

3波共鳴組多体系による弱乱流モデルの解析：非線形相互作用と相対的状态

成行, 泰裕
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

羽田, 亨
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻流体環境理工学部門

<https://doi.org/10.15017/16731>

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 26 (2), pp.233-242, 2004-09. Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

3波共鳴組多体系による弱乱流モデルの解析: 非線形相互作用と相対的状态

成行 泰裕^{*1,†} ・ 羽田 亨^{*2}

(平成16年7月31日 受理)

**Analysis of weak turbulence model by multiply coupling triplets of
eigenmodes;
nonlinear interaction between elements and the interactive states.**

Yasuhiro NARIYUKI and Tohru HADA

[†]E-mail of corresponding author: *nariyuki@esst.kyushu-u.ac.jp*

Behavior of a nonlinear system (such as space plasma) is often discussed via evolution of eigenmodes of associated linearized system and nonlinear interactions among them. A minimum unit for representing such a nonlinear interaction is a triplet of eigenmodes, which satisfies the resonance condition. First, we discuss behaviour of a triplet in terms of "interaction (e.g. flux between the sites)" and "interactive states (e.g., phase difference among the sites)". Then we construct a simple model of weak turbulence by multiply couple such triplets. Interestingly, this simple model has a hierarchy structure which is universal to the complex systems. Numerical study shows that the system exhibits intermittency and long time evolution is controlled by self-organized criticality. We discuss these specific features of the system by invoking the concept of the "interaction" and the "interactive state".

Key words: *weak turbulence, nonlinear system, nonlinear interaction, interactive states, SOC(self-organized criticality), hierarchy, complex system, Alfvén waves*

1. 緒 言

宇宙プラズマなどの強い非線形性を扱う分野においては、フーリエモード(線形固有モード)の重ね合わせにより連続量を記述して、その後元方程式を満たすような非線形相互作用を考慮する手法は、必ずしも基本的なアプローチでは無い。しかし、考える振動量の振幅があまり大きくない系では、非線形相互作用により影響を与える線形固有モードの発展による系の記述ができる。そのような系における相互作用の最小単位は共鳴条件を満たす3つの固有モードの結合(トリプレット)であるが、個々の振動の時間スケールと振幅(envelope)の時間発展の時間スケールが分離できる場合には、Manley-Roweの関係を満たし積分可能な、振幅に対する発展方程式系が導かれる。¹⁾

本研究では、トリプレットの組を多数連結させることにより、多くの固有モードが近隣相互作用を通じて時間発展する多自由度モデルを考え、その性質を数値的に議論し、非線形相互作用により位相相関ないし各パラメータ

の相関が生成される過程について考察した。これは、多くの波動がフーリエ空間で近隣モードとの非線形結合によりエネルギーのやり取りを行う、弱乱流の一つのモデル化であると言える。弱乱流とは有限振幅の波の重ね合わせによる「乱れた流れ」のことであり、通常の乱流とは違い、低次の非線形相互作用が支配的な影響を及ぼす。弱乱流理論は低次の非線形相互作用に着目し、影響の薄い高次モードを打ち切り、乱雑位相近似(Random Phase Approximation;RPA)を施した決定論的な方程式に立脚した理論である。現在でも、水波での重力波や表面張力波、宇宙空間でのAlfvén波やLangmuir波などの弱乱流について様々な議論が行われている。²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾従って、言い換えれば上記で考えた多自由度モデルは、弱乱流理論において決定論的方程式に立ち入る前の運動方程式(3波方程式;トリプレットの方程式)を、より近隣相互作用を強く意識した周波数条件を用いてモデル化したものであるとも言える。

地球、生命体、市場経済などに代表される複雑な系には、いくつかの共通する特徴が存在しており、その内の一つとして階層性が挙げられる。階層性とは、系の基本

*1 総合理工学府 大気海洋環境システム学専攻修士課程

*2 総合理工学研究院 流体環境理工学部門

要素がその系を直接構築するのではなく、要素は支配法則の異なる部分(共同体, サブシステム)をいくつか構成し、それらが系全体を組み上げるという特性であり、階層性を持つ複雑な系の要素や部分はそれぞれが互いに相互作用をしていて、それらの相互作用は位相差などで表象される「相対的状态」に大きく影響を受けている。これは要素に拠る系の特性の創発であるとも言える。このことは、上記のような単純な非線形多体系モデルにおいても見られる複雑系の基本的な特性である。¹³⁾¹⁴⁾

今報告の主題は2つで、1つは今まであまり議論されてこなかった各モード間の位相差と振幅の相関から判明したトリプレットの非線形相互作用の詳細な働きの解明であり、もう1つは先に述べたような多体系モデルにおける個々のモードの時間発展が間欠的であること、エネルギー分布がべき乗側に収束すること(臨界自己組織化)など、少数自由度の場合とは著しく異なる振る舞いの個々の要素(固有モード)及び部分(トリプレット)間の「相互作用」及び「相対的状态」を用いての理解である。

さらに、トリプレットに減衰・成長の項を加えた開放系での議論や、4つの固有モードの結合についてのトリプレットと同様の議論についても少しだけ経過報告を行う。

2. 理論モデルと計算機実験

2.1 3波共鳴

3波共鳴モデル(Fig1)は、非線形相互作用を行う最も基本的な要素として、様々な現象に関与することが知られている。宇宙プラズマ中のAlfvén波の崩壊不安定は、その一例であり、背景磁場に平行伝播する有限振幅Alfvén波(添え字3)が、反対方向に伝播するAlfvén波(1)と音波(2)に崩壊すること(またはその逆過程)を表わすモデルとして、以下の方程式系を考えることができる。¹⁾

$$\dot{C}_1 = -iC_2^*C_3 \quad (1)$$

$$\dot{C}_2 = -iC_1^*C_3 \quad (2)$$

$$\dot{C}_3 = -iC_1C_2 \quad (3)$$

ここで C_j は規格化された複素振幅、 $\dot{}$ (ドット)は時間微分、 $*$ は共役な複素数を、 i は虚数単位を表わす。上の3波方程式は各モードの周波数 ω についての共鳴条件、

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \quad (4)$$

を用いて導出される。この方程式系は先にも述べたとおり、可積分系である。そのことは以下のように示される。上式において、量子力学とのアナロジーから「量子の数(quanta)」(作用)

$$N_j = |C_j|^2 \quad (5)$$

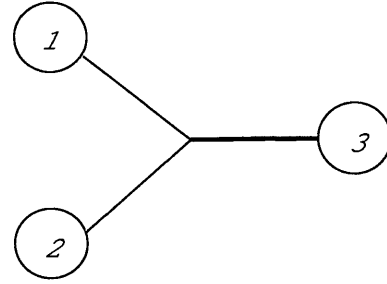


Fig. 1 The triplet, the fundamental element of three nonlinearly interacting eigenmodes. Frequencies of the eigenmodes, $\omega_1, \omega_2,$ and ω_3 satisfy the resonance condition, $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$.

を導入すると、各量子数を時間微分することにより、簡単に以下のManley-Roweの関係式が示される。

$$N_1 + N_3 = const \quad (6)$$

$$N_1 - N_2 = const \quad (7)$$

量子力学の言葉を用いれば、上の保存則は次のように解釈が出来る。⁷⁾ ω_3 の量子が消滅して ω_1 と ω_2 の量子が出来る。 $(\Delta n_3 = -1, \Delta n_1 = \Delta n_2 = 1)$ この過程はあたかも1つの粒子が2つの粒子に崩壊するのと同じように見える。このため、モード3によるモード1, 2の励起を崩壊不安定性とも呼ぶ。

さらに複素振幅を実振幅 A_j と位相 ϕ_j の積に分けるとすると($N_j = A_j \exp(i\phi_j)$), 位相差 $\theta = \phi_3 - \phi_2 - \phi_1$ と A_j について以下の関係式が成立する。

$$\dot{\theta} = -\left(\frac{A_1 A_2}{A_3} - \frac{A_2 A_3}{A_1} - \frac{A_3 A_1}{A_2}\right) \cos \theta \quad (8)$$

$$= \cot \theta \frac{d}{dt} \log(|C_1||C_2||C_3|) \quad (9)$$

上式を積分して以下の保存則が得られる。

$$|C_1||C_2||C_3| \cos \theta = const \quad (10)$$

式(1)-(3)は、それぞれが複素振幅に対する発展方程式であり、自由度は6であるように見えるが、これらを実振幅と位相に対する式の形に書きかえると、実は A_1, A_2, A_3 および位相差 θ の4変数に対する発展方程式系である。これらに対し、保存量が(6),(7),および(10)で与えられるため、残りの1自由度を求積で求めることができ、つまりこの方程式系は可積分系であることがわかる。¹⁾ 実際、どのような初期条件に対しても、厳密解は楕円関数で与えられる。しかし物理的な観点から考えると、この系は各モードの初期条件の大小関係により、系が安定か不安定かの違いが生じる。系が安定な時は、揺らぎ程度の量子数のやり取りしかない。これは崩壊不安定性が生じているか否かであり、系全体のエネルギーの保存から導き出される結論である。

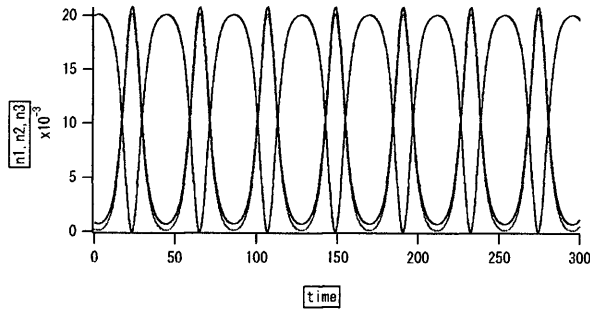


Fig. 2 Time evolution of N_j with the initial condition, $N_3 \gg N_1, N_2$. The system is 'unstable' in that the 'quanta' originally stored in mode 3 are re-distributed to modes 1 and 2 within an instability time scale (20).

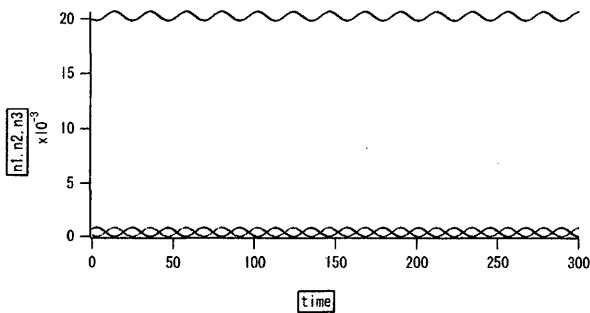


Fig. 3 Same as Figure 2 except that the initial condition here is $N_2 \gg N_1, N_3$. The system is 'stable' in that the values of N_1, N_2 , and N_3 do not evolve drastically.

2.2 3波共鳴組多体系 (閉鎖系)

トリプレットの組を多数連結したモデル (3波共鳴組多体系) を考える。結合の方法にはいろいろなヴァリエーションが考えられるが、ここでは各モード間の周波数関係が一意的に決まるような連結モデル (Fig4) を考えることにする。後に示すように、この場合には時間発展の結果として秩序が生じた。

このモデルの周波数関係は、

$$\omega_{j+2} = \omega_{j+1} + \omega_j \quad (11)$$

$$\omega_j \propto \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^j \quad (12)$$

を満たす。つまり ω_1 と ω_2 が両方ともゼロでない限り、 ω_j はフィボナッチ数列になる。

単体トリプレットの3波方程式を各周波数関係について考えることで、この場合の多体3波方程式 (multiple three wave equation; M3W) が以下のように書けることが分かる。

$$\dot{C}_j = -iC_{j-1}^*C_{j+1} - iC_{j+1}^*C_{j+21} - iC_{j-2}C_{j-1} \quad (13)$$

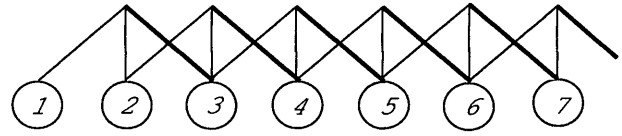


Fig. 4 The multiply-coupled triplet model considered in the present paper. The resonance condition gives the Fibonacci sequence, $\omega_{j+2} = \omega_{j+1} + \omega_j$.

さらにトリプレットの時と同様にして $N_j = A_j \exp(i\phi_j)$ とおいて、各結合間の位相差を $\theta_j = \phi_j - \phi_{j-1} - \phi_{j-2}$ とすると、

$$\begin{aligned} \dot{N}_j &= 2A_{j+2}A_{j+1}A_j \sin \theta_{j+2} \\ &\quad + 2A_{j+1}A_jA_{j-1} \sin \theta_{j+1} \\ &\quad - 2A_jA_{j-1}A_{j-2} \sin \theta_j \end{aligned} \quad (14)$$

となり、これの左辺について全モードについての和を取ると、

$$\sum_{j=1}^n \dot{N}_j = \sum_{j=1}^{k-2} 2A_{j+2}A_{j+1}A_j \sin \theta_{j+2} \quad (15)$$

が成立する。また、このモデルは外部とのエネルギーのやり取りの無い閉鎖系なので、 $\sum_{j=1}^n \omega_j N_j = const$ である。

2.3 トピックス

2.3.1 3波共鳴組多体系 (開放系)

現実の現象を説明するモデルを考える上で、開放系での議論に移行することは自然な流れである。減衰・成長項と共鳴条件の誤差の項を考慮したトリプレットの系では、カオス的な挙動を示すことが解っている。⁸⁾ 多体系の場合では、それらの項の効果は後ほど述べる各モードのエネルギーと周波数の間に成り立つべき側の指数に現れることが期待される。このことは次章の考察で詳しく触れる。

2.3.2 4波共鳴組多体系

水面重力波など、分散関係によって4波共鳴が支配的である弱乱流現象も多数存在する。それ故、4波共鳴による議論も同様に必要であると言える。また、3波共鳴とは違い数種類の4波共鳴の型が考えられ、より多様なモデルを考えることが出来る。

3. 計算結果・考察

3.1 3波共鳴

前章で述べたとおり、トリプレットは可積分系であり、初期値によって系の安定性が違っていた。ここでは、位相差 $\theta = \phi_3 - \phi_2 - \phi_1$ の時間発展の数値的な議論により、この非線形相互作用の振る舞いの重要な特性を明らかにしていく。

因みに、非線形相互作用をする系においてモード間の位相相関(位相差等)を考えることは重要であると言える。非線形性の強い系では位相相関が実際の物理量や物理現象と密接に関係しているため準線形の枠組みでは扱えないことが明らかになっていることや、壁にかかった振り子時計の弱い非線形相互作用による同期(位相が揃うこと)、蛍の発光や心筋細胞の同期というような位相差に特徴を持つ現象が身近な例として存在していることなど、その指向性を支持する理由は多く存在する。また、自己相似性を持つ非線形系では統計的定常状態において固有モードの大きさがべき乗則に従う(自己組織化臨界現象)が、そのような系であっても位相相関がある場合と無い場合とではそれに対応する空間的・図形的な性質が大きく異なっていることも分かっている。¹¹⁾¹²⁾

さて、量子数の流れ(フラックス) F を、Manley-Roweの関係式((6),(7))を踏まえて

$$F = \dot{N}_1 = \dot{N}_2 = -\dot{N}_3 = 2A_3A_2A_1 \sin \theta \quad (16)$$

と定義する。以下ではトリプレットにおけるモード間の非線形相互作用の特性を詳しく調べるため、この F と位相差 θ との関係を調べる。この時、各量子数の初期値が0より大きい場合とそうでない場合、つまり一つでも量子数の初期値が0のモードがある場合とでは位相差 θ の値と時間発展は大きく異なっている。それは、保存量 $|C_1||C_2||C_3| \cos \theta = D_0 = const$ において、一つでも量子数の初期値が0であった場合には、この保存量の値は0であることによる。今までの3波共鳴の研究でも明らかにされているように、初期値の一つが0であっても、量子数の時間変化においては一般性を失うこと無く他の場合と同じように議論することが出来る。このことは、 $|C_1||C_2||C_3|$ の項がこの場合でも時間変化をすることを表わしており、これより $\cos \theta = 0$ であることが新たに分かる。この場合の量子数と位相差の時間発展を数値計算した結果がFig5である。極値の度に位相が180度ずつ変化しているのは、極値において量子数の流れの方向が反転しているからである。

次に、量子数の初期値がどのモードにおいても0を取らない場合について考える。この時、位相差 $\cos \theta$ の初期値が0で無い場合は保存量 $D_0 = const \neq 0$ なので、量子数の流れは D_0 を用いて、

$$F = 2D_0 \tan \theta \quad (17)$$

と表わせる。これより、 F が有限の値を取るためには $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ という条件が必要である。この条件は保存量の式からも明らかである。さらに、式(17)からは θ が $-\pi/2$ 又は $\pi/2$ に近い時は F は大きく、反対に $\theta = 0$ の時 $F = 0$ である(Fig6)。

この場合の量子数と位相差の時間発展を表わすFig7, Fig8において、 θ の時間変化に緩急の特徴が見られるこ

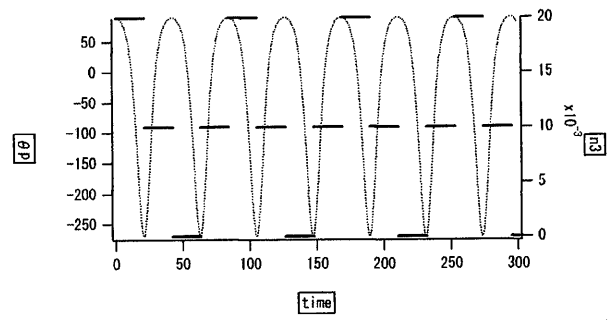


Fig. 5 Time evolution of N_1, N_2, N_3 , and θ for the case that $|C_1||C_2||C_3| \cos \theta = 0$

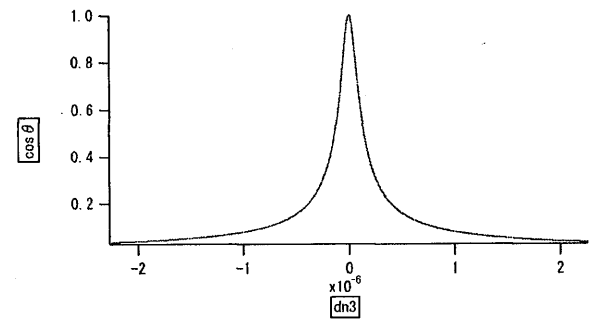


Fig. 6 Relation between $\cos \theta$ versus $dN_3 (= -F)$.

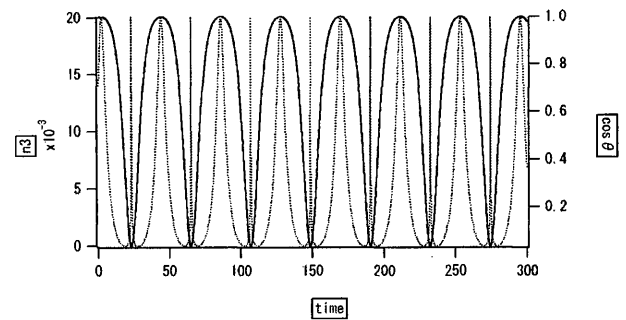


Fig. 7 Time evolution of quanta(wave action) and $\cos \theta$: Unstable case.

とに注目したい。量子数が極値に近づくにつれ、 θ の時間変化の量は増大するように見える。(Fig7, Fig8では簡単のために $\cos \theta$ を用いた。)このことを詳細に見るために $\dot{\theta}$ の時間発展と量子数の時間発展を調べたものがFig9, Fig10である。

この図より、量子数が極値を取る時 $\dot{\theta}$ は大きなピークを取り、さらにモード間で量子数のやり取りが盛んで系が不安定な場合は、極小値では極大値よりもはるかに大きなピークが現れていることが分かる。Fig9の量子数はモード3のものであるので、モード1, 2の場合はモード3とは逆に極大値に大きなピークを持つ。この $\dot{\theta}$ と F

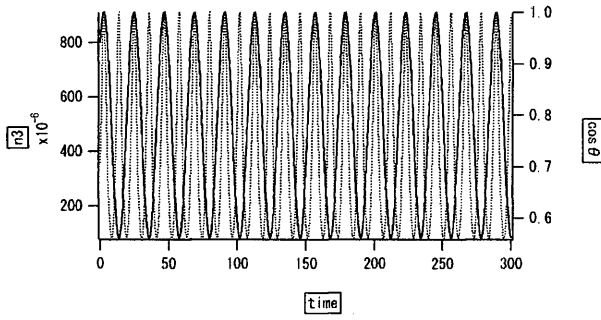


Fig. 8 Time evolution of quanta and $\cos\theta$; Stable.

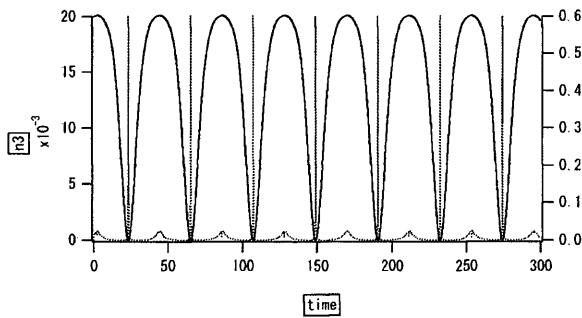


Fig. 9 Time evolution of quanta and θ , when system is unstable and $|C_1||C_2||C_3| \cos\theta \neq 0$

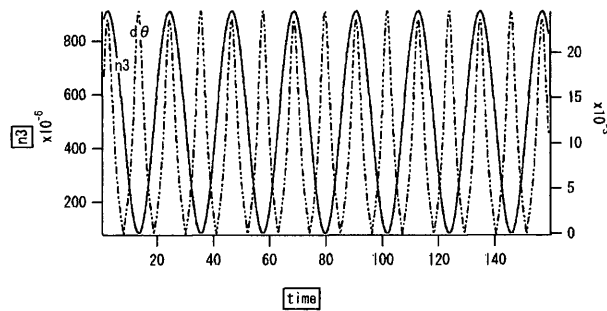


Fig. 10 Time evolution of quanta and θ , when system is stable and $|C_1||C_2||C_3| \cos\theta \neq 0$

の関係を、より分かりやすく示したものが Fig11 である。時間発展で見たのと同じように、極値 ($F = 0$) において θ は大きなピークを持ち、同時に θ の非常に小さな時に $|F|$ は大きな値を取ることが確認できる。これは、時間発展を改めて見ても確認できることである。

以上をまとめると、 $F = 0$, $\theta = 0$, 反対に θ が $\pm\pi/2$ に近づくにつれて $|F|$ は最大に近づき、位相差の時間変化も緩やかになるといえる。つまり、位相差の時間変化が小さい時には各モード間の相互作用が強く盛んに量子をやり取りし、逆に位相差に時間変化が大きい時には各モード間の相互作用が弱く量子のやり取りが少ないこと

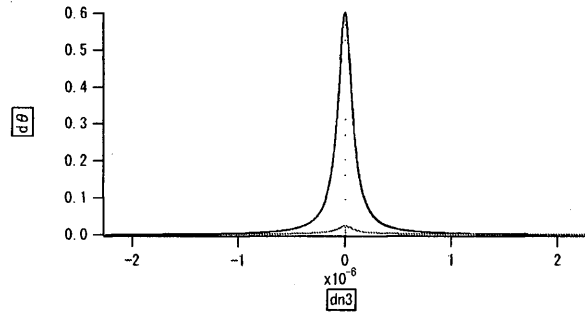


Fig. 11 Relation between θ and F for a (single) triplet. The exchange of quanta between the sites is enhanced when the relative phase is approximately constant in time, while the exchange of quanta is reduced when the relative phase varies rapidly.

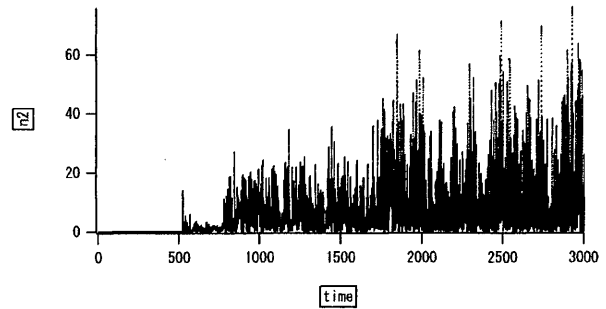


Fig. 12 Time evolution of N_2 for the multiply-coupled model.

が分かる。また、位相差 $\cos\theta$ の初期値が 0 の時は、量子数の初期値が 0 であった場合と同様の議論が成り立ち、この場合も $\cos\theta = 0$ が常に成立する。

3.2 3波共鳴組多体系

次に、多体系モデルの考察を行う。Fig12-14 はランダムな初期条件を与えた系の時間発展を数値的に解いた結果である。これを見ると、まず低モードにおいては時間発展が速いのに対し、高モードにおいては時間発展が緩やかである。

さらに、Fig12-14 において初期の頃では、大きいモード番号 (サイト) から小さいモード番号に量子が流れている。これは、Fig15 (定常状態における各モードの量子数を対数スケールでプロットしたグラフ) より、十分に時間が経過した後の統計的定常状態において、各モードにエネルギーが等分配されていることが示されることから裏付けられる。それは次のように示される。

Fig15 から、べき指数 (対数スケールの直線の傾き) は以下のように求まる。(時間平均量を \bar{X} とおく。)

$$\log \bar{N}_j \propto -\frac{1}{5}j \quad (18)$$

j はモード番号である。つまり Fig15 の横軸はフィボナッ

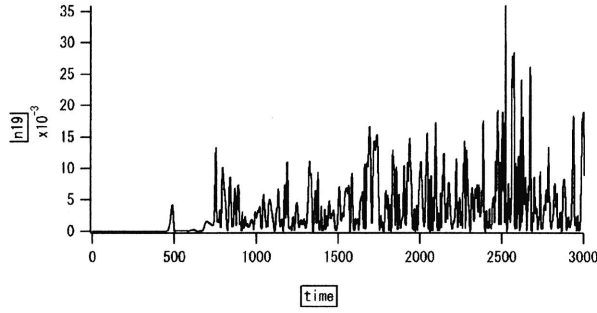


Fig. 13 Time evolution of N19 for the multiply-coupled model.

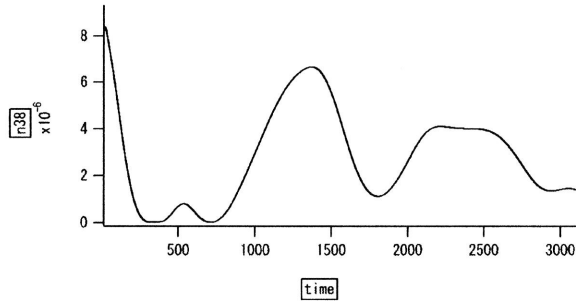


Fig. 14 Time evolution of N38 for the multiply-coupled model.

チ数での対数スケールとなっているので、これを縦軸と同じ常用対数のスケールに直すと、 $\bar{N}_j \propto \omega_j^{-\beta} \Rightarrow \log \bar{N}_j \propto -j\beta \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \beta \approx 1$ としてべきの指数 β が求まる。これにより、統計的定常状態においてこの系ではエネルギーの等分配が生じていることが確認できる。これは、 $\bar{N}_j \propto \omega_j^{-\beta} \Rightarrow \bar{N}_j \omega_j (= \text{energy}) = \text{const}$ より、閉鎖系のエネルギー保存からの帰結とも言える。

少し横道に逸れるが、系を開放形にした際に予想されるエネルギー分布について少し述べたいと思う。閉鎖系においては、先に示したようにエネルギーの等分配が見られた。これは系が熱平衡状態に落ち着いたことを意味している。このような熱平衡状態においては、系の発展期において見られたような大域的なエネルギーの流れは時間平均をすれば存在せず、統計的には要素間の詳細な釣り合いが成立しているといえる。しかし、系が開放系の場合、長時間発展の後に、その系が落ち着くのは熱平衡状態ではなく非平衡な統計的定常状態である。開放系の場合には、統計的定常状態とは流出入の大域的な釣り合いが取れたに過ぎず、詳細な釣り合いは存在していない。これより、開放系の場合には統計的定常状態においては定常的な量子の一樣流れが存在し、エネルギーは等分配ではなくべき則に従うと考えられる。また、Fig15 のようなべき則分布は、SOC(自己組織化臨界現象)の表

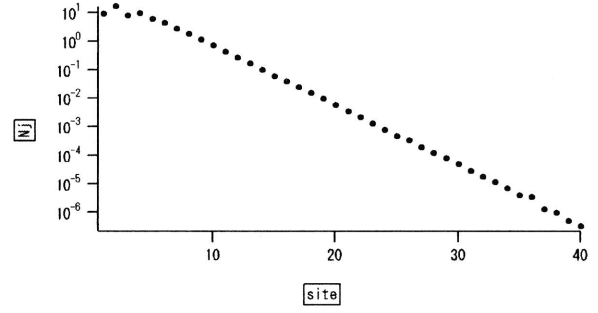


Fig. 15 Plot of N_j versus the site number, j , when the system is considered to be in the statistical equilibrium. Note that the vertical axis is in logarithmic scale, while the horizontal axis is in linear scale. However, since ω_j is approximately proportional to the j -th power of the 'golden number' (c.f., eq.(12)), the plot suggests that N_j is given as a power law in terms of ω_j . The power law index turns out to be -1, implying that the energy equi-partition is attained at the statistical equilibrium state.

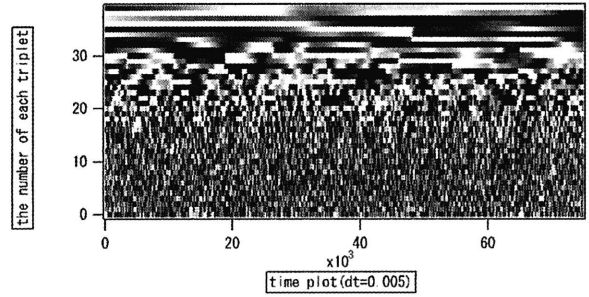


Fig. 16 Density plot of $\cos \theta_j$ versus time, when the system is in the statistical equilibrium. Notice sporadic change of the relative phase (θ) often occurs simultaneously at several neighbouring sites.

れであるとも考えられる。臨界現象であることは、べき乗関数がスケール普遍な、臨界状態である系のもつフラクタル性の数式表現であることから確認される。ただし、この系は閉鎖系であるため、厳密な意味での自己組織化現象ではない。¹⁰⁾

次に、3波間位相差

$$\theta_j = \phi_j - \phi_{j-1} - \phi_{j-2} \quad (19)$$

についての時間発展を見る。Fig16 から分かるように、位相差も振幅と同じく、高モードではゆっくりと、低モードでは速く時間変化をする。ただし、多体系の場合は単体トリプレットの時のような θ の条件は無く、周期性も無い。

また、位相差の時間変化の時間発展を示したものが Fig17 である。これより、単体トリプレットで見られた停滞期と活性期が多体系においても、非周期的にはある

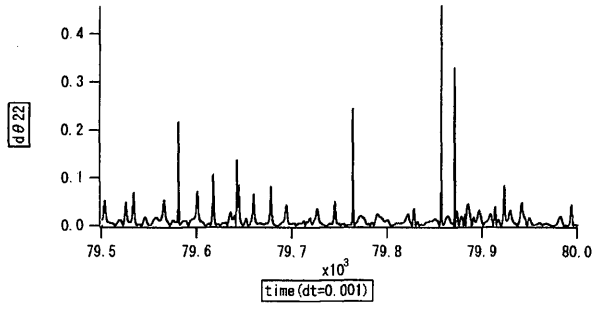


Fig. 17 Time evolution of θ_{19} .

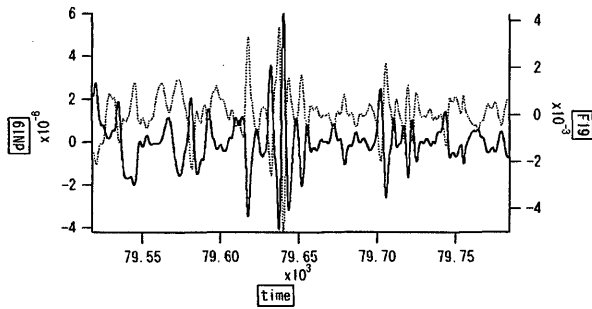


Fig. 18 Time evolution F_{19} and θ_{19} when the system is in the statistical equilibrium.

が見られることが分かる。この間欠的な時間発展も、近隣モード間の量子数の受け渡しに関連付けて議論されるべき現象であると考えられる。ここでも、量子の流れ

$$F_j = 2A_j A_{j-1} A_{j-2} \sin \theta_j \quad (20)$$

を導入する。すると、 \dot{N}_j は、

$$\dot{N}_j = F_{j+2} + F_{j+1} - F_j \quad (21)$$

と表わせる。上式より、面白いことが分かる。Fig18は、あるモードの \dot{N}_j と F_j の時間発展のグラフである。これから、両者は対称的、すなわち \dot{N}_j の式の右辺においては F_j が支配的であることが分かる。これは、式(20)から分かるように、 F_j は F_{j-1} に比べ大きいためであると考えられるが、これは後ほど述べるように簡単な問題ではない。 F_j について考察する上で、以降では固有モードの連結モデルというより、トリプレットの連結モデルという意識を強く持って話を進める。

Fig19は、 F_j に対する θ_j の図である。単体トリプレットのときと同じように、 $F = 0$ 付近で位相差の時間変化が急激に大きくなっていることが分かる。これに加えて式(20)から $F = 0$ の時、 $\theta = \pm n\pi$ (n : 整数) であるといえる。さらに、定常状態での $|F_j|$ を各モード間に対しプロットすると Fig20 のようなべき則に従う。

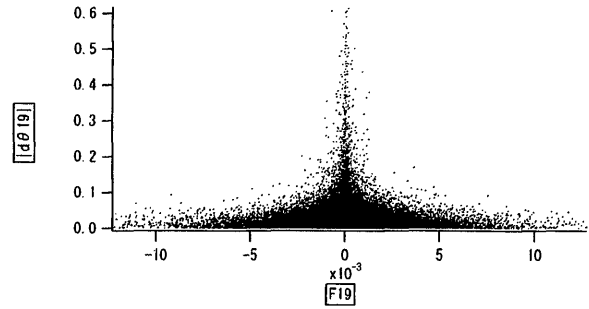


Fig. 19 Relation between F_{19} and θ_{19} . As in Figure 11, here it is seen again that the exchange of quanta between the sites is enhanced (reduced) when the relative phase is almost constant (varies rapidly) in time.

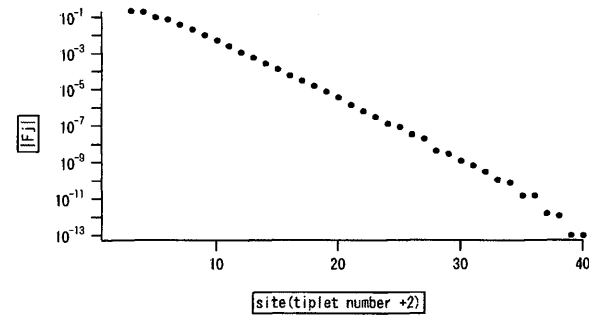


Fig. 20 Time average of $|F_j|$ of each triplet when the system is in the statistical equilibrium.

Fig20を θ_j の添え字と同じサイトで各トリプレットについての値を取ったグラフと考えると、べき指数は $-3/2$ となる。これは、

$$\frac{\overline{|F_j|}}{\overline{|F_{j-1}|}} = \frac{\overline{A_j A_{j-1} A_{j-2} |\sin \theta_j|}}{\overline{A_{j-1} A_{j-2} A_{j-3} |\sin \theta_{j-1}|}} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-3/2} \quad (22)$$

ということであるが、 N_j と N_{j-3} の関係より、

$$\sqrt{\frac{N_j}{N_{j-3}}} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-3/2} = \phi^{-3/2} \quad (23)$$

が言える。確かに、隣り合うトリプレットにおける位相差の平均値の大きさはほぼ近い値であることは計算機実験で確かめられるが、この一致にはそれだけではない、より慎重な吟味が必要であるように思われる。まず、各量子数(あるいは実振幅)は統計的定常状態において、平均値のまわりを微小に振動している量ではなく、ある時刻とある時刻の値を比べた場合その大きさの差が無視でき

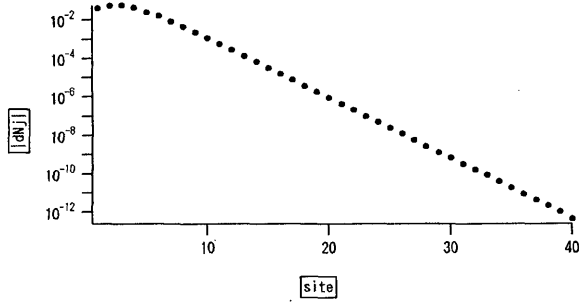


Fig. 21 Time average of $|\bar{N}_j|$ of each triplet when the system is in the statistical equilibrium.

ない程度に大きいことは容易に確かめられる。このような場合において、各変数が独立に近ければ、変数の積の平均量と変数の平均量の積とは異なる値を取る。それが偶然同じ値を取ることがあっても、すべてのトリプレットにおいてそれが成り立つことは、確率的に無いと考えられる。しかしここで導かれた結果は、それに対してやや離れた位置にあるように見える。やや離れたというのは、 \bar{N}_j は実振幅の二乗の平均量であって平均量の二乗ではないことより、 \bar{N}_j と \bar{A}_j を比べる際の困難は変わらないのだが、この結果は今扱っている変数について、積や二乗の平均量と平均量の積や二乗が全く無関係とは言えない程度の、各変数同士の「足並みのそろい」が可能性として考えられるという意味である。このことをより厳密に議論するためには、これまでとは違い、複数の時系列データの相関を調べる手法が必要となってくる。

以上の議論の逆算的な確認を紹介すると、式 (21) より、

$$\frac{\overline{N_j}}{\overline{N_{j-1}}} = \frac{\phi^{-3} + \phi^{-\frac{3}{2}} - 1}{\phi^{-\frac{3}{2}} + 1 - \phi^{\frac{3}{2}}} = \phi^{-\frac{3}{2}} \quad (24)$$

であることが分かる。実際に $|F|$ と同様にして $|\dot{N}|$ をプロットすることにより、上式の結果が確かめられた。(Fig21)

Fig22 と Fig23 はどちらも時間発展の初期を調べたものである。Fig22 を見れば分かるように、低モードではある時間が経過すると量子数が急激に増加する。数値実験によりこの経過時間と、量子数のべき則が見られるようになる時刻とはほぼ等しいことが確認されている。この時間の閾値を定めるパラメーターも一つの大きな興味であるが、もう一つここでは別に注目したいことがある。Fig23 を見れば分かるように、初期値を与えてから急激な変化が起こる前までは各位相差の時間スケールはほぼ等しいといえる。そして、重要なのは太線で挟んだ、時間の閾値に向けて雪崩れ込むような位相差の時間発展である。これが、先に言及したエネルギーの等分配に伴う時間発展初期の高モードから低モードへの量子の急激な流れを表わすものであることを示したのが Fig24, Fig25

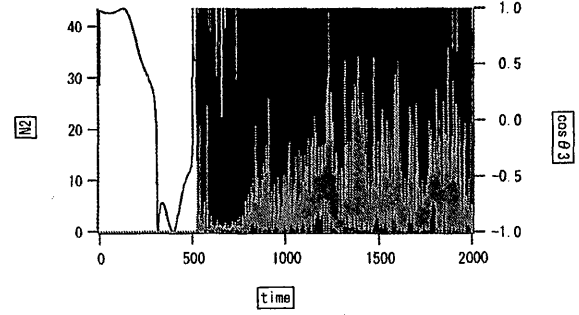


Fig. 22 Time evolution of N_2 and θ_3 in the initial stage of the system evolution.

である。Fig24 はある F_j の初期の時間発展を調べた結果であるが、高いモードでのトリプレットから連鎖的に、活発な量子流れが発生していることが分かる。以下、このような複数のトリプレット組みにまたがる連鎖的な量子流れを「ジェット」とここでは呼ぶことにする。

式 (21) より、 F_j が正の時トリプレットでは崩壊不安定性が生じていて、高モード側から低モード側へ量子は流れる (Fig26)。N40(最高モード) のみに多くの量子数を与え、その他のサイトには微小な初期条件を与えた場合の時間発展初期の様子を調べたものが Fig27 であるが、初期ジェットの起こる前のごく初期に高モードから正確に順番通りに低モードへと量子の流れが増加しているのは、各トリプレットにおける最高モードの量子数がある程度多くならないと崩壊不安定性が起こらないからである。Fig25 はこの連鎖的な量子流れと Fig22 の位相相関が対応していることを示した図である。これより、時間発展初期には広範囲のモードにわたる高モードから低モードへの連鎖的な量子流れ (ジェット) が存在し、Fig22 や Fig23 が示すように、この最も初期のジェット以降にそれぞれの要素の時間発展が特徴的になり、系に特性が表れてくることが分かる。これは正に、閉鎖系における自己組織化臨界現象であると言える。ここで重要なのは、大域的なジェットの存在である。式 (20) より F_j が正の時の $\sin \theta_j$ は正であるので、初期ジェットの際は各トリプレット間の位相差が連鎖的に 90 度になることが分かる。つまり、大域的なジェットも相互作用と位相差との非常に強い相関の結果生じたということが出来る。

4. 結論

今報告の主題における重要な結論は以下の二点である。

1. 3つの固有モードが非線形相互作用するトリプレットにおいては、モード間の相互作用 (F) の状態が活性であるか停滞しているかは、位相差と位相差の時間変化を調べることにより明らかになる。ただし、保存量 $|C_1||C_2||C_3| \cos \theta = 0$ の時はトリプレットの位

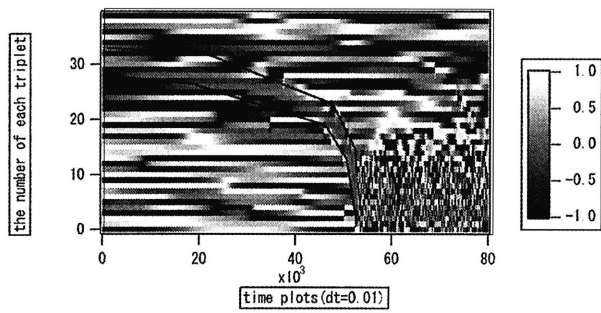


Fig. 23 Time evolution of $\cos \theta_j$ in the initial stage of the system evolution.

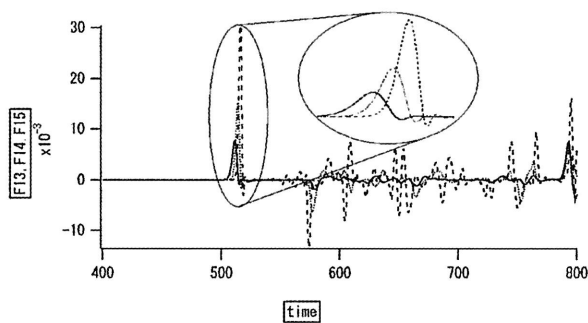


Fig. 24 Time evolution of F_{13} (thin line), F_{14} (dotted line) and F_{15} (solid line).

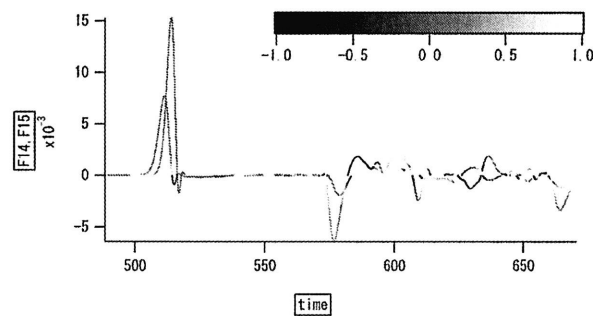


Fig. 25 Early time evolution of F_{14} and F_{15} . The part of gray lines is where $\cos \theta = 0$.

相差が一定の大きさの値を取る。

- あるトリプレットのモード間に位相相関が生じている時、そのトリプレットの相互作用は有意である事が分かった。さらに、系を構成するサブシステム（この場合トリプレット）間で雪崩（連鎖）的な相関が生じた結果、系が臨界自己組織化することが確認された。それは、3波共鳴組多体系が単体トリプレットとは異なり階層性を持った系であるため（∵各固有モード（要素）<各トリプレット（部分）<系全体、系の状態は各要素の状態に左右され、また各要素の状態も系の状態にも大きく左右される、ということ

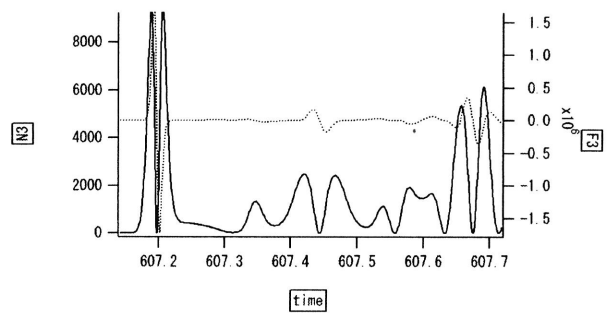


Fig. 26 Early time evolution of N_3 and F_3 .

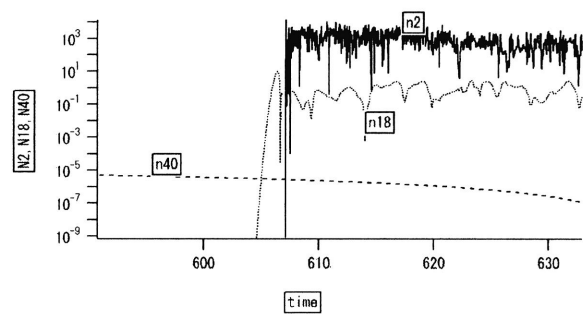


Fig. 27 Early time evolution of 2, 18 and 40.

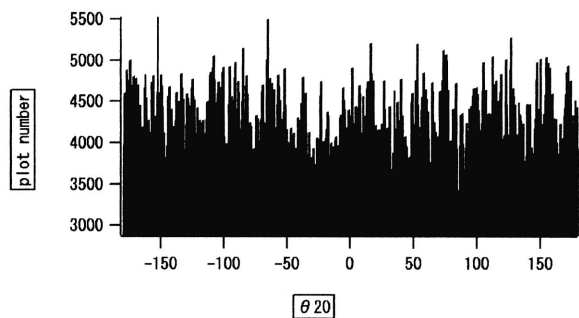


Fig. 28 The histogram of 19 in the case of the static steady state. Time evolution of θ_j takes all values equally.

の顕れである。そのような非線形系の各要素や各部分の状態が、互いの相対的な関係に依存していることは明らかである。従って、系全体の特性を理解するためには要素あるいは部分全体の相関を理解することが必要であり、今回議論した系の特性をより詳細に議論するためには、時間発展の初期から統計的定常状態に至るまでの各固有モード間や各トリプレット間の相関を、量子数や量子流れ（相互作用）、位相差や位相差の時間変化（相対的状态）双方を用いて定量的に評価する必要があると言える。

1つ目の結論について少し補足しておく。単体トリプレットのような要素が直接系全体を構成しているような単純な系においては、位相差をわざわざ考えなくても時系列を見比べるだけでおおよその相互作用の状態は確認できる。しかし、過去の議論において保存量 $|C_1||C_2||C_3| \cos \theta = 0$ の場合とそのほかの場合を同一視していたように、ただ相互作用を追うだけでは系の特徴的な振る舞いを見逃してしまうというのも、ここで得られた事実である。前章でも述べたように、位相や位相差の特徴が最も分かりやすい現象も多く存在している。もし仮に、ここで扱ったトリプレットが方程式ではなく、個々のモードが振り子のように運動する現象として目の前にあったとすれば、保存量 $|C_1||C_2||C_3| \cos \theta = 0$ の場合とそれ以外の場合とは著しく異なって目に映るであろう。そして同時に、その時はどちらの場合でも量子数の時間発展の様子に差が無いことが、意外な事実として認識されると考えられる。

2つ目の結論は、最初に述べたような今モデルを複雑系の視点から見ることの重要性を示したのものである。この視点は、より複雑なモデルへと議論を進展させる際に不可欠である。また、定量的な評価の方法としては、3つ以上の時系列の相関を評価する手法の開発が必要であると考えられる。

ところで、緒言において弱乱流理論が RPA を前提としていることを述べた。今モデルにおいても Fig28 のように各トリプレットの位相差の分布は統計的定常状態においてランダムなものだったが、その時間発展は量子の流れの間欠性と表裏一体の重要な情報を含んでいた。さらに、時間発展初期には量子のジェットに伴う非常に重要な特徴を持つ位相相関が起こっていた。そのため、今回の結果は、位相の時間発展が振幅や量子数の時間発展に比べ速いために重要ではないという、従来の RPA の論拠⁹⁾ に対する部分的な反証のようにも考えられる。

5. 展望

最後に、本研究の今後の展望を簡潔に述べたいと思う。

1. 3 波共鳴組多体系における各固有モード及び各トリプレットの相関を、相関長などを用いてより定量的に調べ、系が定常状態に至る詳細な機構や定常状態における特性（間欠性等）を明確にする。
2. 今報告に用いた 3 波共鳴組多体系を開放系に拡張し、閉鎖系の場合との比較により系の特性を議論することによって、より現実の現象に近いモデルの確立を

目指す。

3. 4 波共鳴及び 4 波共鳴組多体系についても 3 波共鳴と同様の方向で議論を進める。
4. 既存の弱乱流理論について、今回と同様の立場から再考を行い、多体系モデルとの接点を明らかにする。
5. 実際の現象を説明する方程式系にみられる位相相関の機構についての、要素・部分の相対的状态と相互作用を用いたより詳細な議論を行う。

参考文献

- 1) Sagdeev, R.Z., Galeev, A.A., "Nonlinear Plasma Theory", T.M.O'NEIL and D.L. BOOK (1969).
- 2) Tanaka, M., Yokoyama, N., Fluid Dynamics Research, 34, 199-216 (2004).
- 3) Connaughton, C., Nazarenko, S., Newell, A.C., Physica D, 184, 86-86 (2003)
- 4) Galtier, S., Nazarenko, S., Newell, A.C., J. Plasma Phys. 63, 447-488 (2000).
- 5) Yoon, P.H.: Phys. Plasmas, 7, 4858 (2000).
- 6) Abarbanel, A.D.I., Rabinovich, M.I., Sushchik, M.M., "Introduction to Nonlinear Dynamics for Physics", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (1993).
- 7) 谷内俊弥, 西原功修, "非線形波動", 応用数学叢書, 岩波書店 (1978).
- 8) Wersinger, J-M., Finn, J.M., Ott, E., Phys. Rev. Lett., 44, 453 (1980).
- 9) Zakharov, V., Lvov, V., Falkovich, G., "Kolmogorov Spectra of Turbulence", Springer-Verlag (1992).
- 10) 藤坂博一, "非平衡系の統計力学", 産業図書 (1999).
- 11) 古賀, 羽田, MHD 波動間の位相相関, 総合理工学研究科報告 (2003).
- 12) 羽田亨, 複雑系としての宇宙プラズマ, スペースプラズマ研究のフロンティア, 宇宙科学研究所 (2000).
- 13) 中村量空, "複雑系の意匠", 中公新書 (1998).
- 14) 都甲潔, 江崎秀, 林健司 "自己組織化とは何か", 講談社 (1999).