

準地衡流乱流におけるエントロピー時間変化

伊賀, 啓太

九州大学応用力学研究所 | 九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

<https://doi.org/10.15017/16720>

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 26 (1), pp.23-26, 2004-06. Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

バージョン：

権利関係：



準地衡流乱流におけるエンストロフィー時間変化

伊賀 啓太^{*1,†}

(平成16年3月31日 受理)

Time Evolution of Enstrophy in Quasi-Geostrophic Turbulence

Keita IGA

[†]E-mail of corresponding author: iga@riam.kyushu-u.ac.jp

Time evolution of enstrophy inside coherent vortex region of the turbulence described by quasi-geostrophic equation (also called Charney-Hasagawa-Mima equation as an equivalence) is investigated. There are two expressions for the enstrophy, and these expressions give different values if the amounts inside the coherent vortex region are considered, and the difference between them becomes large as the coherent vortices grow with time. However, when the scale becomes large enough compared with the Rossby's radius of deformation, the exponents expressing the time dependence approach the same value. The difference of the exponents found by Watanabe et al. (1998) is the behavior at the transient state.

Key words : *Quasi-Geostrophic Turbulence, Scaling, Enstrophy, Coherent Vortex, Upward Cascade*

1. はじめに

大気や海洋のスケールの大きな運動は、準2次元的な性質を持ち、準地衡流方程式でよく表される。この準地衡流方程式で記述される準地衡流乱流はエネルギーが大スケールにアップワードカスケードするなど2次元乱流と定性的には似た性質を持っているが、その速さなど定量的に見ると違いもある。

準地衡流乱流のスケールリング則について調べた研究に Watanabe et al. (1997, 1998)^{1,2)} がある。準地衡流乱流のエネルギー・スペクトルが従う冪乗則をスケールリング理論によって求め、数値計算によって検証している。彼らは同時に、このような準地衡流乱流を、渦どうしの相互作用・統合の観点から見直してこのスケールリング則を導出する試みも行っている。その議論において、個々のコヒーレント渦を特徴づける量として渦の領域内でのエネルギーやエンストロフィーを考えているが、その際、エネルギーやエンストロフィーを表す表式の選択が問題となる。というのは、全領域でこれらの積分すればどのような表式を用いても同じ値となるが、有限領域内で考えると選んだ表式によって値が異なってしまうのである。

Watanabe et al. (1998)²⁾ は、数値計算において、異なる表式のエネルギーやエンストロフィーのコヒーレント渦領域内での値の振舞いの違いを調べている。時間が経って渦を特徴づける波数がロスビー変形半径の逆数(以降 λ と表す)より十分小さくなると、コヒーレント渦領域内

にあるエネルギーを表す2つの表式 $\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_2$ (詳しい定義は第3節を参照)に関しては、両者の値の差は小さくなる。一方、エンストロフィーを表す2つの表式 $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{Q}_2$ の方は、両者の差は大きくなる。彼らの数値計算の結果では、十分な時間が経った場合には時間変化の冪の値も異なっていて、これを上記の $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{Q}_2$ の差が大きくなることで説明している。ところが後で述べるように、この解釈は相似性の議論をよく考えると矛盾する点があるのである。そこで本稿では、波数が小さくなった時に $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{Q}_2$ の時間変化の関係が実際にはどのようなようになるかについて調べた結果を述べる。

2. 基礎方程式・エネルギー・エンストロフィー

ここで考える系を表す方程式は準地衡流渦位方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi - \lambda^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi) = 0 \quad (1)$$

である。ここで ψ は流線関数、 λ はロスビー変形半径の逆数を表す。

準地衡流系では、

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\equiv \frac{1}{L^2} \iint \frac{1}{2} [-\psi \nabla^2 \psi + \lambda^2 \psi^2] dx dy \\ &= \frac{1}{L^2} \iint \frac{1}{2} [(\nabla \psi)^2 + \lambda^2 \psi^2] dx dy, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &\equiv \frac{1}{L^2} \iint \frac{1}{2} [(\nabla^2 \psi)^2 - \lambda^2 \psi \nabla^2 \psi] dx dy \\ &= \frac{1}{L^2} \iint \frac{1}{2} [(\nabla^2 \psi)^2 + \lambda^2 (\nabla \psi)^2] dx dy, \end{aligned} \quad (3)$$

*1 応用力学研究所, 大気海洋環境システム学専攻

と定義される全エネルギー $\mathcal{E}$ と全エントロピー Q が保存する.

ただし, エネルギー $\mathcal{E}$ は低波数側にエントロピー Q は高波数側に主に輸送されるために,³⁾ 実際の数値計算でもエネルギー $\mathcal{E}$ がほぼ一定に留まるのに対して, Q の方は小スケール現象を平均した粗視化や小さな散逸を入れたりすることによって値が減少していく. エネルギーが最も多く含まれる渦の特徴的な波数を $k_{\max}$ と書くと, エネルギーとエントロピーの間には

$$Q \cong k_{\max}^2 \mathcal{E} \quad (4)$$

の関係があるが, スケーリング理論より $k_{\max}$ は

$$k_{\max} \propto \mathcal{E}^{-\frac{1}{8}} \lambda^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{1}{4}} \quad (5)$$

なので $\mathcal{E}$ が一定ならば, Q は

$$Q \propto \mathcal{E}^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

と, $t^{-\frac{1}{2}}$ に比例して小さくなっていくことになる. 実際の数値計算での全エネルギーの減衰を Watanabe et al. (1998)²⁾ のように

$$\mathcal{E} \propto t^{-\theta} \quad (7)$$

の形で考慮すると,

$$Q \propto t^{-\frac{2+\theta}{4}} \quad (8)$$

という時間変化をする.

3. エネルギーとエントロピーの2つの表式

(2), (3) で $\mathcal{E}$, Q を表す表式をそれぞれ2つ挙げているが, 領域全体での積分値に関してはどちらの表式を選んでも全く同じ値になる. しかし, コヒーレント渦領域内のエネルギーやエントロピーを考える場合には, 両者の値は異なったものとなる. そこで, コヒーレント渦領域のエネルギー・エントロピーを表す量として, それぞれ2つの量を定義する.

$$\mathcal{E}_1 \equiv \frac{1}{L^2} \iint_{S_{\text{coh}}} \frac{1}{2} [-\psi \nabla^2 \psi + \lambda^2 \psi^2] dx dy, \quad (9)$$

$$\mathcal{E}_2 \equiv \frac{1}{L^2} \iint_{S_{\text{coh}}} \frac{1}{2} [(\nabla \psi)^2 + \lambda^2 \psi^2] dx dy, \quad (10)$$

$$Q_1 \equiv \frac{1}{L^2} \iint_{S_{\text{coh}}} \frac{1}{2} [(\nabla^2 \psi)^2 - \lambda^2 \psi \nabla^2 \psi] dx dy, \quad (11)$$

$$Q_2 \equiv \frac{1}{L^2} \iint_{S_{\text{coh}}} \frac{1}{2} [(\nabla^2 \psi)^2 + \lambda^2 (\nabla \psi)^2] dx dy. \quad (12)$$

ただし S_{coh} はコヒーレント渦の領域を示す. S_{coh} の厳密な定義は Watanabe et al. (1998)²⁾ を参照. これらの量の定義式の被積分関数にはそれぞれ, λ^2 のかかっていない第1項目と λ^2 のかかっている第2項目の2つの項が含まれている.

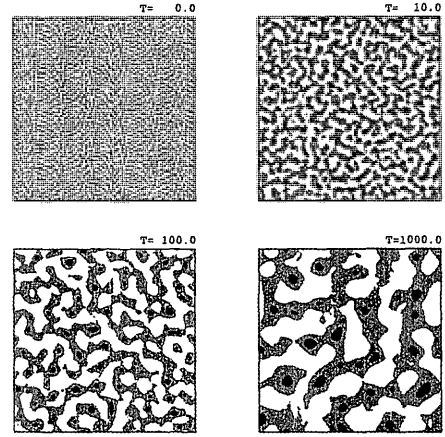


Fig. 1 Time evolution of the stream-function field calculated by numerical simulation. Owing to the energy upward cascade of quasi-geostrophic turbulence, the pattern of the field becomes large with time.

Watanabe et al. (1998)²⁾ の議論は以下のようなものである. 波数が λ に比べて十分小さくなると第1項は小さくなり, λ^2 のかかっている第2項に比べて無視できるようになる. $\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_2$ は第2項目が同じ形をしているために両者の値は近付いてくるが, Q_1 と Q_2 とは第2項目が異なる表現を持つために, その差は大きくなっていく. 彼らの数値実験によると, Q_1 と Q_2 は異なる冪乗に従って時間変化しているように見えるのであるが, これは, 時間がたつと波数が小さくなって Q_1 と Q_2 の差が大きくなり, 冪の値の差が生じることが説明できるとした.

4. スケールが大きくなった時の相似則

準地衡流方程式 (1) は, 現象のスケールが大きくなって $\nabla^2 \psi \ll \lambda^2 \psi$ となるくらい波数が小さくなると

$$-\lambda^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

と近似できるが, この近似方程式は $t = ct'$, $x = c^{\frac{1}{4}} x'$, $\psi = \psi'$ という変換を行っても, $t \rightarrow t'$, $x \rightarrow x'$, $\psi \rightarrow \psi'$ の置き換えがされるだけで形は変わらない. 従って, 方程式 (13) に従う準地衡流乱流では, ある時刻の状態に対して経過時間が c 倍になった時刻でのもう一つの状態を考えると, 現象のスケールが $c^{\frac{1}{4}}$ 倍になっているだけで, もとの時刻と同等のことが起きているはずである. 現象が幾何学的に相似に拡大されるだけであるから, 全エントロピーに対するコヒーレント渦領域のエントロピーの割合は, その表現方式がどちらの場合でも時間変化しないことになる. つまり, 両者の時間変化の冪乗の値は全く同じになるはずである.

この議論で用いた近似の条件はスケールが大ききことであるので, スケールが大きくなるに従って2つのエンス

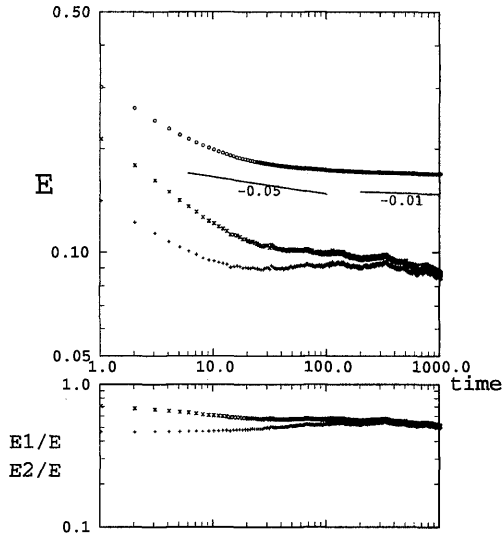


Fig. 2 Total energy E and energy in the coherent vortex region E_1 and E_2 , indicated by 'o', 'x' and '+', respectively, as functions of time t . The difference between E_1 and E_2 , which is remarkable at $t < 10$, is very small at $t > 100$.

トロフィーの時間変化の冪乗の値は近付いていくことになる。しかし先ほど述べたように Watanabe et al. (1998)²⁾では、スケールが大きい領域で2つのエンストロフィーの表現の差が顕著となることによって時間変化の冪の値が異なるという説明をしており、この節で行った考察と矛盾するように見える。

5. 数値計算

以上の理論的考察を調べるために、準地衡流方程式 (1) を数値的に時間積分した。ただし、実際の数値計算では (1) に小さな超粘性項を加えてある。計算の条件は Iga and Watanabe (2003)⁴⁾ と同じもので、これは基本的には Watanabe et al. (1998)²⁾ と同じである。ただし、今回の計算では現象のスケールがロスビー変形半径より十分に大きくなるところまで見られるよう $t = 1000$ まで時間積分した。流線関数の時間発展の様子は Fig. 1 に示したようになり、エネルギーのアップワードカスケードにより、スケールは時間とともに大きくなっていく。

全領域のエネルギー $\mathcal{E}$ とコヒーレント渦領域内のエネルギーの2つの異なる定義 $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ の時間変化を示したのが Fig. 2 である。全エネルギー $\mathcal{E}$ は、高波数域に存在するエネルギーの割合の大きい初期の段階では若干の散逸があるが、時間が経つにつれて変化が小さくなっていく。この時間変化の冪乗の値 $-\theta$ を $d \log / d \log t$ で評価すると

$$-\theta \cong -2^{-\frac{5}{4}} 15^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}^{-\frac{1}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}} k_{\eta}^{-2} t^{-\frac{1}{2}} \quad (14)$$

と見積もられているが⁴⁾ (k_{η} はエネルギー散逸の起こる波数), $t = 15$ では $\theta \cong 0.05$, $t = 500$ では $\theta \cong 0.01$ となる。初期のうちは大きく異なっていた $\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_2$ であるが、

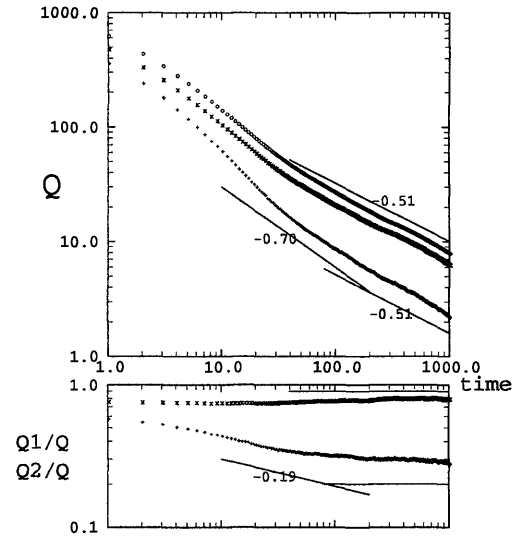


Fig. 3 Total enstrophy Q and enstrophy in the coherent vortex region Q_1 and Q_2 , indicated by 'o', 'x' and '+', respectively, as functions of time t . At $t > 30$, the difference between Q_1 and Q_2 is large, but they decrease in the same rate. The difference of decay ratio is remarkable at $10 < t < 100$.

十分に時間が経ってスケールが小さくなると両者の値は次第に近付いてくる。

一方、全領域のエンストロフィー Q とコヒーレント渦領域のエンストロフィーの2つの異なる定義 Q_1 , Q_2 の時間変化は Fig. 3 のようになる。全エンストロフィー Q の時間変化の冪乗の値は (6) によれば -0.5 , あるいは $\mathcal{E}$ の減衰を考慮に入れて $t = 500$ で (8) を評価すれば -0.51 になるが、数値計算で十分に時間が経った時の時間変化の様子をよく表している。初期の頃には比較的似た値をとっていた Q_1 と Q_2 であるが、時間が経つとともにその差が広がっていく。しかし、時間変化の傾きに関して言えば、 $t > 300$ になると両者の傾きは同じような値をとっており、前節での議論が正しいことを示している。時間変化の傾きは、むしろ $10 < t < 100$ 付近の遷移的な時間において差が大きくなっている。Watanabe et al. (1998)²⁾ は $t = 100$ までしか計算を行っていないので、これを「十分に時間が経った時の現象」と考えて、遷移的領域での冪の違いを波数が小さいところでの特徴とみなしてしまったのではないかと考えられる。

6. 結 論

準地衡流乱流に見られるコヒーレント渦に着目し、この渦領域内のエンストロフィーを表す2つの表式の時間変化の様子について相似則と数値計算によって調べて、以

下のような結論を得た.

1. 時間発展してスケールが大きくなるに従って 2 つの表式による渦領域のエンストロフィーの差は大きくなっていくが, 時間変化の冪乗の値に関しては近い値をとる.
2. 2 つの表式による渦領域のエンストロフィーの時間変化の冪乗の値は, スケールがロスビー変形半径に近くなった遷移的な段階に, 両者の差が現れてくる. Watanabe et al. (1998)²⁾ で言及された両者の差は, ちょうどこの時間に見られた振舞いに対応するものである.

参考文献

- 1) T. Watanabe, H. Fujisaka and T. Iwayama: Dynamical scaling law in the development of drift wave turbulence, *Phys. Rev. E*, **55**, 5575-5580 (1997).
- 2) T. Watanabe, T. Iwayama and H. Fujisaka: Scaling law for coherent vortices in decaying drift Rossby wave turbulence, *Phys. Rev. E*, **57**, 1636-1643 (1998).
- 3) R. Fjørtoft: On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for twodimensional, nondivergent flow, *Tellus*, **5**, 225-230 (1953).
- 4) K. Iga and T. Watanabe: The scaling law of quasi-geostrophic turbulence with weak energy dissipation, *J. Meteor. Soc. Japan*, **81**, 895-907 (2003).