

## DNLS方程式を用いた平行伝播アルフヴェン波動乱流 の非線形発展

成行, 泰裕  
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

羽田, 亨  
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻流体環境理工学部門

<https://doi.org/10.15017/16750>

---

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 26 (4), pp.407-414, 2005-03. Interdisciplinary  
Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

# DNLS方程式を用いた 平行伝播アルフヴェン波動乱流の非線形発展

成行 泰裕<sup>\*1,†</sup> ・ 羽田 亨<sup>\*2</sup>

(平成17年1月24日 受理)

## Nonlinear evolution of parallel propagating Alfvén wave turbulence via the DNLS equation

Yasuhiro NARIYUKI and Tohru HADA

<sup>†</sup>E-mail of corresponding author: [nariyuki@esst.kyushu-u.ac.jp](mailto:nariyuki@esst.kyushu-u.ac.jp)

Nonlinear evolution of Alfvén wave turbulence is discussed within the context of the derivative nonlinear Schrödinger equation (DNLS), a subset of the hall-MHD equation set, which includes quasi-parallel propagating right- and left-hand polarized Alfvén wave modes. Via numerical time integration of the equation under periodic boundary conditions, we discuss self-organization of solitary waves, evolution of tri-coherence, synchronization of the wave phases, among others.

**Key words:** *Alfvén waves, wave turbulence, derivative nonlinear Schrödinger equation, modulational instability, nonlinear interaction, phase synchronization*

### 1. はじめに

宇宙空間は真空であると考えられがちであるが、実際はプラズマという媒質により満たされている。この宇宙空間のプラズマ(宇宙プラズマ)中では、大振幅の磁気流体(MHD)波動が頻繁に観測される。それらの波動は粒子との相互作用、あるいは波動同士の相互作用によって非線形発展する。

宇宙プラズマ中の波動の非線形発展は、非線形波動の研究の分野において、非常に興味深い対象としてこれまで扱われてきた。我々は今回、*Alfvén* 波(長波長で大振幅に発展しやすいMHD波動)により引き起こされる様々な非線形過程の中の、*Alfvén* 波動乱流の自己組織化についての理解を深めるため、背景磁場に一方向平行伝播する*Alfvén* 波の非線形発展について議論をした。このような*Alfvén* 波動はホールMHD方程式のサブセットであるDNLS(微分型非線形シュレディンガー方程式)で記述されることが知られている。<sup>1)2)3)4)</sup> 今研究では特に、MHD波動中での位相相関の生成機構について議論を行った<sup>5)6)</sup>。

まず、2章では、この報告書の研究背景としてのDNLS(微分型非線形シュレディンガー方程式)と変調不安定性についての説明を行う。3章では、数値実験の結果とそれらの理論的解釈を紹介する。初期段階では

非常に安定な線形波動に近い場合でも、変調不安定性により生成された孤立波列が互いに相互作用しながら乱れた状態を形成する、波動乱流として振舞うことが数値的に示された。また、実空間の孤立派の成長減衰に対応して、波数空間でのパワースペクトルの時間変化と、位相相関の自発的生成が見られた。4章では、結論を要約する。5章では、今後の研究の展望について述べる。

### 2. DNLS(微分型非線形シュレディンガー方程式)における変調不安定性

*Alfvén* 波は、天体・宇宙プラズマの物理学の研究分野において非常に重要であり、かつ基礎的なプラズマ物理や非線形波動の分野にとっても、非常に興味深い研究対象である。

DNLSは1971年にRogisterにより、*Alfvén* 波の長時間発展を記述する運動論的な方程式を用いて、初めて導出された。<sup>1)</sup> その後に、Mjolhus、Mioにおいて2流体方程式を用いての導出が行われた。<sup>2)3)</sup> *Alfvén* 波のパラメトリック相互作用については、これまで崩壊不安定性の研究<sup>7)</sup>と変調不安定性の研究の二つの主題で活発な議論が展開されてきたが、その内の変調不安定性についての議論はDNLSから良い描像が得られることが知られている。<sup>2)8)</sup> これらの研究から、背景磁場に完全に並行に伝播する円偏波の*Alfvén* 波に対して、 $\beta$ 比(プラ

\*1 総合理工学府 大気海洋環境システム学専攻修士課程

\*2 総合理工学研究院 流体環境理工学部門

ズマの圧力を磁気圧で割った値) が 1 より大きいときは右偏波が、1 より小さい時は左偏波が変調に対し不安定であることが分かっている。この報告書では、宇宙プラズマ中に存在する *Alfvén* 波動乱流を理解する試みとして、 $\beta$  比が 1 より小さい DNLS に、微小変調と左偏波を初期条件とした与えた系の振る舞いについての議論を報告する。

$x$  を伝播方向とすると、DNLS は次のように書ける。

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} (|b|^2 b) + i\mu \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

$b = b_y + ib_z$ ,  $\alpha = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\beta}$ ,  $\beta = \frac{C_s^2}{C_A^2}$ ,  $\mu = \pm \frac{1}{2}$  である。ここに、 $b$  は  $x$  方向の背景磁場 ( $B_x$ ) で規格化された複素磁場振幅、 $t$  はイオンサイクロトロン周波数  $\Omega_i$  で規格化した時間、 $x$  はイオン慣性長  $C_A/\Omega_i$  で規格化した空間座標、 $C_A$  は  $B_x$  を用いて定義したアルフヴェン速度、 $C_s$  は音速である。変数のスケールリング ( $t \rightarrow \mu t/\alpha^2$ ,  $x \rightarrow \mu x/\alpha$ ) により (10) は

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (|b|^2 b) + i \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

となる。この式の第 2 項は非線形効果、第 3 項はホール効果による分散効果を表す。この方程式はいくつかの境界条件について可積分であることが報告されている<sup>9)</sup>。

さて、このような DNLS 方程式について、 $b_c = b_0 \exp(i(k_0 x - \omega_0 t))$  という平面波解を考える。この章では結果を見やすくするため、左偏波を  $k > 0$  とした。次章以降は左偏波は  $k < 0$  である。式 (3) にこの解を代入すると線形分散関係  $\omega = -k_0^2 + b_0^2 k_0$  が得られる。次に、この平面波解に微小変調 ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) を加えた解を考える。

$$b = b_0 \exp(i(k_0 x - \omega_0 t) + i\alpha + \beta) \quad (3)$$

$\alpha$ ,  $\beta$  はそれぞれ位相、振幅の微小変調を表す。これらの変調は正弦振動で、

$$\alpha, \beta \propto \exp(i(Kx - \Omega t)) \quad (4)$$

であるとする。それぞれ振幅は一定で、 $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  とおく。この解を、式 (6) に代入して、微小変調の仮定をすると、 $K$  と  $\Omega$  の 2 次式の分散関係が導かれる。これを  $\Omega$  について解いてやると以下ようになる。

$$\Omega = 2K(b_0^2 - k_0) \sqrt{K^2 - 2b_0^2 k_0 + b_0^4} \quad (5)$$

これより、変調による不安定性に寄与する波数範囲が次のように求まる。

$$0 < K < b_0 \sqrt{2k_0 - b_0^2} \quad (6)$$

この不安定な波数範囲を満たす場合、以下のように式 (8) の虚部がこの不安定性の成長率となる。

$$Im\Omega = K \sqrt{-K^2 + 2b_0^2 k_0 - b_0^4} \quad (7)$$

上式の根の中の  $K$  の 2 次関数は極大値を取るため、最大成長率を与える波数  $K_{MAX}$  は次のように求まる。

$$K_{MAX} = b_0 \sqrt{k_0 - \frac{b_0^2}{2}} \quad (8)$$

次に、共鳴条件から変調不安定性により成長する波動モードを調べる。DNLS は 3 次の非線形項を持つので、フーリエ変換によりモード間の非線形相互作用は 4 波共鳴によって行われ、非線形項の形から共鳴条件は  $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$  であると考えられる。変調不安定性で各モードが線形成長する時間発展初期においては、親波モードと他のモードとの相互作用が最も大きい、右辺が  $2k_0$  となる共鳴条件が支配的である。これは、3 章のシミュレーションの結果からも確認することが出来る。この時、 $k_0$  と  $k_{1,2}$  の差が振幅の変調モード  $K$  に対応している。先に述べた初期条件を式 (3) に与えて時間発展させると、エンベロープ (振幅)  $|b|$  に最大成長率を与える変調モード  $K_{MAX}$  に対応する個数の孤立波が立つ (3 章)。この変調モード  $K$  はポンデラモーティブ力によりプラズマ密度の波動モードとして励起されるので、DNLS では顕わにならない。

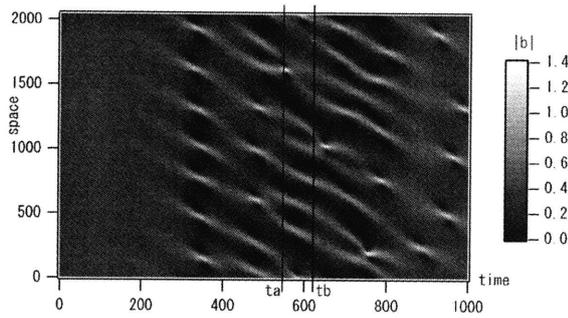
### 3. 数値実験と理論的考察

式 (3) の DNLS 方程式を、以下の初期条件を与えて周期境界条件の下で数値的に解いた。グリッド数は 2048 で時空間の刻み幅  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  はそれぞれ 0.001, 0.125 である。Fig1, 2 が、その時のエンベロープの時間発展である。始め小さな揺らぎしか存在しなかったエンベロープに、時間発展により孤立波が立ち、その後場に複雑に振舞う様子が見られる。この孤立波が変調不安定性により生成されたことは、波数空間でのパワー (波の作用、量子数) の時間発展 (Fig3) の初期の様子 (Fig4(b)) からも確認することが出来る。さらに、Fig1 から孤立波が急峻化する時間帯 (例えば  $ta$ ) と、比較的小振幅になる時間帯 ( $tb$ ) が存在していることが分かるが、それぞれの時間帯に対応した波数空間でのパワースペクトルは Fig4(c)(d) のようになる。(c) と (d) を比べると、(c)  $t = ta$  では最も急峻な孤立波に対応してエネルギーが大波数側まで分配され、(d)  $t = tb$  では反対に孤立波が減衰する時には初期状態に近い分布となっている。これらのパワースペクトルは (c)(d) のように指数関数的に分布している。

さて、波数空間上のフーリエ成分はパワーともう一つ、位相という情報を含んでいる。以下では、フーリエ成分間の位相相関の自己生成を示し、Fig1-4 のような実空間・波数空間における系の時間発展の機構を議論する。

#### 3.1 位相相関の自発的生成

実空間におけるデータから、位相相関を次のようなフーリエ変換を用いたサロゲートデータ法という解析で定量



**Fig. 1** Time evolution of envelope  $|b|$  with the periodic boundary condition and the initial condition as a superposition of finite amplitude monochromatic waves (the parent:  $b_0 = 0.4$  and  $k_0 = -11 \times \frac{2\pi}{256}$  (256:system size)) and white noise that has very small amplitude (0.00001). Until  $t = 200$ , the parent wave energy is gradually transferred to daughter waves through modulational instability, which can be seen as a gradual spreading of the power spectrum in the  $k$ -space(Fig3). Around  $t \sim 300$ , a series of solitary waves are born, corresponding to broadening of the spectrum in Fig.2. These solitary waves repeatedly appear( $t = ta$ ) and vanish( $t = tb$ ).

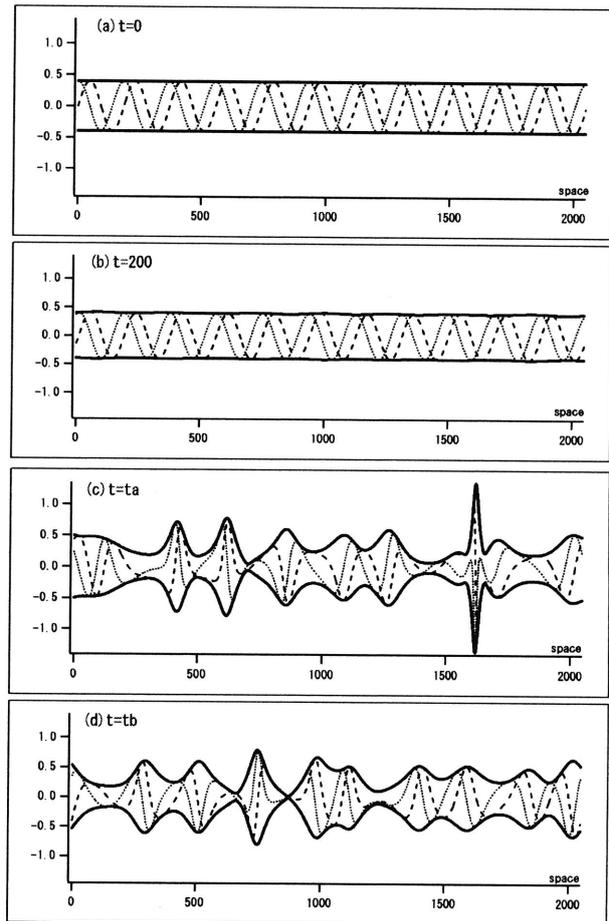
化することが出来る。<sup>5)</sup> サロゲートデータ法とは、まず議論したい実空間のデータをフーリエ変換し、位相分布とパワースペクトルの情報に分解し、そこで得られたパワースペクトルの情報を保持したまま、各モード間の位相相関をランダムにしたもの (PRS:Phase randomized surrogate) と、同期させたもの (PCS:Phase correlated surrogate) を作成して、新たな2つの時系列を得る方法である。この2つの新しい時系列の違いは、逆フーリエ変換により実空間における幾何学的性質の違いとして現れてくる。位相分布に関して2つの両極端なデータと元のデータの時系列とを比較することによって、そのデータの位相相関を調べると、幾何学的性質の違いは、次のような1次の構造関数を用いて評価することが出来る。

$$L(\tau) = \sum_{\tau} |b(x + \tau) - b(x)| \quad (9)$$

ここでは、 $\tau = \Delta x$  として各時刻での全実空間における値を求めた。元のデータ、PRS、PCS についてそれぞれ評価したものが Fig5(a) である。さらにこれから規格化して、

$$C_{\phi} = \frac{L_{PRS} - L_{OBS}}{L_{PRS} - L_{PCS}} \quad (10)$$

のように定義した位相相関指数  $C_{\phi}$  の時間変化をプロットしたものが Fig5(b) である。実空間の時間発展 Fig1 と対応させると、急峻化している孤立波が存在する時は



**Fig. 2** In Fig1, (a)  $t = 0$  (b)  $t = 200$  (c)  $t = ta$ : some solitary waves have large amplitude. (d)  $t = tb$ : no solitary wave has large amplitude. ( $\pm|b|$ (envelope):thin line,  $b_1$ :dotted line,  $b_2$ :solid line)

位相相関が強く、孤立波が小振幅の時は位相相関が弱いということが分かる。

次に、波数空間でのフーリエモード間の位相相関の自発的生成を議論する。波数空間上で系の振る舞いを考える上で最も特徴的な振る舞いを見せるのは、Fig4 から分かるように親波のモードである。系の時間発展は4波共鳴によるモード間の相互作用により記述されるため、その相互作用の中でも  $k_1 + k_2 = 2k_0$  の共鳴条件を満たすものが時間発展の全般に渡り系全体の性質を反映した相互作用であると考えられる。4波共鳴する4つのモード間の位相差を以下のように定義する、

$$\theta_{k_1} = \phi_{k_3} + \phi_{k_4} - \phi_{k_1} - \phi_{k_2} \quad (11)$$

ここで  $b_k = |b_k| \exp(i\phi_k)$  とした。この位相差の時間変化の大きさが小さいほど、その共鳴条件を満たすモード間の位相相関は強いといえる。

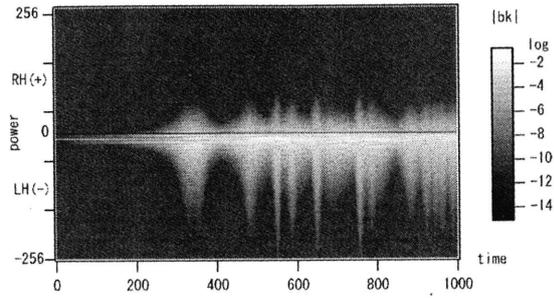


Fig. 3 Time evolution of power (logarithmic scale),  $\log |b_k|$ .  $k > 0$  means RH and  $k < 0$  means LH.

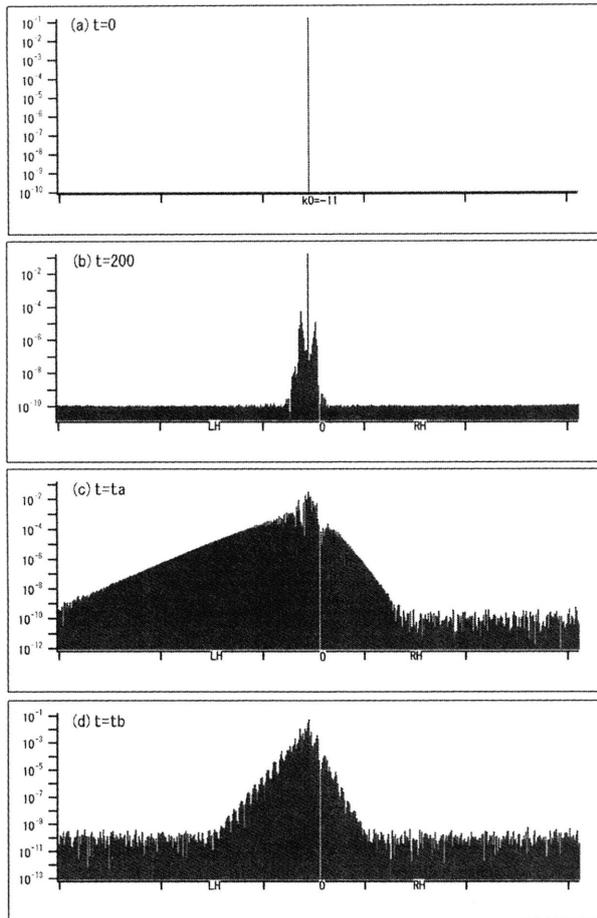


Fig. 4 In Fig3, (a) $t = 0$  (b) $t = 200$  (c) $t = ta$  (d) $t = tb$ . The vertical axis is logarithmic scale and the horizontal axis is linear scale.

このようなモード間の位相相関の指標として、まず *tricoherence* という高次の統計量<sup>10)</sup>を議論する。*tricoherence*( $TC$ )とは、*trispectrum*( $TS = \langle b_{k_1} b_{k_2} b_{k_3}^* b_{k_4}^* \rangle = \langle |b_{k_1}| |b_{k_2}| |b_{k_3}| |b_{k_4}| \exp(-i\theta_{k_1}) \rangle$ )をノルムで以下のようにノーマライズした量である。

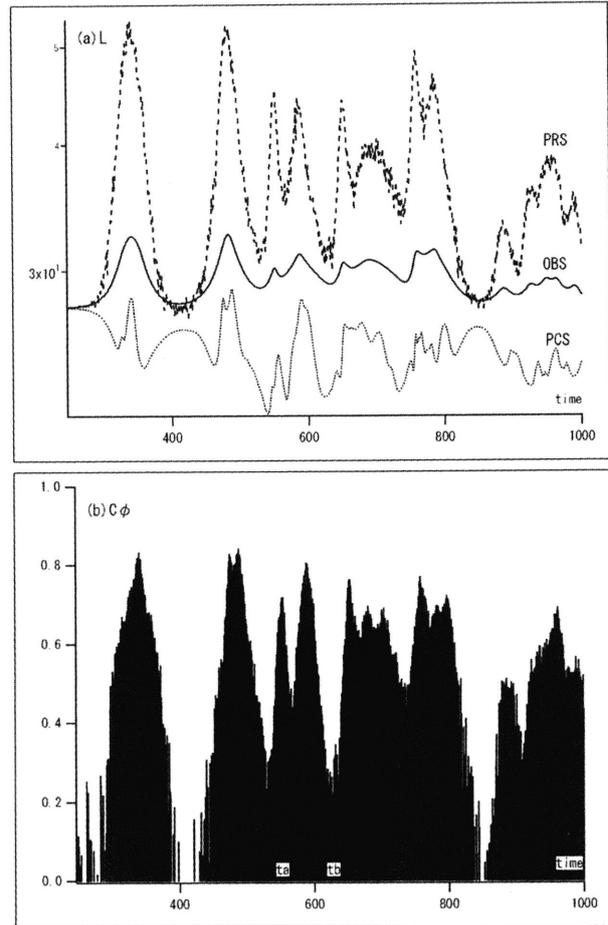


Fig. 5 Time evolution of (a) $L(\tau)$  (b) $C_\phi$ .

$$TC = \frac{|TS|^2}{\langle |b_{k_1} b_{k_2} b_{k_3}^* b_{k_4}^*| \rangle^2} \quad (12)$$

$TC$ は0から1の間の値であり、値が大きいほど位相相関は強い。先ほど議論したような  $k_1 + k_2 = 2k_0$  の共鳴条件を満たすモードの組み合わせについて、*trispectrum*、*tricoherence* とノルムを数値的にプロットすると Fig6 のようになる。以下の議論では、 $k_1 < k_2$  としている。まず Fig6(a)からは、時間発展初期 ( $t = 0 - 200$ ) で左偏波 (LH) の波数範囲だけに変調不安定性による各モードの成長率に応じた位相相関が生じている。次に、実空間上で孤立波が現れる時間帯 ( $t \sim 300$ ) になると *trispectrum* は右偏波 (RH) も含んだ共鳴条件を満たすモード全体で連鎖的に位相相関が生じている (Fig6(c))。ノルム (Fig6(b)) と Fig6(a) を比較しても分かるように、パワーの増加と位相相関が同時に起こっていることが分かる。さらに注意したいのは、Fig6(c) で大域的な位相相関の強まりだけではなく、大域的な位相相関の弱まりも間欠的に存在している点である。例えば、最初の孤立波列が表れた時間帯では、孤立波のピークを境にして大域的な位相相関

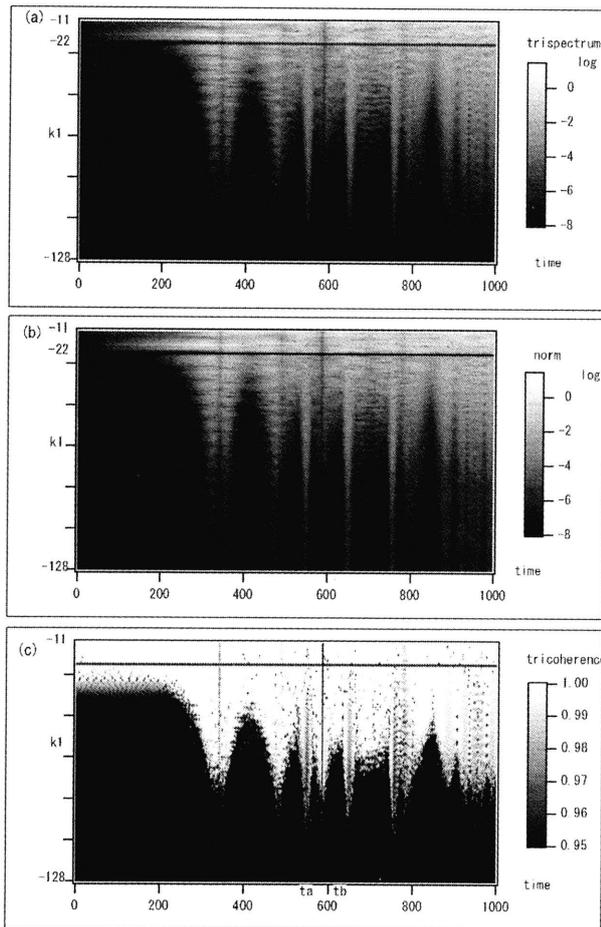


Fig. 6 Time evolution of (a)TS, (b)norm, (c)TC.((a),(b): logarithmic scale).

の強弱が交互に存在している。

以上の高次統計を用いた議論から、親波のモードに最も強く依存した共鳴条件を満たすモード間の相互作用が実空間の時間発展と非常に良い対応があることが示された。しかし現在の議論まででは、その機構が明らかとなっていない。ここで明らかにしなくてはならない機構とは、(a) モード間で位相相関が生成される機構、(b) 孤立波の生成と位相相関の生成を関連付ける機構、の2つである。位相相関・孤立波ともにこの保存系(式(1))において自発的に生成されており、これまでのシミュレーション結果からこれらには密接な関係があると考えられる。

まずは、2つの機構を明らかにする。波数空間でのパワー(波の作用、量子数)の分布の時間変化は式(3)を用いて、次のように書くことが出来る。ただしここでのパワーとは平均量ではないので、位相が顕わになっている。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{|b_{k_1}|^2}{2} \right) = k_1 \sum |b_{k_1}| |b_{k_2}| |b_{k_3}| |b_{k_4}| \sin \theta_k \quad (13)$$

この式から分かるように、4波間の位相差のサイン

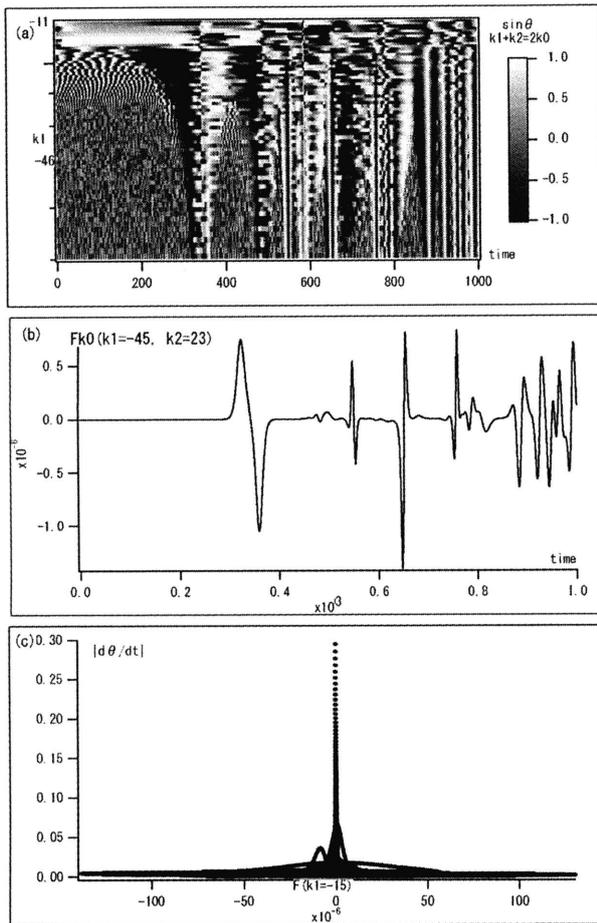
$\sin \theta_k$  が各共鳴条件の相互作用の方向(パワー流れの方向)を決める。この式は単純に、波数空間上における各モードの時間発展が各共鳴条件を満たす4波共鳴の足し合わせによって記述されることを表わしている。この個々の相互作用を以下のように定義する。 $\Sigma$ の前にある $k_1$ は、非線形項が微分型であるためである。

$$F_{k_1} = k_1 |b_{k_1}| |b_{k_2}| |b_{k_3}| |b_{k_4}| \sin \theta_{k_1} \quad (14)$$

$\sin \theta_k$  を  $k_1 + k_2 = 2k_0$  の共鳴条件においてプロットしたものが Fig7(a) である。Fig5(b) や Fig6(c) に対応した位相相関が見られ、さらにその符号が式(17)から各4波共鳴の相互作用(パワー流れ)の方向を決めることが分かる。波数モードに LH のみの共鳴と RH のモードが混ざった共鳴とで符号が反転しているのは、式(3)の非線形項が微分型であることに由来しており、それは式(16)の左辺の符号が  $k$  の符号で反転することからも分かる。

Fig7(b) は RH を含んだ共鳴条件 ( $k_1 + k_2 = 2k_0$ ) での  $F_{k_0}$  の時間発展である。Fig7(b) のような共鳴条件の場合、 $F_{k_0}$  と  $F_{k_2}$  が同符号であること、つまり親波のモード  $k_0$  から  $k_2$  にパワーが渡されているわけではないことに注意されたい。それはこのような微分型の共鳴組の場合では、一つだけ波数の符号が異なる時に、式(17)から分かるように  $k_1 = -k_2 + 2k_0$  の形で共鳴条件が表わされる「3波-1波」の4波共鳴になるためである。Fig4(b) のように変調不安定性の見える時間発展初期において、LH のモードがある程度成長した後、RH のモードの成長が起こるのは、この共鳴条件を満たす4波共鳴が不安定化するには、 $k_1$  にあたるモードが成長する必要があるためである。また、今回の  $k_1 + k_2 = 2k_0$  の共鳴条件での議論が上手くいくのも、この微分型の非線形項のためであり、例えば非線形シュレディンガー方程式(NLS)の場合だと、変調不安定性によりパワーは LH、RH に関係なく分配され、DNLS で見られるような波数空間でのパワー分布の時間発展(eq.Fig4(c)(d))は見られない。(Fig9)

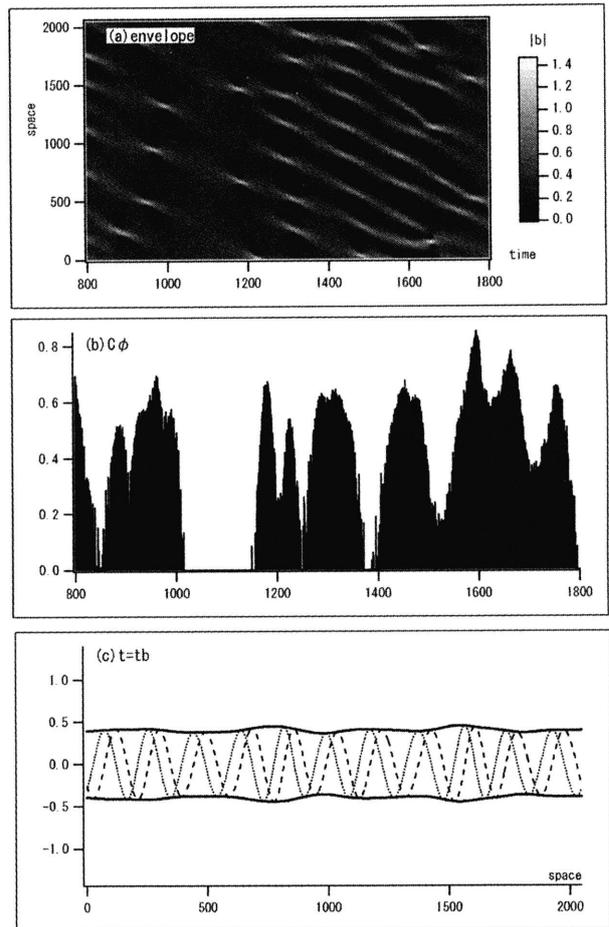
次に、位相相関が生成される機構(a)について議論を行う。位相相関( $\theta_k$ )とモード間の相互作用 $F_k$ をプロットしたものが Fig7(c) である。 $\cdot$ は時間微分を表わす。この図より、相互作用が非常に大きい時には位相相関は強く、位相相関が非常に弱い時には相互作用が弱いということが言える。これは可積分系である単体の3波共鳴組や4波共鳴組では解析的に求まる性質であり、そのような共鳴組を構成要素とする単純な多体系モデルにおいても、Fig7(c)のように同様の性質を有することが報告されている。<sup>18)</sup> また、Fig6(c)に見られるような大域的な位相相関の弱まりは、Fig6(a)から、 $\theta_k$ の符号の反転する時、すなわちパワー流れ $F_k$ の向きが逆になる時に生じ



**Fig. 7** (a) Time evolution of  $\sin \theta_{k_0}$  ( $k_1 + k_2 = 2k_0$ ),  $k_1 < k_2$  (b) Time evolution of  $F_{k_0}$ ,  $k_1 = -45$  (c) Relation among four waves:  $k_1 + k_2 = 2k_0$  and  $|\theta_{k_0}|$ . The exchange of power (quanta) between the sites is enhanced (reduced) when the relative phase is almost constant (very rapidly) in time

ていることが分かる。これはパワー流れが反転する際には一時的に流れは弱まり、その結果として位相相関が弱まっているためである。ただし系全体としては Fig5(b) から分かるように、位相相関は孤立波のピーク時にも非常に強いと言える。

孤立波と位相相関を関連付ける機構 (b) は、先程から議論しているパワー流れである。孤立波が Fig4(c)(d) のようなパワー分布に対応していることは先程述べたが、位相相関はパワー流れに対応しており、すなわち Fig1 で孤立波に対応した Fig5(b) のような位相相関は、波数空間におけるパワー分布の時間変化に伴って生じていると言える。このような機構は系に内在されたものであるため、サロゲートデータ法で見られるような実空間での違いは当然の結果である。



**Fig. 8** (a) Long time evolution of envelope  $|b|$  (b) Long time evolution of  $C_\phi$  (c) In (a),  $t = 1100$

### 3.2 再帰的な振る舞い

Fig1 を時間発展させていくと、 $t \sim 900$  にて再帰的な状態となっていることが分かる (Fig9(a))。これは式(3) が保存系であるためである。

### 3.3 分散関係

本章の議論は、主に波数空間での時間発展を見ており、振動数  $\omega$  について直接的に言及することは無かった。分散関係はその媒質中の弱非線形相互作用において、3波共鳴と4波共鳴のどちらが支配的であるかを決定するので、これまでの弱乱流や波動乱流の議論でも非常に大きな注意が払われてきた。今回議論した DNLS の線形分散関係は式 (5) だが、このような分散関係は「崩壊型」と呼ばれ、弱乱流理論においては4波共鳴は存在しない。<sup>14)</sup> 今回主に議論した  $k_1 + k_2 = 2k_0$  という分散関係も、親波モード  $k_0$  が2倍の高調波  $2k_0$  を励起した後に、 $k_1, k_2$  と相互作用するという3波共鳴での理解をされることもある。式 (13) と相補的な位相差の時間発展の式は、

$$\dot{\theta}_{k_1} = \cot \theta_k \frac{d}{dt} \log(|b_{k_1}| |b_{k_2}| |b_{k_3}| |b_{k_4}|) + S \quad (15)$$

$$S = \Sigma(\dots) + k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 - k_4^2 \quad (16)$$

となる。 $\Sigma(\dots)$  は多体系の効果である。この式から、変調不安定性は 4 波共鳴を満たさない線形分散関係が非線形の効果で補正されることにより生じているといえる。

#### 4. 結果

以下に今報告の結果をまとめる。

1. *DNLS* 中の変調不安定性により非線形発展した波動場において、孤立波的波形が減衰・成長を繰り返す、それに対応して位相相関が生じていることが示された。
2. 親波の影響の最も強い共鳴条件を満たす 4 波共鳴組に着目した議論から、波数空間での位相相関は波数

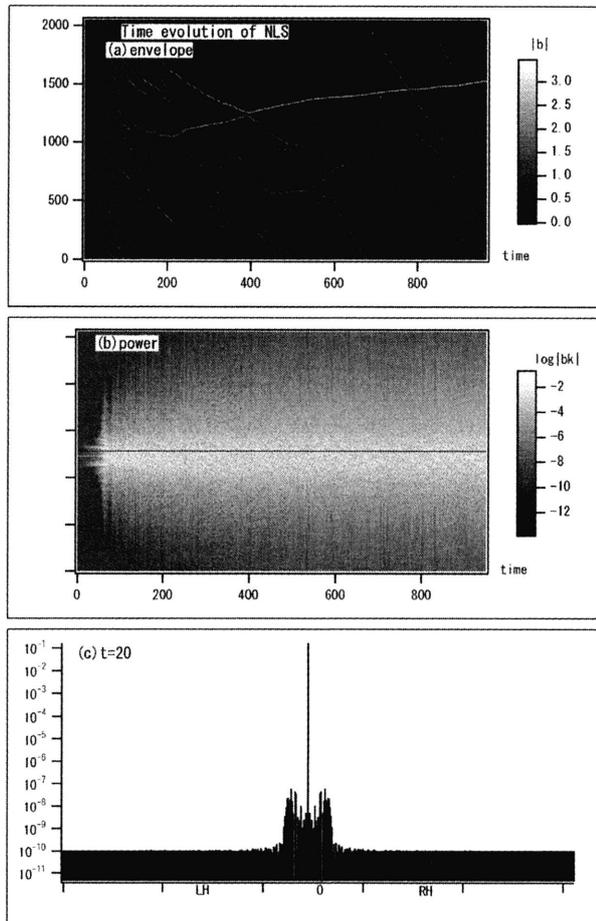


Fig. 9 Appendix: Time evolution of NLS:  $\frac{\partial b}{\partial t} + i|b|^2 b + i \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = 0$  (a) Time evolution of envelope  $|b|$  (b) Time evolution of power,  $\log|bk|$  (c) In (b),  $t = 20$

モード間の相互作用 (パワー流れ) に対応しており、モード間の相対的な位相がパワー流れの向きを決めていることが分かった。また、モード間の相互作用が強い時には位相相関も強く、位相相関が非常に弱いときにはモード間の相互作用が弱いことが分かった。

以上より、波数空間上のパワー分布の時間発展と位相の情報と表裏一体の関係であることが分かり、実空間での波形の時間発展に重要な役割を持っていることを確認した。

#### 5. 今研究の位置付けと今後の展望

今回に行った議論には、少なくとも以下のような制約がある。

1. 閉鎖系であること
2. 弱非線形の議論であること
3. 一方に伝播する波のみを扱っていること
4. 伝播方向が一次元であること
5. 個々の粒子の加熱を無視していること (流体的な視点を仮定していること)

(1) の制約に関しては、式 (3) に散逸項と成長項を加えることにより今研究を発展させる形で議論を行う。今研究では系の非線形発展を詳細に議論するため、式 (3) のような系で議論を行った。開放系にした場合には、非線形・散逸・成長項のそれぞれの時間スケールの兼ね合いによっていくつかの定常状態があらわれるようになると考えられる。今までで、波数空間において少数自由度のカオスとして系が振舞う場合についての議論が報告されている。<sup>11)</sup>

(2)(3) の制約は、*DNLS* の導出に用いられた条件であるため、今回の議論から直接的に発展させることは出来ない。(2) の制約は、*DNLS* に含まれる大振幅の非線形波動が、実際に考えられる物理過程と対応している保障がどこにもないことを裏付けている。加えて *Alfvén* 波の場合、非線形発展により崩壊不安定性を起し逆方向に進む *Alfvén* 波と順方向に進むイオン音波に分かれることが知られており<sup>7)</sup>、(3) の制約からも *DNLS* が大振幅の非線形波動を正しく再現していない可能性が疑われる。前章で述べたように、非圧縮性の *Alfvén* 波は非線形発展によって圧縮性の波動となるが、崩壊不安定性によっても音波が成長する。<sup>16)</sup> このような音波的な成分が生じることによりプラズマ粒子が徐々に加熱されていくが、 $\beta$  比 (プラズマ粒子の圧力と磁場の圧力の比。2 章参照) がかなり小さい時のみ流体的な記述である *MHD* が成立するという制約 ((5)) があるので、仮に流体的な観点から出発したとしても非線形発展によってその観点が有効でなくなる場合が存在する。逆に、電子レベルの微小スケールの不安定性が流体的な大スケールの構造に影響を与えることもある。<sup>17)</sup>

近年では、全プラズマ粒子個々の運動方程式を数値的に解く手法(全粒子シミュレーション)による研究が非常に注目を集めている。この流れは自然なものであるが、現象を非常に良く再現し得る反面、その現象をそのまま理解することは困難なものになるということに注意しなくてはいけない。現象を理解する上では、各支配方程式が正しく機能する時間・空間スケールにおいてそれらの方程式を用いた理解を進める方が現実的であり、場面に応じて使うべき方程式系を見極める研究が必要とされている。<sup>12)13)</sup> そのような各階層の支配方程式の比較研究を行う時、今回議論したような波数空間でのパワー分布や位相相関の比較は、スケール間相互作用の観点から重要な対象であると言える。

(4)の制約はより現実的な問題に繋がっている。まず、磁気流体波には大きく分けて *Fast mode*、*Intermediate mode*、*Slow mode* の波動が存在する。DNLS は準平行伝播の仮定の下で縮退した *Fast mode* と *Intermediate mode* の時間発展を記述する方程式であるが、伝播角を考慮すると空間発展は2次元以上になる。このような弱2次元の波動を記述する方程式として、多次元 DNLS 方程式がある<sup>4)</sup>。波動乱流については、弱乱流理論を発展させる形で統計量の時間発展による研究が行われており、<sup>15)18)</sup> これらの研究と今回我々が行った位相相関に着目した議論との違いは、着目する時間スケールの違いであるとも考えられる。前章に議論した系で乱雑位相近似の仮定が比較的良く成立していても、今回の結果は平均量を取る操作によって見逃してしまう物理過程があることを示している。平均量を取る操作で消えてしまうような構造が、DNLS のような弱非線形方程式の適用範囲の内であるかという議論も問題である。2次元以上での MHD 波動乱流の研究は主に統計量を用いて行われているので、多次元 DNLS 方程式による研究が今後必要となってくる。

#### 参考文献

- 1) Rogister, A., "Parallel propagation of nonlinear low-frequency waves in high- $\beta$  plasma", Phys. Fluids, 14, 2733-2739(1971).
- 2) Mjølhus, E., "On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field.", J. Plasma Phys., 16, 321-334 (1976).
- 3) Mio, K et al., "Modified Nonlinear Schrodinger Equation for Alfvén Waves Propagating along the Magnetic Field in Cold Plasma", J. Phys. Soc. Jpn., 41, 265-271(1976).
- 4) Mjølhus, E., and Hada, T., "Nonlinear waves and chaos in space plasmas", edited by Hada, T and Matsumoto, H (Terrapub, Tokyo, 1997), p.121
- 5) Hada, T., et al, "Phase coherence of MHD waves in the solar wind", Space. Sci. Rev, 107, 463-466 (2003).
- 6) He, K., Chian, A, C, L., "On-off collective imperfect synchronization and bursts in wave energy in a turbulent states", Phys. Rev. Lett, 91, 3(2003).
- 7) Sagdeev, R., Z., Galeev, A, A. "Nonlinear Plasma Theory", T. M. O'NEIL and D. L. BOOK(1969). Turkmani, R., Torkelsson, U., "Propagating of non-linear circularly polarised Alfvén waves in a homogeneous medium", AA, 409, 813-820(2003).
- 8) Sakai, j., Sonneruo, B., "Modulational instability of finite amplitude dispersive Alfvén waves.", J. Geophys. Res, 88, 9069-9078(1983). Spangler, A, R., "Non-linear Astrophysical Alfvén waves: onset and outcome of the modulational instability.", Astropys. J, 299, 122-137(1985). Mio, K et al., "Modulational instability and envelope-solitons for nonlinear Alfvén waves propagating along the Magnetic Field in Plasmas.", J. Phys. Soc. Jpn, 41, 667-673(1976).
- 9) Kaup, D, J., Newell, A, C., "An exact solution for a derivative nonlinear Schrodinger equation.", J. Math. Phys, 19, 798-801(1978). Chen, X., Lam, W, K, "Inverse scattering transform for the derivative nonlinear Schrodinger equations with nonvanishing boundary conditions.", Phys. Rev. E, 69(2004)
- 10) Collis, W, B., et al, "High-order spectra: the bispectrum and trispectrum", Mechanical Systems and Signal Processing, 12, 375-394(1998).
- 11) Krishan, V., Nocera, L., "Relaxed states of Alfvénic turbulence", Phys. Lett A, 315, 389-394(2003). Nocera, L., Buti, B., "Bifurcations of coherent states of the DNLS equation", in New Perspectives in the Physics of Mesoscopic systems, Eds. S. De Martino et al., p225, World Scientific, Singapore(1997).
- 12) Fujimoto, M., and Terasawa, T., "Anomalous ion mixing within an MHD scale Kelvin-Helmholtz vortex", J. Geophys. Res, 99, 8601-8613(1994).
- 13) Hirose, A., et al, "Relation between Hall-magnetohydrodynamics and the kinetic Alfvén wave", Phys. Lett. A, 330, 474-480(2004).
- 14) Zakharov, V., et al, "Kolmogorov Spectra of Turbulence I, Wave turbulence", Springer-Verlag (1992).
- 15) Cai, D et al., "Chaotic and turbulent behavior of unstable one-dimensional nonlinear dispersive waves", J. Math. Phys, 41, 4125-4153(2000).
- 16) Hoshino, M., Goldstein, M, L., "Time evolution from linear to nonlinear stages in magnetohydrodynamic parametric instabilities", Phys. Fluids B, 1(7), 1405-1415(1989).
- 17) M, Scholer, S, Matsukiyo., "Nonstationarity of quasi-perpendicular shocks: a comparison of full particle simulations with different ion to electron mass ratio", 22, 2345 - 2353(2004).
- 18) Yokoyama, N., "Statics of gravity waves obtained by direct numerical simulation", J. Fluid. Mech, 501, 169-178(2004).
- 19) 成行 泰裕・羽田 亨, 3波共鳴組による弱乱流モデルの解析: 非線形相互作用と相対的状态, 九州大学大学院総合理工学報告, 26, 2, 233-242(2004).