九州大学学術情報リポジトリ Kyushu University Institutional Repository

3波共鳴組多体系による弱乱流モデルの解析 : 非線 形相互作用と相対的状態

成行, 泰裕 九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

羽田, 亨 九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻流体環境理工学部門

https://doi.org/10.15017/16731

出版情報:九州大学大学院総合理工学報告. 26 (2), pp.233-242, 2004-09. Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University バージョン: 権利関係:

3波共鳴組多体系による弱乱流モデルの解析: 非線形相互作用と相対的状態

成行 泰裕*^{1,†} · 羽田 亨*²

(平成 16 年 7 月 31 日 受理)

Analysis of weak turbulence model by multiply coupling triplets of eiganmodes;

nonlinear interaction between elements and the interactive states.

Yasuhiro NARIYUKI and Tohru HADA

[†]E-mail of corresponding author: nariyuki@esst.kyushu-u.ac.jp

Behavior of a nonlinear system (such as space plasma) is often discussed via evolution of eigenmodes of associated linearized system and nonlinear interactions among them. A minimum unit for representing such a nonlinear interaction is a triplet of eigenmodes, which satisfies the resonance condition. First, we discuss behaviour of a triplet in terms of "interaction (e.g. flux between the sites)" and "interactive states (e.g., phase difference among the sites)". Then we construct a simple model of weak turbulence by multiply couple such triplets. Interestingly, this simple model has a hierarchy structure which is universal to the complex systems. Numerical study shows that the system exhibits intemittency and long time evolution is controlled by self-organized criticality. We discuss these specific features of the system by invoking the concept of the "interaction" and the "interactive state".

Key words : weak turburence, nonlinear system, nonlinear interaction, interactive states, SOC(selforganized criticality), hierarchy, complex system, Alfvén waves

1. 緒 言

宇宙プラズマなどの強い非線形性を扱う分野において は、フーリエモード (線形固有モード)の重ね合わせによ り連続量を記述して、その後に元の方程式を満たすような 非線形相互作用を考慮する手法は、必ずしも基本的なア プローチでは無い.しかし、考える振動量の振幅があま り大きくない系では、非線形相互作用により影響を与え 合う線形固有モードの発展による系の記述ができる.そ のような系における相互作用の最小単位は共鳴条件を満 たす3つの固有モードの結合 (トリプレット)であるが、 個々の振動の時間スケールと振幅 (envelope)の時間発展 の時間スケールが分離できる場合には、Manley-Rowe の 関係を満たし積分可能な、振幅に対する発展方程式系が 導かれる.¹⁾

本研究では、トリプレットの組を多数連結させること により、多くの固有モードが近隣相互作用を通じて時間発 展する多自由度モデルを考え、その性質を数値的に議論 し、非線形相互作用により位相相関ないし各パラメータ の相関が生成される過程について考察した.これは、多 くの波動がフーリエ空間で近隣モードとの非線形結合に よりエネルギーのやり取りを行う、弱乱流の一つのモデ ル化であると言える.弱乱流とは有限振幅の波の重ね合 わせによる「乱れた流れ」のことであり、通常の乱流と は違い、低次の非線形相互作用が支配的な影響を及ぼす. 弱乱流理論は低次の非線形相互作用に着目し、影響の薄 い高次モードを打ち切り, 乱雑位相近似 (Random Phase Approximation; RPA) を施した決定論的な方程式に立脚 した理論である.現在でも、水波での重力波や表面張力 波,宇宙空間での Alfvén 波や Langmuir 波などの弱乱流 について様々な議論が行われている.²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾従って,言 い換えれば上記で考えるとした多自由度モデルは、弱乱 流理論において決定論的方程式に立ち入る前の運動方程 式(3波方程式;トリプレットの方程式)を,より近隣相 互作用を強く意識した周波数条件を用いてモデル化した ものであるとも言える.

地球,生命体,市場経済などに代表される複雑な系に は,いくつかの共通する特徴が存在しており,その内の 一つとして階層性が挙げられる.階層性とは,系の基本

^{*1} 総合理工学府 大気海洋環境システム学専攻修士課程

^{*2} 総合理工学研究院 流体環境理工学部門

要素がその系を直接構築するのではなく,要素は支配法 則の異なる部分(共同体,サブシステム)をいくつか構成 し,それらが系全体を組み上げるという特性であり,階 層性を持つ複雑な系の要素や部分はそれぞれが互いに相 互作用をしていて,それらの相互作用は位相差などで表 象される「相対的状態」に大きく影響を受けている.こ れは要素に拠る系の特性の創発であるとも言える.この ことは、上記のような単純な非線形多体系モデルにおい ても見られる複雑系の基本的な特性である.¹³⁾¹⁴⁾

今報告の主題は2つで、1つは今まであまり議論され てこなかった各モード間の位相差と振幅の相関から判明 したトリプレットの非線形相互作用の詳細な働きの解明 であり、もう1つは先に述べたような多体系モデルにお ける個々のモードの時間発展が間欠的であること、エネ ルギー分布がべき乗側に収束すること(臨界自己組織化) など、少数自由度の場合とは著しく異なる振る舞いの個々 の要素(固有モード)及び部分(トリプレット)間の「相 互作用」及び「相対的状態」を用いての理解である.

さらに、トリプレットに減衰・成長の項を加えた開放系 での議論や、4つの固有モードの結合についてのトリプ レットと同様の議論についても少しだけ経過報告を行う。

2. 理論モデルと計算機実験

2.1 3波共鳴

3波共鳴モデル (Fig1) は、非線形相互作用を行う最 も基本的な要素として、様々な現象に関与することが知 られている。宇宙プラズマ中の Alfvén 波動の崩壊不安定 は、その一例であり、背景磁場に平行伝播する有限振幅 Alfvén 波 (添え字3)が、反対方向に伝播する Alfvén 波 (1) と音波 (2) に崩壊すること (またはその逆過程) を表 わすモデルとして、以下の方程式系を考えることができ る。¹⁾

$$\dot{C}_1 = -iC_2^*C_3 \tag{1}$$

$$\dot{C}_2 = -iC_1^*C_3 \tag{2}$$

$$\dot{C}_3 = -iC_1C_2 \tag{3}$$

ここで C_i は規格化された複素振幅, \cdot (ドット) は時間 微分, *は共役な複素数を, i は虚数単位を表わす.上の 3 波方程式は各モードの周波数 ω についての共鳴条件,

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \tag{4}$$

を用いて導出される.この方程式系は先にも述べたとお り,可積分系である.そのことは以下のように示される. 上式において,量子力学とのアナロジーから「量子の数 (quanta)」(作用)

$$N_j = |C_j|^2 \tag{5}$$



Fig. 1 The triplet, the fundamental element of three nonlinearly interacting eigenmodes. Frequencies of the eigenmodes, ω_1 , ω_2 , and ω_3 satisfy the resonance condition, $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$.

を導入すると、各量子数を時間微分することにより、簡 単に以下の Manley-Rowe の関係式が示される.

$$N_1 + N_3 = const \tag{6}$$

$$N_1 - N_2 = const \tag{7}$$

量子力学の言葉を用いれば、上の保存則は次のように解 釈が出来る.⁷⁾ ω_3 の量子が消滅して $\omega_1 \ge \omega_2$ の量子が出 来る. ($\Delta n_3 = -1, \Delta n_1 = \Delta n_2 = 1$) この過程はあたか も1つの粒子が2つの粒子に崩壊するのと同じように見 える. このため、モード3によるモード1、2の励起を 崩壊不安定性とも呼ぶ.

さらに複素振幅を実振幅 A_j と位相 ϕ_j の積に分けると すると $(N_j = A_j \exp(i\phi_j))$,位相差 $\theta = \phi_3 - \phi_2 - \phi_1$ と A_j について以下の関係式が成立する.

$$\dot{\theta} = -(\frac{A_1A_2}{A_3} - \frac{A_2A_3}{A_1} - \frac{A_3A_1}{A_2})\cos\theta \qquad (8)$$

$$= \cot\theta \frac{d}{dt} \log(|C_1||C_2||C_3|) \tag{9}$$

上式を積分して以下の保存則が得られる.

$$|C_1||C_2||C_3|\cos\theta = const \tag{10}$$

式(1)-(3)は、それぞれが複素振幅に対する発展方程 式であり、自由度は6であるように見えるが、これらを 実振幅と位相に対する式の形に書きかえると、実は A₁, A₂, A₃ および位相差 θ の 4 変数に対する発展方程式系 である。これらに対し、保存量が(6),(7),および(10)で 与えられるため、残りの1自由度を求積で求めることが でき、つまりこの方程式系は可積分系であることがわか る。¹⁾実際、どのような初期条件に対しても、厳密解は楕 円関数で与えられる。しかし物理的な観点から考えると、 この系は各モードの初期条件の大小関係により、系が安 定か不安定かの違いが生じる.系が安定な時は、揺らぎ 程度の量子数のやり取りしかない。これは崩壊不安定性 が生じているか否かであり、系全体のエネルギーの保存 から導き出される結論である.



Fig. 2 Time evolution of N_j with the initial condition, $N_3 >> N_1, N_2$. The system is 'unstable' in that the 'quanta' originally stored in mode 3 are redistributed to modes 1 and 2 within an instability time scale (20).



Fig. 3 Same as Figure 2 except that the initial condition here is $N_2 >> N_1, N_3$. The system is 'stable' in that the values of N_1, N_2 , and N_3 do not evolve drastically.

2.2 3波共鳴組多体系 (閉鎖系)

トリプレットの組を多数連結したモデル(3波共鳴組 多体系)を考える。結合の方法にはいろいろなヴァリエー ションが考えられるが、ここでは各モード間の周波数関 係が一意的に決まるような連結モデル(Fig4)を考える ことにする。後に示すように、この場合には時間発展の 結果として秩序が生じた.

このモデルの周波数関係は,

$$\omega_{j+2} = \omega_{j+1} + \omega_j \tag{11}$$

$$\omega_j \propto \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j \tag{12}$$

を満たす. つまり $\omega_1 \ge \omega_2$ が両方ともゼロでない限り、 ω_i はフィボナッチ数列になる.

単体トリプレットの3波方程式を各周波数関係につい て考えることで、この場合の多体3波方程式 (multiple three wave equation;M3W) が以下のように書けること が分かる.

$$\dot{C}_{j} = -iC_{j-1}^{*}C_{j+1} - iC_{j+1}^{*}C_{j+21} - iC_{j-2}C_{j-1}(13)$$



Fig. 4 The multiply-coupled triplet model considered in the present paper. The resonance condition gives the Fibonacci sequence, $\omega_{j+2} = \omega_{j+1} + \omega_j$.

さらにトリプレットの時と同様にして $N_j = A_j \exp(i\phi_j)$ とおいて,各結合間の位相差を $\theta_j = \phi_j - \phi_{j-1} - \phi_{j-2}$ とすると,

$$\dot{N}_{j} = 2A_{j+2}A_{j+1}A_{j}\sin\theta_{j+2} + 2A_{j+1}A_{j}A_{j-1}\sin\theta_{j+1} - 2A_{i}A_{i-1}A_{i-2}\sin\theta_{i}$$
(14)

となり,これの左辺について全モードについての和を取 ると,

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{N}_{j} = \sum_{j=1}^{k-2} 2A_{j+2}A_{j+1}A_{j}\sin\theta_{j+2} \qquad (15)$$

が成立する.また,このモデルは外部とのエネルギーのやり取りの無い閉鎖系なので, $\sum_{j=1}^{n} \omega_j N_j = const$ である.

- 2.3 トピックス
- 2.3.1 3 波共鳴組多体系 (開放系)

現実の現象を説明するモデルを考える上で,開放系で の議論に移行することは自然な流れである.減衰・成長項 と共鳴条件の誤差の項を考慮したトリプレットの系では, カオス的な挙動を示すことが解っている.⁸⁾多体系の場合 では,それらの項の効果は後ほど述べる各モードのエネ ルギーと周波数の間に成り立つべき側の指数に現れるこ とが期待される.このことは次章の考察で詳しく触れる.

2.3.2 4 波共鳴組多体系

水面重力波など,分散関係によって4波共鳴が支配的 である弱乱流現象も多数存在する.それ故,4波共鳴に よる議論も同様に必要であると言える.また,3波共鳴 とは違い数種類の4波共鳴の型が考えられ,より多様な モデルを考えることが出来る.

3. 計算結果・考察

3.1 3波共鳴

前章で述べたとおり、トリプレットは可積分系であり、 初期値によって系の安定性が違っていた.ここでは、位 相差 $\theta = \phi_3 - \phi_2 - \phi_1$ の時間発展の数値的な議論により、 この非線形相互作用の振る舞いの重要な特性を明らかに していく. 因みに、非線形相互作用をする系においてモード間の 位相相関(位相差等)を考えることは重要であると言える. 非線形性の強い系では位相相関が実際の物理量や物理現 象と密接に関係しているため準線形の枠組みでは扱えな いことが明らかになっていることや,壁にかかった振り子 時計の弱い非線形相互作用による同期(位相が揃うこと), 蛍の発光や心筋細胞の同期というような位相差に特徴を 持つ現象が身近な例として存在していることなど,その 指向性を支持する理由は多く存在する.また,自己相似 性を持つ非線形系では統計的定常状態において固有モー ドの大きさがべき乗則に従う(自己組織化臨界現象)が, そのような系であっても位相相関がある場合と無い場合 とではそれに対応する空間的・図形的な性質が大きく異 なっていることも分かっている.¹¹⁾¹²⁾

さて,量子数の流れ (フラックス)Fを, Manley-Rowe の関係式 ((6),(7)) を踏まえて

$$F = \dot{N}_1 = \dot{N}_2 = -\dot{N}_3 = 2A_3A_2A_1\sin\theta \qquad (16)$$

と定義する.以下ではトリプレットにおけるモード間の 非線形相互作用の特性を詳しく調べるため、この F と 位相差 θ との関係を調べる.この時,各量子数の初期値 が0より大きい場合とそうでない場合、つまり一つでも 量子数の初期値が0のモードがある場合とでは位相差θ の値と時間発展は大きく異なっている. それは, 保存量 $|C_1||C_2||C_3|\cos\theta = D_0 = const$ において、一つでも量 子数の初期値が0であった場合には、この保存量の値は 0であることによる、今までの3波共鳴の研究でも明ら かにされているように、初期値の一つが0であっても、 量子数の時間変化においては一般性を失うこと無く他の 場合と同じように議論することが出来る. このことは, $|C_1||C_2||C_3|$ の項がこの場合でも時間変化をすることを 表わしており、これより $\cos\theta = 0$ であることが新たに分 かる.この場合の量子数と位相差の時間発展を数値計算 した結果が Fig5 である.極値の度に位相が180度ず つ変化しているのは、極値において量子数の流れの方向 が反転しているからである.

次に、量子数の初期値がどのモードにおいても0を取 らない場合について考える.この時、位相差 $\cos\theta$ の初期 値が0で無い場合は保存量 $D_0 = const \neq 0$ なので、量 子数の流れは D_0 を用いて、

$$F = 2D_0 \tan \theta \tag{17}$$

と表わせる. これより, *F* が有限の値を取るためには - $\pi/2 < \theta < \pi/2$ という条件が必要である. この条件は 保存量の式からも明らかである. さらに,式(17)から は θ が - $\pi/2$ 又は $\pi/2$ に近い時は*F* は大きく,反対に $\theta = 0$ の時 *F* = 0 である (*Fig*6).

この場合の量子数と位相差の時間発展を表わす Fig7, Fig8 において, θの時間変化に緩急の特徴が見られるこ



Fig. 5 Time evolution of N_1 , N_2 , N_3 , and θ for the case that $|C_1||C_2||C_3|\cos\theta = 0$



Fig. 6 Relation between $\cos \theta$ versus dN3(=-F).



Fig. 7 Time evolution of quanta(wave action) and $\cos \theta$: Unstable case.

とに注目したい. 量子数が極値に近づくにつれ, θ の時 間変化の量は増大するように見える. (*Fig*7, *Fig*8 では 簡単のために $\cos\theta$ を用いた.) このことを詳細に見る ために $\dot{\theta}$ の時間発展と量子数の時間発展を調べたものが *Fig*9, *Fig*10 である.

この図より,量子数が極値を取る時 $\dot{\theta}$ は大きなピーク を取り,さらにモード間で量子数のやり取りが盛んで系 が不安定な場合は,極小値では極大値よりもはるかに大 きなピークが現れていることが分かる.*Fig*9 の量子数は モード3のものであるので,モード1,2の場合はモー ド3とは逆に極大値に大きなピークを持つ.この $\dot{\theta}$ と*F*



Fig. 8 Time evolution of quanta and $\cos\theta$; Stable.



Fig. 9 Time evolution of quanta and $\dot{\theta}$, when system is unstable and $|C_1||C_2||C_3|\cos\theta \neq 0$



Fig. 10 Time evolution of quanta and $\dot{\theta}$, when system is stable and $|C_1||C_2||C_3|\cos\theta \neq 0$

の関係を、より分かりやすく示したものが Fig11 である. 時間発展で見たのと同じように,極値 (F = 0) において $\dot{\theta}$ は大きなピークを持ち,同時に $\dot{\theta}$ の非常に小さな時に |F| は大きな値を取ることが確認できる.これは,時間発 展を改めて見ても確認できることである.

以上をまとめると、F = 0, $\theta = 0$, 反対に θ が $\pm \pi/2$ に近づくにつれて |F| は最大に近づき,位相差の時間変 化も緩やかになるといえる.つまり、位相差の時間変化 が小さい時には各モード間の相互作用が強く盛んに量子 をやり取りし、逆に位相差に時間変化が大きい時には各 モード間の相互作用が弱く量子のやり取りが少ないこと



Fig. 11 Relation between $\dot{\theta}$ and F for a (single) triplet. The exchange of quanta between the sites is enhanced when the relative phase is approximately constant in time, while the exchange of quanta is reduced when the relative phase varies rapidly.



Fig. 12 Time evolution of N2 for the multiply-coupled model.

が分かる.また、位相差 $\cos\theta$ の初期値が0の時は、量子数の初期値が0であった場合と同様の議論が成り立ち、 この場合も $\cos\theta = 0$ が常に成立する.

3.2 3波共鳴組多体系

次に、多体系モデルの考察を行う. Fig12-14 はラン ダムな初期条件を与えた系の時間発展を数値的に解いた 結果である. これを見ると、まず低モードにおいては時 間発展が速いのに対し、高モードにおいては時間発展が 緩やかである.

さらに, Fig12 - 14 において初期の頃では,大きい モード番号 (サイト)から小さいモード番号に量子が流れ ている.これは、Fig15(定常状態における各モードの量 子数を対数スケールでプロットしたグラフ)より、十分に 時間が経過した後の統計的定常状態において、各モード にエネルギーが等分配されていることが示されることか ら裏付けられる.それは次のように示される.

Fig15から、べき指数 (対数スケールの直線の傾き) は 以下のように求まる.(時間平均量を \hat{X} とおく.)

$$\log \bar{N}_j \propto -\frac{1}{5}j \tag{18}$$

j はモード番号である. つまり Fig15 の横軸はフィボナッ



Fig. 13 Time evolution of N19 for the multiply-coupled model.



Fig. 14 Time evolution of N38 for the multiply-coupled model.

チ数での対数スケールとなっているので、これを縦軸と同 じ常用対数のスケールに直すと、 $\bar{N}_j \propto \omega_j^{-\beta} \Rightarrow \log \bar{N}_j \propto -j\beta \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \beta \approx 1$ としてべきの指数 β が求まる. これにより、統計的定常状態においてこの系ではエネル ギーの等分配が生じていることが確認できる.これは、 $\bar{N}_j \propto \omega_j^{-\beta} \Rightarrow \bar{N}_j \omega_j (= energy) = const$ より、閉鎖系の エネルギー保存からの帰結とも言える.

少し横道に逸れるが、系を開放形にした際に予想され るエネルギー分布について少し述べたいと思う. 閉鎖系 においては、先に示したようにエネルギーの等分配が見 られた.これは系が熱平衡状態に落ち着いたことを意味 している.このような熱平衡状態においては、系の発展 期において見られたような大域的なエネルギーの流れは 時間平均をすれば存在せず、統計的には要素間の詳細な 釣り合いが成立しているといえる.しかし,系が開放系 の場合、長時間発展の後に、その系が落ち着くのは熱平 衡状態ではなく非平衡な統計的定常状態である.開放系 の場合には、統計的定常状態とは流出入の大域的な釣り 合いが取れたに過ぎず、詳細な釣り合いは存在していな い. これより, 開放系の場合は統計的定常状態において は定常的な量子の一様流れが存在し, エネルギーは等分 配ではなくべき則に従うと考えられる.また, Fig15の ようなべき則分布は、SOC(自己組織化臨界現象)の表



Fig. 15 Plot of N_j versus the site number, j, when the system is considered to be in the statistical equilibrium. Note that the vertical axis is in logarithmic scale, while the horizontal axis is in linear scale. However, since ω_j is approximately proportional to the *j*-th power of the 'golden number' (c.f., eq.(12)), the plot suggests that N_j is given as a power law in terms of ω_j . The power law index turns out to be -1, implying that the energy equi-partition is attained at the statistical equilibrium state.



Fig. 16 Density plot of $\cos \theta_j$ versus time, when the system is in the statistical equilibrium. Notice sporadic change of the relative phase (θ) often occurs simultaneous at several neighbouring sites.

れであるとも考えられる. 臨界現象であることは, べき 乗関数がスケール普遍な, 臨界状態である系のもつフラ クタル性の数式表現であることから確認される. ただし, この系は閉鎖系であるため, 厳密な意味での自己組織化 現象ではない.¹⁰⁾

次に, 3波間位相差

$$\theta_j = \phi_j - \phi_{j-1} - \phi_{j-2} \tag{19}$$

についての時間発展を見る. *Fig*16 から分かるように, 位 相差も振幅と同じく, 高モードではゆっくりと, 低モー ドでは速く時間変化をする. ただし, 多体系の場合は単 体トリプレットの時のような θ の条件は無く, 周期性も 無い.

また,位相差の時間変化の時間発展を示したものが Fig17 である.これより,単体トリプレットで見られた 停滞期と活性期が多体系においても,非周期的にではある



Fig. 17 Time evolution of $\dot{\theta}_{19}$.



Fig. 18 Time evolution F_{19} and $\dot{\theta}_{19}$ when the system is in the statistical equilibrium.

が見られることが分かる.この間欠的な時間発展も,近 隣モード間の量子数の受け渡しにと関連付けて議論され るべき現象であると考えられる.ここでも,量子の流れ

$$F_j = 2A_j A_{j-1} A_{j-2} \sin \theta_j \tag{20}$$

を導入する. すると, N_jは,

$$\dot{N}_j = F_{j+2} + F_{j+1} - F_j \tag{21}$$

と表わせる.上式より,面白いことが分かる. Fig18 は, あるモードの \dot{N}_j と F_j の時間発展のグラフである.これ から、両者は対称的,すなわち \dot{N}_j の式の右辺において は F_j が支配的であることが分かる.これは,式 (20) か ら分かるように, F_j は F_{j-1} に比べ大きいためであると 考えられるが,これは後ほど述べるように簡単な問題で はない. F_j について考察する上で,以降では固有モード の連結モデルというより,トリプレットの連結モデルと いう意識を強く持って話を進める.

Fig19は、 F_j に対する $\dot{\theta}_j$ の図である。単体トリプレットのときと同じように、F = 0付近で位相差の時間変化が急激に大きくなっていることが分かる。これに加えて式 (20)からF = 0の時、 $\theta = \pm n\pi(n: 整数)$ であるといえる。さらに、定常状態での $|F_j|$ を各モード間に対しプロットすると Fig20 のようなべき則に従う。



Fig. 19 Relation between F_{19} and $\dot{\theta}_{19}$. As in Figure 11, here it is seen again that the exchange of quanta between the sites is enhanced (reduced) when the relative phase is almost constant (varies rapidly) in time.



Fig. 20 Time average of $|F_j|$ of each triplet when the system is in the statistical equilibrium.

Fig20 を θ_j の添え字と同じサイトで各トリプレットについての値を取ったグラフと考えると、べき指数は-3/2となる.これは、

$$\frac{\overline{|F_j|}}{|F_{j-1}|} = \frac{\overline{A_j A_{j-1} A_{j-2} |\sin \theta_j|}}{A_{j-1} A_{j-2} A_{j-3} |\sin \theta_{j-1}|} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$
(22)

ということであるが、 $N_i \ge N_{j-3}$ の関係より、

$$\sqrt{\frac{\overline{N_j}}{\overline{N_{j-3}}}} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \phi^{-\frac{3}{2}}$$
(23)

が言える.確かに,隣り合うトリプレットにおける位相差 の平均値の大きさはほぼ近い値であることは計算機実験 で確かめられるが,この一致にはそれだけではない,よ り慎重な吟味が必要であるように思われる.まず,各量 子数 (あるいは実振幅) は統計的定常状態において,平均 値のまわりを微小に振動している量ではなく,ある時刻 とある時刻の値を比べた場合その大きさの差が無視でき



Fig. 21 Time average of $|\dot{N}_j|$ of each triplet when the system is in the statistical equilibrium.

ない程度に大きいことは容易に確かめられる.このよう な場合において、各変数が独立に近ければ、変数の積の 平均量と変数の平均量の積とは異なる値を取る.それが 偶然同じ値を取ることがあっても、すべてのトリプレッ トにおいてそれが成り立つことは、確率的に無いと考え られる.しかしここで導かれた結果は、それに対してや や離れた位置にあるように見える.やや離れたというの は、 \bar{N}_j は実振幅の二乗の平均量であって平均量の二乗で はないことより、 \bar{N}_j と \bar{A}_j を比べる際の困難は変わらな いのだが、この結果は今扱っている変数について、積や 二乗の平均量と平均量の積や二乗が全く無関係とは言え ない程度の、各変数同士の「足並みのそろい」が可能性 として考えられるという意味である.このことをより厳 密に議論するためには、これまでとは違い、複数の時系 列データの相関を調べる手法が必要となってくる.

以上の議論の逆算的な確認を紹介すると、式(21)より、

$$\frac{\dot{N_j}}{\dot{N_{j-1}}} = \frac{\phi^{-3} + \phi^{-\frac{3}{2}} - 1}{\phi^{-\frac{3}{2}} + 1 - \phi^{\frac{3}{2}}} = \phi^{-\frac{3}{2}}$$
(24)

であることが分かる.実際に|F|と同様にして $|\dot{N}|$ を プロットすることにより、上式の結果が確かめられた. (*Fiq*21)

Fig22 と Fig23 はどちらも時間発展の初期を調べたも のである. Fig22 を見れば分かるように,低モードでは ある時間が経過すると量子数が急激に増加する.数値実 験によりこの経過時間と,量子数のべき則が見られるよ うになる時刻とはほぼ等しいことが確認されている.こ の時間の閾値を定めるパラメーターも一つの大きな興味 であるが,もう一つここでは別に注目したいことがある. Fig23 を見れば分かるように,初期値を与えてから急激 な変化が起こる前までは各位相差の時間スケールはほぼ 等しいといえる.そして,重要なのは太線で挟んだ,時間 の閾値に向けて雪崩れ込むような位相差の時間発展であ る.これが,先に言及したエネルギーの等分配に伴う時 間発展初期の高モードから低モードへの量子の急激な流 れを表わすものであることを示したのが Fig24, Fig25



Fig. 22 Time evolution of N_2 and θ_3 in the initial stage of the system evolution.

である. Fig24 はある F_i の初期の時間発展を調べた結 果であるが,高いモードでのトリプレットから連鎖的に, 活発な量子流れが発生していることが分かる.以下、こ の様な複数のトリプレット組みにまたがる連鎖的な量子 流れを「ジェット」とここでは呼ぶことにする。

式(21)より, F_iが正の時トリプレットでは崩壊不安 定性が生じていて,高モード側から低モード側へ量子は 流れる (Fig26). N40(最高モード) のみに多くの量子数 を与え、その他のサイトには微小な初期条件を与えた場 合の時間発展初期の様子を調べたものがFig27であるが ,初期ジェットの起こる前のごく初期に高モードから正 確に順番通りに低モードへと量子の流れが増加している のは、各トリプレットにおける最高モードの量子数があ る程度多くならないと崩壊不安定性が起こらないからで ある.Fig25はこの連鎖的な量子流れとFig22の位相相関 が対応していることを示した図である.これより,時間 発展初期には広範囲のモードにわたる高モードから低モ ードへの連鎖的な量子流れ (ジェット) が存在し,Fig22や Fig23が示すように、この最も初期のジェット以降にそれ ぞれの要素の時間発展が特徴的になり、系に特性が表れ てくることが分かる.これは正に、閉鎖系における自己 組織化臨界現象であると言える. ここで重要なのは、大 域的なジェットの存在である.式(20)よりFiが正の時の $\sin \theta_j$ は正であるので、初期ジェットの際は各トリプレッ ト間の位相差が連鎖的に90度になることが分かる.つ まり、大域的なジェットも相互作用と位相差との非常に強 い相関の結果生じたということが出来る.

4. 結論

今報告の主題における重要な結論は以下の二点である.

3つの固有モードが非線形相互作用するトリプレットにおいては、モード間の相互作用 (F)の状態が活性であるか停滞しているかは、位相差と位相差の時間変化を調べることにより明らかになる.ただし、保存量 |C₁||C₂||C₃| cos θ = 0の時はトリプレットの位



Fig. 23 Time evolution of $\cos \theta_j$ in the initial stage of the system evolution.



Fig. 24 Time evolution of F_{13} (thin line), F_{14} (dotted line) and F_{15} (solid line).



Fig. 25 Early time evolution of F_{14} and F_{15} . The part of gray lines is where $\cos \theta = 0$.

相差が一定の大きさの値を取る.

あるトリプレットのモード間に位相相関が生じている時、そのトリプレットの相互作用は有意である事が分かった。さらに、系を構成するサブシステム(この場合トリプレット)間で雪崩(連鎖)的な相関が生じた結果、系が臨界自己組織化することが確認された.それは、3波共鳴組多体系が単体トリプレットとは異なり階層性を持った系であるため(∵各固有モード(要素)<各トリプレット(部分)<系全体)、系の状態は各要素の状態に左右され、また各要素の状態も系の状態にも大きく左右される、ということ



Fig. 26 Early time evolution of N_3 and F_3 .



Fig. 27 Early time evolution of $_2$, $_{18}$ and $_{40}$.



Fig. 28 The histgram of $_{19}$ in the case of the statical steady state. Time evolution of θ_j takes all values equally.

の顕れである.そのような非線形系の各要素や各部 分の状態が,互いの相対的な関係に依存しているこ とは明らかである.従って,系全体の特性を理解する ためには要素あるいは部分全体の相関を理解するこ とが必要であり,今回議論した系の特性をより詳細 に議論するためには,時間発展の初期から統計的定 常状態に至るまでの各固有モード間や各トリプレッ ト間の相関を,量子数や量子流れ(相互作用),位相 差や位相差の時間変化(相対的状態)双方を用いて定 量的に評価する必要があると言える.

1 つ目の結論について少し補足をしておく、単体トリプ レットのような要素が直接系全体を構成しているような単 純な系においては、位相差をわざわざ考えなくても時系列 を見比べるだけでおおよその相互作用の状態は確認できる. しかし、過去の議論において保存量 $|C_1||C_2||C_3|\cos\theta = 0$ の場合とそのほかの場合を同一視していたように、ただ 相互作用を追うだけでは系の特徴的な振る舞いを見逃し てしまうというのも、ここで得られた事実である. 前章 でも述べたように、位相や位相差の特徴が最も分かりや すい現象も多く存在している.もし仮に、ここで扱ったト リプレットが方程式ではなく、個々のモードが振り子の ように運動する現象として目の前にあったとすれば、保 存量 $|C_1||C_2||C_3|\cos\theta = 0$ の場合とそれ以外の場合とで は著しく異なって目に映るであろう.そして同時に、そ の時はどちらの場合でも量子数の時間発展の様子に差が 無いことが、意外な事実として認識されると考えられる.

2つ目の結論は、最初に述べたような今モデルを複雑 系の視点から見ることの重要性を示したものでもある.こ の視点は、より複雑なモデルへと議論を発展させる際に 不可欠である.また、定量的な評価の方法としては、3 つ以上の時系列の相関を評価する手法の開発が必要であ ると考えられる.

ところで,緒言において弱乱流理論が RPA を前提と していることを述べた.今モデルにおいても Fig28 のよ うに各トリプレットの位相差の分布は統計的定常状態に おいてランダムなものだったが,その時間発展は量子の 流れの間欠性と表裏一体の重要な情報を含んでいた.さ らに,時間発展初期には量子のジェットに伴う非常に重 要な特徴を持つ位相相関が起こっていた.そのため,今 回の結果は,位相の時間発展が振幅や量子数の時間発展 に比べ速いために重要ではないという,従来の RPA の 論拠⁹⁾に対する部分的な反証のようにも考えられる.

5. 展望

最後に、本研究の今後の展望を簡潔に述べたいと思う.

- 3 波共鳴組多体系における各固有モード及び各トリ プレットの相関を、相関長などを用いてより定量的 に調べ、系が定常状態に至る詳細な機構や定常状態 における特性(間欠性等)を明確にする。
- 2. 今報告に用いた3波共鳴組多体系を開放系に拡張し、 閉鎖系の場合との比較により系の特性を議論することによって、より現実の現象に近いモデルの確立を

目指す.

- 3.4 波共鳴及び4 波共鳴組多体系についても3 波共鳴 と同様の方向で議論を進める.
- 既存の弱乱流理論について、今回と同様の立場から
 再考を行い、多体系モデルとの接点を明らかにする.
- 5. 実際の現象を説明する方程式系にみられる位相相関の機構についての、要素・部分の相対的状態と相互作用を用いたより詳細な議論を行う。

参考文献

- Sagdeev,R.Z., Galeev,A.A., "Nonlinear Plasma Theory",T.M.O'NEIL and D.L.BOOK (1969).
- 2) Tanaka, M., Yokoyama, N., Fluid. Dynamics. Research, 34, 199-216 (2004).
- 3) Connaughton, C., Nazarenko, S., Newell, A.C., Physica. D, 184, 86-86 (2003)
- 4) Galtier, S., Nazarenko, S., Newell, A.C., J.Plasma Phys.63,447-488(2000).
- 5) Yoon, P.H.: Phys. Plasmas, 7, 4858 (2000).
- Abarbanel, A.D.I., Rabinovich, M.I., Sushchik, M.M., "Introduction to Nonlinear Dynamics for Physics", World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd(1993).
- 7) 谷内俊弥,西原功修,"非線形波動",応用数学叢書,岩波 書店 (1978).
- Wersinger, J-M., Finn, J.M., Ott, E., Phys.Rev.Lett.,44,453(1980).
- Zakharov, V., Lvov, V., Falkovich, G.:, "Kolmogorov Spectra of Turbulence", Springer-Verlag (1992).
- 10) 藤坂博一,"非平衡系の統計力学",産業図書 (1999).
- 古賀,羽田,MHD波動間の位相相関,総合理工学研究科 報告 (2003).
- 12) 羽田亨, 複雑系としての宇宙プラズマ, スペースプラズマ 研究のフロンティア, 宇宙科学研究所 (2000).
- 13) 中村量空," 複雑系の意匠",中公新書 (1998).
- 14) 都甲潔, 江崎秀, 林健司"自己組織化とは何か", 講談社 (1999).