140-154.
- 6) Stommel, H. and A.B. Arons (1960b): On the abyssal circulation of the world ocean. II. An idealized model of the circulation pattern and amplitude in oceanic basin. *Deep-Sea Res.*, 6, 217-233.
- 7) Arakawa, A. and V.R. Lamb (1981): A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equation. *Mont. Wea. Rev.*, 109, 18-36.