2次元磁場ゆらぎ中での高エネルギー荷電粒子の非古典拡散

大塚, 史子
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

羽田, 亨
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

https://doi.org/10.15017/16698

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 25 (2), pp.249-257, 2003-09. Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

九州大学大学院総合理工学報告
第25巻 第2号 249-257 頁 平成15年9月

Engineering Sciences Reports, Kyushu University
(KYUSHU DAIGAKU SOGORIKOGAKU HOKOKU)
Vol. 25, No. 2 pp. 249-257 SEPT. 2003

2次元磁場ゆらぎ中での高エネルギー荷電粒子の非古典拡散

大塚　史子[*1,†]・羽田　亨[*2]

(平成15年7月31日　受理)

Non-classical diffusion of energetic particles in two dimensional magnetic field turbulence

Fumiko OTSUKA and Tohru Hada

[†]E-mail of corresponding author: *otsuka@esst.kyushu-u.ac.jp*

We study non-classical diffusion of energetic particles using a simple 2-d cross field diffusion model. Important parameter is ratio of typical particle Larmor radius (ρ) to the field correlation length (L). In our model, when ρ/L is infinitesimally small, the particles essentially gradient-B drift along equi-contour lines of the magnetic field strength, and thus the diffusion in this parameter regime can essentially be understood by analyzing statistics of magnetic field islands composed of these equi-contour lines. We numerically evaluate the statistics of field islands such as probability density function of mean radius and fractal dimension of field islands, depending on power-law index of the magnetic field turbulence. In our model, both super-diffusion (for finite time scale) and sub-diffusion can take place. We find numerically and analytically the scaling law of the diffusion coefficient using the parameters obtained by field islands statistics.

Key words : *cross-field diffusion, non-classical diffusion, Levy statistics*

1. 緒　　言

高エネルギー荷電粒子（宇宙線）のエネルギースペクトルは、高エネルギー領域まで広いベキ乗分布として観測されており、その加速過程は高エネルギー天体現象において興味のある研究課題である。この加速過程の有力な候補は宇宙空間に存在する無衝突衝撃波を介した拡散的加速 (Diffusive Shock Acceleration) 過程である。無衝突衝撃波では、粒子は衝撃波面を横切ることが出来る。粒子は衝撃波の上流および下流域に存在する磁気流体乱流によって散乱を受け、衝撃波面を行き来することにより加速される。DSA 過程が粒子加速の有力な説と見なされているのは、ベキ型のエネルギースペクトルを説明でき、さらに $10^{15}eV$ のエネルギー領域までのベキ指数を説明することができるためである。衝撃波面の法線方向と平均磁場方向が垂直な場合の衝撃波は垂直衝撃波と言われるが、高エネルギー天体ではこのタイプの衝撃波が多く存在する。垂直衝撃波で DSA 過程が働くためには、荷電粒子が磁場を横切って輸送・拡散されることが不可欠であり、我々は磁場ゆらぎ中での宇宙線の垂直拡散を研究してきた。

これまで、荷電粒子の拡散過程は古典的拡散、すなわち、粒子の移動距離の二乗平均 $<\Delta r(\tau)^2>$ は時間 τ に比例して増加する、として考えられてきた。数値計算による解析では、とくに垂直拡散の場合、拡散過程は古典的な解釈では説明できないことが示唆されている[1)]。これまでの我々の数値計算においても、パラメータ領域により非古典的な振る舞いが観測されている[2),3)]。ここで非古典的拡散とは、粒子の分散が経過時間のベキ乗に比例し、古典的拡散係数 $D=<\Delta r(\tau)^2>/\tau \sim \tau^\beta$ $(\beta \neq 0)$ と記述される場合である。このような拡散は、古典拡散の拡張であり、異常拡散・異常輸送とも呼ばれる。近年、異常輸送する高エネルギー電子によるシンクロトロン放射の強度が議論されたり[4)]、非古典的な拡散過程を DSA 過程に適用したモデルが提唱されたりと[5)]、非古典的な観点から、宇宙線の拡散・加速過程が議論されている。

非古典的な拡散過程はさまざまな分野で観測されている[6)]。Weeks らは、渦とジェット流が形成された回転水槽中で、レビ歩行するトレーサー粒子の運動を観測した。トレーサー粒子は、渦による捕捉や、ジェット流による輸送を繰り返し、レビ歩行を行う。彼らは、これらの粒子軌道の時系列を停滞と歩行の時間間隔から成ると考え、停滞と歩行時間間隔の確率分布関数 (p.d.f.) をベキ乗と仮定してモデルを作った。p.d.f. のベキ指数が 3 以下ならば、この p.d.f. より得られる分散は発散する。このよ

*1 大気海洋環境システム学専攻博士課程
*2 大気海洋環境システム学専攻

うな長いスケールまでベキ乗型である p.d.f. に従う運動がレビ歩行である。停滞と歩行時間間隔の p.d.f. のベキ指数の大小関係により、拡散過程は超拡散 ($\beta > 0$), 準拡散 ($\beta < 0$) となる。彼らは、ベキ指数 β と p.d.f. のベキ指数との間のスケーリング則を理論的に評価した[7]。

われわれの数値計算によって得られた粒子軌道でも同様に、磁場等高線が形成する磁場アイランドによる捕捉(停滞)、非捕捉（歩行）を繰り返し、古典的拡散の代表であるブラウン運動とは異なる時系列となる。このような粒子群のアンサンブル平均により得られた拡散係数は非古典的拡散過程を示す。これは、粒子のラーマ半径 (ρ) が磁場ゆらぎの相関長 (L) と同程度の場合に観測される。

粒子のラーマ半径と磁場ゆらぎの相関長との比 $\rho/L >> 1$ ならば、粒子は一周のラーマ運動の間にランダムな磁場ゆらぎを経験し、拡散過程は古典的となる。この時の拡散係数は、準線形理論により説明できる。宇宙プラズマ中での高エネルギー粒子の拡散は、この準線形理論により説明されることが多い[8),9)]。一方 $\rho/L << 1$ ならば、粒子は ∇B ドリフトにより磁場等高線に沿って運動し、粒子の拡散過程は磁場等高線の統計と直接的に関連している。$\rho \sim L$ では、粒子は磁場等高線の乗換えを起こしレビ歩行となるため、この領域の拡散過程を議論するに先立ち、磁場等高線の統計を詳細に議論する必要がある。

本報告では、ラーマ半径が無限小の極限 ($\rho/L \to 0$) における荷電粒子の垂直拡散を議論する。具体的には、与えられた磁場等高線に沿う軌道を数値的に求め、そのアンサンブル平均をとり、拡散係数を時間の関数として評価する。また、この軌道より得られる磁場等高線の統計を評価する。この磁場等高線の統計と、拡散係数の時間依存性を表すベキ指数との間にスケーリング則を見出したことを報告する。

2.　数値計算の方法

2.1　磁場ゆらぎモデル

平均磁場と変動磁場（磁場ゆらぎ）は共に、2次元シミュレーション面 (xy 面) に垂直な向き（z 方向）とする。平均磁場の大きさで規格化された変動磁場は以下のように与える。

$$b(x,y) = \sum_m \sum_n b_k \cos(mx + ny + \phi(m,n)) \qquad (1)$$

ここで、変動磁場成分 b は時間的に定常、空間変化は2次元とし三角関数の重ねあわせで表現する。空間 x, y 方向の波数はそれぞれ m, n とする。位相 $\phi(m,n)$ は波数 m, n のランダム変数の組として与える。フーリエ空間での $b(x,y)$ の振幅 b_k をベキ乗型のスペクトル, $b_k \sim k^{-\gamma}$ ($k_{min} \le k \le k_{max}$) として与える。ここで、$x, y$ 方向の波数の大きさ $k = \sqrt{m^2+n^2}$、系の大きさに対応する最小波数 $k_{min} = 2\pi/L_{sys}$、最大波数 $k_{max} = \pi$, 系の大きさ $L_{sys} = 2048$ である。磁場ゆらぎの相関長 L を b_k で重みをつけて、$L^2 =< b_k/(k/2\pi)^2 > / < b_k >$ と定義する。1グリッド幅 $\Delta = 1$ である。また、磁場ゆらぎの大きさは $\bar{b}^2 =< b^2(x,y) >$ となるように規格化する。パラメータは $\bar{b}$ および磁場ゆらぎスペクトルベキ指数 γ である。ベキ指数 γ に応じ磁場ゆらぎ相関長 L は変化する。

2.2　磁場等高線の評価方法

上記のように与えられた2次元磁場中での荷電粒子の位置 $\mathbf{r} = (x,y)$、および速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ は以下の規格化された運動方程式に従う。

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times (1 + b(x,y))\mathbf{z} \quad ; \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \qquad (2)$$

ここで、$\mathbf{z}$ はシミュレーション面に垂直な方向の単位ベクトルである。時間、空間はそれぞれ平均磁場の大きさにより定義されたラーマ周波数、任意の空間スケールで規格化している。規格化された平均磁場と変動磁場の大きさは、$1 + b$ である。

粒子のラーマ半径 ρ が磁場ゆらぎ相関長 L よりも十分小さく、かつ $\bar{b}$ が十分小さい、すなわち、$\rho/L\ \bar{b} \ll 1$ ならば、粒子の案内中心の速度 $\mathbf{v}_d$ は近似的に以下のようである。

$$\mathbf{v}_d = \frac{\rho v_0}{2} \frac{\mathbf{z} \times \nabla b}{1 + b} \qquad (3)$$

ここで、v_0 は初期の粒子の、平均磁場に垂直方向の速度である。また、磁場ゆらぎ b および磁場勾配 ∇b は、案内中心点で定義されたもので、$\mathbf{v}_d$ の式は速度を一周のラーマ周期で平均することにより得られる[10)]。$\mathbf{v}_d$ の式より、$\mathbf{v}_d \cdot \nabla b = 0$. と書ける。すなわち、ラグランジュ的な粒子が感じる磁場ゆらぎの時間変化は $db[\mathbf{r}(\tau)]/d\tau = 0$ であり、$b[\mathbf{r}(\tau)] = b[\mathbf{r}(0)]$ となる。これは、粒子は初期に置かれた磁場の大きさに沿って、速度 $\mathbf{v}_d$ で運動することを示す。本報告では、$\rho/L \to 0$ のときの荷電粒子の拡散過程に注目し、磁場等高線に沿うテスト粒子を用い、拡散係数および磁場等高線の統計量を評価する。ここで、今 $\rho/L \to 0$ の極限を考えるので、$\bar{b}$ に依らず (3) 式は保証される。磁場ゆらぎの大きさ $\bar{b}$ は、拡散係数へ定性的には依存せず、ドリフト速度の大きさとして定量的に影響を与える。

磁場等高線に沿う粒子軌道の求め方は以下のようである。テスト粒子は初期に任意のグリッド $\mathbf{g}_1$ と、隣接したグリッド $\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_1 + (\Delta, 0)$ の間の任意の点 $\mathbf{r}_0 = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$ におく。この2つのグリッドに対し、$\mathbf{g}_3 \equiv (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) \times \mathbf{z} + \mathbf{g}_2$ と $\mathbf{g}_4 \equiv (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) \times \mathbf{z} + \mathbf{g}_1$ を定義する。磁場はグリッド上に値があり、任意の点での磁場はその内分として与え

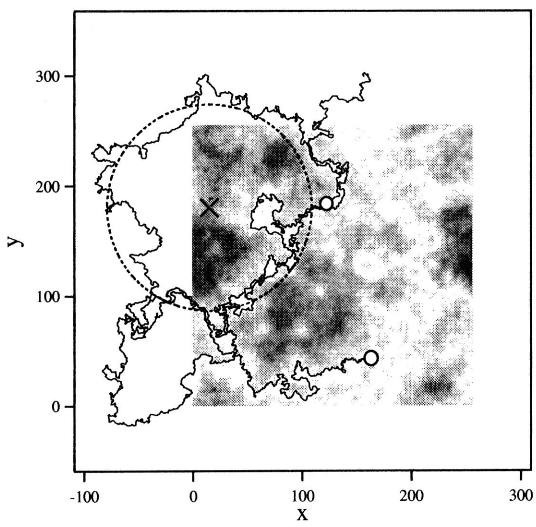

Fig. 1 Typical magnetic field turbulence used in the present study superposed with several test particle trajectories. Both the zeroth order and the variation magnetic field is given perpendicular to the simulation plane, whose magnitude is shown as a gray scale in the figure. When the particle Larmor radius is much less than characteristic scale length of the turbulence, particles essentially gradient-B drift along equi-contour lines of the magnetic field strength. For a closed particle trajectory, one can define its 'center' and 'radius', as represented by a dotted circle.

る。この4つのグリッド間に対し、$b[\mathbf{r}_1] = b[\mathbf{r}_0]$ を満たす点 $\mathbf{r}_1(\neq \mathbf{r}_0)$ を各線分について、順次右回りに探し、テスト粒子の位置を更新する操作を繰り返し、磁場等高線に沿う軌道が求まる。

Fig. 1に、xy 平面に与えた磁場ゆらぎと数値的に求めた磁場等高線の軌道を示す。グレースケールで示された2次元磁場等高線は、$L_{sys} = 256, \gamma = 1.5$ の場合である。実線は数値的に計算した2つのテスト粒子である。○で示された点は初期位置である。テスト粒子は同じ磁場の大きさに沿って動いていることがわかる。1つのテスト粒子は、周期境界条件のため、一旦シミュレーション系の外に出るが、再び初期の場所に戻っていることがわかる。一方、もう1つの粒子は、シミュレーション面の外側で初期の位置に対応する場所に到達している。前者の粒子が形成する磁場等高線を'磁場アイランド'と呼ぶことにする。後者は、開いた磁場等高線である。

2.3　磁場等高線の統計と拡散係数の評価方法

磁場ゆらぎのフーリエ空間でのランダム変数の組で与えられた位相 $\phi(m,n)$ によって異なる磁場等高線が形成される。1組のランダム変数（1パターンの磁場構造）に対し、テスト粒子数 $N_p = 10000$ 個を用い、前述の方法により磁場等高線を評価し、以下に記述する統計量を評価する。これを $N_f = 100$ 組のランダム変数（100パターンの磁場構造）に対して行い、それぞれの磁場構造に対する統計量および拡散係数の平均を評価した結果を3章に示す。磁場アイランドの統計量は、パーコレーションの概念を用いて定量化する[11),12)]。

開いた磁場等高線の割合 α: Fig. 1に示すように、磁場等高線には、開いた等高線と閉じた等高線（磁場アイランド）が存在する。全体のテスト粒子の数に対する開いた磁場等高線の数の割合 α を評価する。

磁場アイランドに対して、以下の統計量を評価する。

磁場アイランドの周縁 S: 毎ステップごとの位置の差の大きさを足し合わせて、磁場アイランドの周縁を以下のように求める。

$$S = \sum_{i=1}^{m} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}| \tag{4}$$

ここで、個々の磁場アイランドが、初期の位置に戻ってくるまでのステップ数は m である。この周縁 S に対し、確率密度関数 $p(S)$ を評価する。その際、分布の幅 ΔS は、$\Delta S = 2^n \Delta (n = 1, 2 ...)$ とする。

磁場アイランドの平均半径 R: Fig. 1には、磁場アイランドの等高線に対して、中心位置 $\mathbf{r}_c$（×印で示している）である半径 R の円を破線でプロットしている。この半径 R は以下のようにして求める。

$$R^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c|^2}{m} \tag{5}$$

ここで、中心の位置は磁場アイランドの各点の平均点 $\mathbf{r}_c = \sum_i^m \mathbf{r}_i / m$ である。この中心点からの二乗平均より平均半径 R とする。この半径 R に対しても、周縁 S と同様に確率密度関数 $p(R)$ を生成する。また、$(S, S + \Delta S)$ に存在する磁場アイランドに対し、半径 R を平均し R を S の関数として評価する。

拡散係数 D: 毎ステップごとに、粒子位置の分散をアンサンブル平均により求め、空間拡散係数を時間の関数として以下のように評価する。

$$D(\tau) = \frac{< |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^2 >}{\tau} \sim \tau^{\beta} \tag{6}$$

ここで、時間 $\tau = i\Delta\tau$ であり、時間ステップは $\Delta\tau = \Delta / v_d$ とする。ドリフト速度の大きさ v_d は、磁場勾配の平均値 $\bar{\nabla} = \sqrt{< k^2 b_k^2 > / < b_k^2 >}$ として、$v_d = \rho v_0 \bar{\nabla} \bar{b} / 2$ とする。なお、拡散係数を求める際には、開いた磁場等高線、閉じた磁場等高線の区別はなく、すべてのテスト粒子を用いアンサンブル平均を取る。閉じた磁場等高線に位置するテスト粒子は、観測する時間スケールが磁場アイランドを一周する時間スケールより十分大きい場合

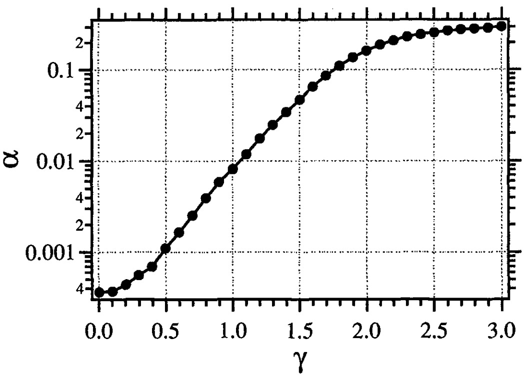

Fig. 2 Probability that an arbitrarily chosen point in the field turbulence belongs to an open trajectory (α) plotted versus the field turbulence spectrum index (γ).

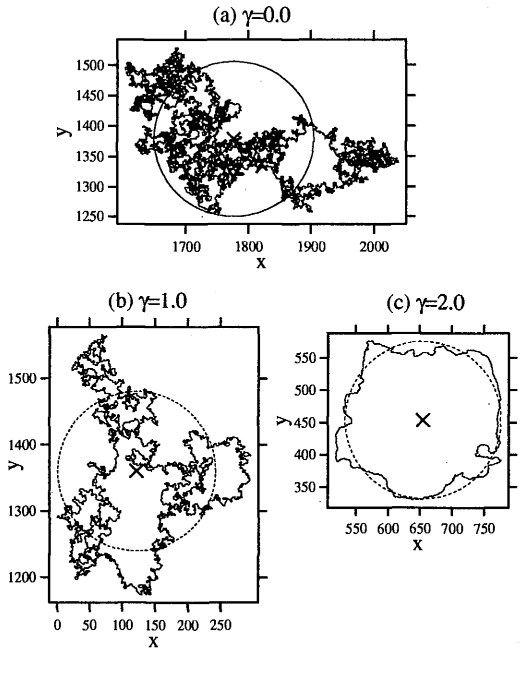

Fig. 3 Typical magnetic field islands for (a) $\gamma = 0.0$, (b) $\gamma = 1.0$ and (c)$\gamma = 2.0$. In each panel, a circle is superposed with its radius (R) evaluated by (5) and its center given by the gravity center of the trajectory.

には、同じ磁場等高線上を何度も周回することになる。また、比較のため (2) 式の積分により得られる拡散係数 D も時間の関数として評価する。

3. 計算結果

磁場ゆらぎスペクトルのベキ指数 γ に着目し、磁場等高線の統計を評価する。γ は $0 \leq \gamma \leq 3$ まで 0.1 刻みで変化させる。$\gamma = 0$ はホワイトノイズであり、与えているすべての波数領域で等しいスペクトル密度を持つ。一方、γ が大きくなるほど、低波数領域が支配的となる。

Fig. 2 に、開いた磁場等高線の割合 α を示す。ベキ指数 $\gamma = 0$ では、$\alpha \sim 4 \times 10^{-4}$ であるのに対し、$\gamma = 3$ では $\alpha \sim 0.3$ である。γ が小さいと、系内は小さなスケールの磁場アイランドで多数占められ、磁場アイランド間の隙間は狭く、開いた等高線はわずかしか存在しない。γ の増加につれ、磁場アイランド間を埋めるような小さな磁場アイランドはなくなり、磁場アイランド以外の開いた等高線の割合は増える。以下では、$1 - \alpha$ の割合だけ存在する磁場アイランドの統計を示す。最後に、すべてのテスト粒子を用いて計算された拡散係数を示す。

3.1 平均半径 R と周縁 S

Fig. 3 に (a) $\gamma = 0.0$, (b) $\gamma = 1.0$, (c)$\gamma = 2.0$ の場合の典型的な磁場アイランドを示す。これらの磁場アイランドは、異なる γ に対し同程度の平均半径 $R \sim 120$ を持つものを選び、示している。(a) では、磁場アイランドの軌道は、小さな入り組んだ構造を含み、周縁は長く、2次元面を塗りつぶしたような軌道、すなわち、2次元的である。γ の増加に伴い、磁場アイランドは単純な構造となり、その周縁は1次元的である。周縁の次元を評価するために、平均半径 R を周縁 S の関数として両対数プロットした図が Fig. 4 である。それぞれの線は $0 \leq \gamma \leq 3$ について γ を 0.5 刻みで変化させた場合に対応し、ラベル (a)〜(g) で示している。今、グリッド幅 $\Delta = 1$ なので、$R < 1$ では直線的な周縁しか存在し得ないため、$R \sim S$ となっている。

グリッド幅より大きなスケール $R > 1 (S > 10)$ では、それぞれほぼ一定の直線であり、その傾きは異なっていることがわかる。これは、磁場アイランドが自己相似性を持ち、異なる γ に対して異なるスケール変換を持つことを示す。系の大きさの有限性より R の最大値は $L_{sys}/2$ 程度である。ここで、$R \sim S^{1/d}$ と定義すると、d は周縁の次元に対応する。完全な円ならば $S = 2\pi R$ となり $d = 1$ である。一方、S を面積と考えるならば、$S = \pi R^2$ であるので $d = 2$ となる。つまり、d はフラクタル次元（容量次元）である。Fig. 4 より、γ の増加に伴い、傾き $1/d \sim 0.5$ より少し大きい値から、$1/d$ は 1 に近づいていることがわかる。ベキ指数 γ に対してフラクタル次元 d をプロットした図が Fig. 7(a) である。傾き $1/d$ は、Fig. 4 のグラフより目で見て、傾き一定の直線で近似できる領域を選び、$\log R$ と $\log S$ のデータを用い最小二乗法により求める。$\gamma = 0$ のとき $d \sim 1.74$ であり、γ とともに d は大きくなり、$d = 1$ に漸近することがわかる。

3.2 確率密度関数 $p(R)$, $p(S)$

Fig. 5 に磁場アイランドの平均半径 R の確率密度関数を両対数スケールで示す。Fig. 4 と同様に、ラベル (a)〜(g) で示す異なる γ に対し計算している。また、分布は

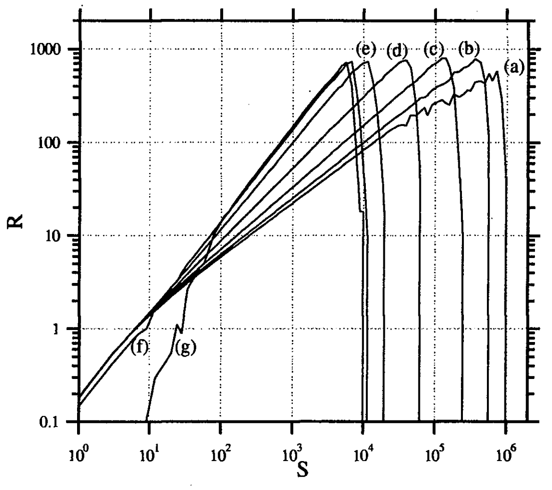

Fig. 4 Mean radius R vs. perimeter S. The mean radius is averaged during $(S, S + \Delta S)$, where the value of ΔS is chosen as $2^n\Delta$ $(n = 1, 2...)$. Each curve represents different value of the power law index of the magnetic field turbulence, (a)$\gamma = 0$, (b)$\gamma = 0.5$, (c)$\gamma = 1.0$, (d)$\gamma = 1.5$, (e)$\gamma = 2.0$, (f)$\gamma = 2.5$ and (g)$\gamma = 3.0$.

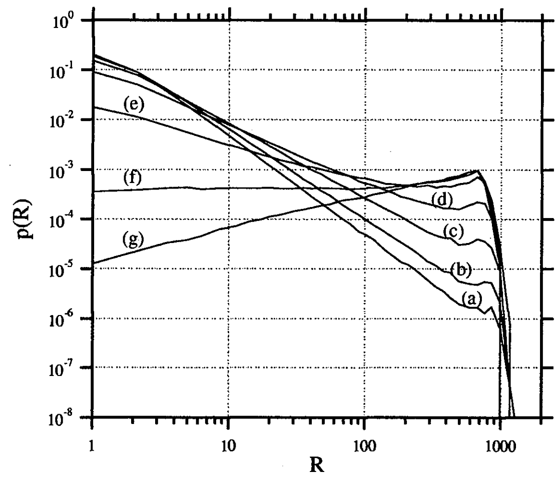

Fig. 5 Probability density function of mean radius R. For an intermediate range of R $(3 < R < 300)$, one can approximate $p(R) \sim R^{-\mu}$. Labels (a) $\sim$ (g) are the same as Fig. 4.

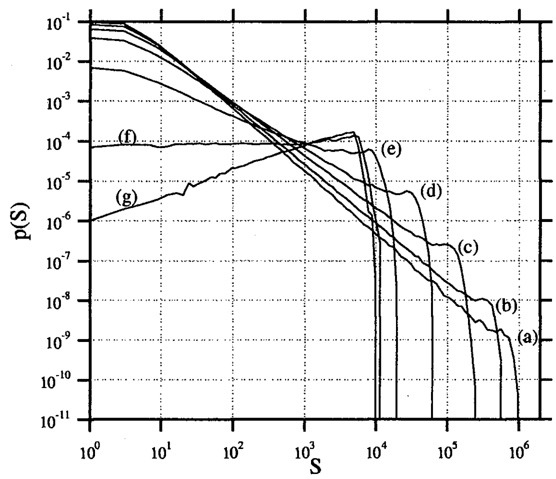

Fig. 6 Probability density function of perimeter S. For an intermediate range of S, one can approximate $p(S) \sim S^{-\nu}$. Labels (a) $\sim$ (g) are the same as Fig. 4.

N_pN_f で割っているので、$\sum p(R)\Delta R = 1 - \alpha$ となっている。分布は、$3 < R < 300$ のスケールでほぼ一定の直線になっていることより、$p(R) \sim R^{-\mu}$ とおく。フラクタル次元 d を求める方法と同様の方法で、ベキ指数 μ を計算した図が Fig. 7(b) に示す▲印である。$\gamma = 0$ で $\mu \sim 2$ であり、γ の増加に伴い、μ は減少し $\gamma = 2.5$ を超えると、$\mu < 0$、すなわち、傾きが正となる。もし、系内にある磁場アイランドが1次元の周縁を持つ円 $(S = 2\pi R)$ のみならば、テスト粒子は初期に系内にランダムにおいているので、半径 R をもつテスト粒子の数は S に比例することになり、$p(R) \sim S = 2\pi R$ より $\mu = -1$ となる。$\gamma \to \infty$ では、$\mu = -1$ となることが期待される。

Fig. 5 と同様に異なる γ に対する磁場アイランド周縁 S の確率密度関数を示した図が Fig. 6 である。$p(S)$ は $p(R)$ と同様にベキ乗で分布しており、$p(S) \sim S^{-\nu}$ とおく。S は系の大きさの有限性に加え、フラクタル次元の効果により、S の最大値は L_{sys}^d に比例する。そのため、d が大きい、すなわち、γ が小さい程、$p(S)$ は大きなスケールまで分布している。ベキ指数 ν を計算した図が Fig. 7(b) に示す●印である。μ 同様、γ が大きくなるほど、ベキ指数 ν は減少していることがわかる。$\gamma \leq 1.8$ では $\mu \neq \nu$ であるが、$\gamma > 1.8$ では $\mu \sim \nu$ となっている。また、μ, ν の γ 依存性が $\gamma = 1.8$ を境に異なっていることがわかる。

3.3 拡散係数 D

拡散係数 D を2つの方法により評価した結果を Fig. 8 に示す。横軸に時間、縦軸に拡散係数を両対数プロットした図であり、ラベル (a)〜(g) は Fig. 4 と同様である。破線が磁場等高線を沿うことにより得られる拡散係数、実線が運動方程式 (2) 式の積分により得られる拡散係数である。実線は $0 \leq \gamma \leq 2$ について $0.1 \leq \tau \leq 10^5$ まで計算している。粒子のラーマ半径と磁場ゆらぎの相関長との比 $\rho/L = 0.1$ と固定する。そのため、γ が大きくなるほど、全体として D が大きい値を示すのは、L に比例して大きいラーマ半径を与えているためである。

短い時間スケール (i)($\tau \sim 100$) における実線の周期 2π 程度の振動はラーマ運動のためである。一方、十分長い時間スケールでは、拡散係数の定義 (6) 式より、$\beta \sim 1$ となる時間スケール (ii) が、それぞれの γ に応じて存在する

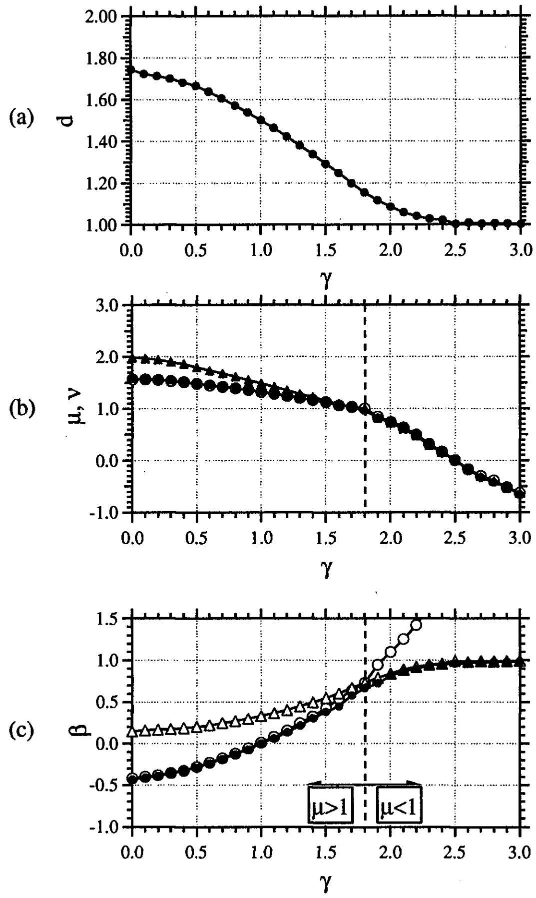

Fig. 7 Dependence of several important indices to γ, the power law index of the magnetic field turbulence. (a) Fractal (capacity) dimension, d evaluated using Fig. 4, (b)μ(▲) and ν (●) evaluated using Fig. 5 and Fig. 6,respectively, and analytically estimated ν (○) by eq.(9), (c)diffusion scale index β evaluated numerically (●) and analytically (○, △) by eq.(20),(21).

ことがわかる。これは周期境界条件のため、開いた磁場等高線を沿う粒子が、ほぼ一定の速度 ($\Delta r/\tau \sim const$) で直線的な運動をするため、拡散係数 $D =< \Delta r^2 > /\tau \sim \tau$、すなわち、$\beta \sim 1$ となるためである。これら二つの時間スケール (i),(ii) の間の、磁場等高線の統計が関与している時間スケール (iii) をここでは問題とする。

(d),(e) の実線は時間スケール (iii) が短いが、(a)〜(e) に対し、2 つの方法より得られた拡散係数のベキ指数 β はよい一致を示す。これより $\rho/L << 1$ の場合には、磁場等高線に沿うテスト粒子を用いることにより、拡散係数の時間依存性（ベキ指数 β）の議論が可能であることを数値計算により確認できた。なお、時間スケール (ii) と (iii) の境界付近で拡散係数があまり一致していないが、これは、運動方程式の積分による方法では、1 組の磁場構造（1 組のランダム位相）についてのみ計算している

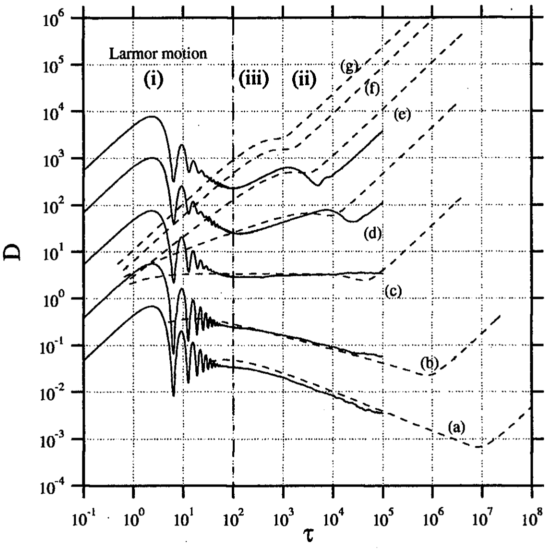

Fig. 8 Time scale (τ) dependence of the diffusion coefficient (D), which is evaluated by numerical integration of particle trajectories (solid lines) and by discussion of magnetic islands statistics (broken lines).

ためと考えられる。

これまでと同様の方法で破線のデータより求めた β の値を Fig. 7(c) の●に示す。γ が大きくなるにつれて、β は負から正へ、すなわち、準拡散から超拡散となっていることがわかる。ちょうど $\gamma = 1$ のときに $\beta \sim 0$ で古典拡散を示す。

3.4　粒子軌道とその確率密度関数 $p(\xi)$

Fig. 9 の左側の図は、縦軸に磁場等高線を沿う粒子の y 方向の変位を、横軸に操作の回数 i を、(a)$\gamma = 0$,(b)$\gamma = 1$,(c)$\gamma = 2$ に対し示す。(b) では、ベキ指数 $\beta \sim 0$ と古典拡散を示したが、その時系列は明らかに典型的なブラウン運動とは異なることがわかる。γ が小さくなるほど、小さなアイランドに沿って何度も周回していることがわかる。

右側の図はこれらの粒子から得られた、ある時間 τ での変位 $\xi = \Delta r(\tau)$ の確率密度分布である。実線 $p(\xi)$ は、(a) $\gamma = 0$ のとき $\tau = 10^4, 10^5, 10^6$、(b)$\gamma = 1$ のとき $\tau = 10^2, 10^3, 10^4$、(c)$\gamma = 2$ のとき $\tau = 10, 10^2, 10^3$ に対応する。分布の破線は、Fig. 5 の分布において $p(\sqrt{2}R)$ とした分布である。$p(\xi)$ は、$p(\sqrt{2}R)$ に重なるように時間発展している様子が見える。(c) で顕著である分布の端に見られるピークは、完全に磁場アイランドを周回していない粒子群であり、これらはさらに輸送される。分布のベキ指数 μ が小さい、すなわち、γ が大きい程、ピークの大きさは大きい。時間が経つほどこのピークの分布は小さくなる。太い線は周期境界条件の影響が現れる長い時間スケール (ii) での分布である。この最終的な粒子

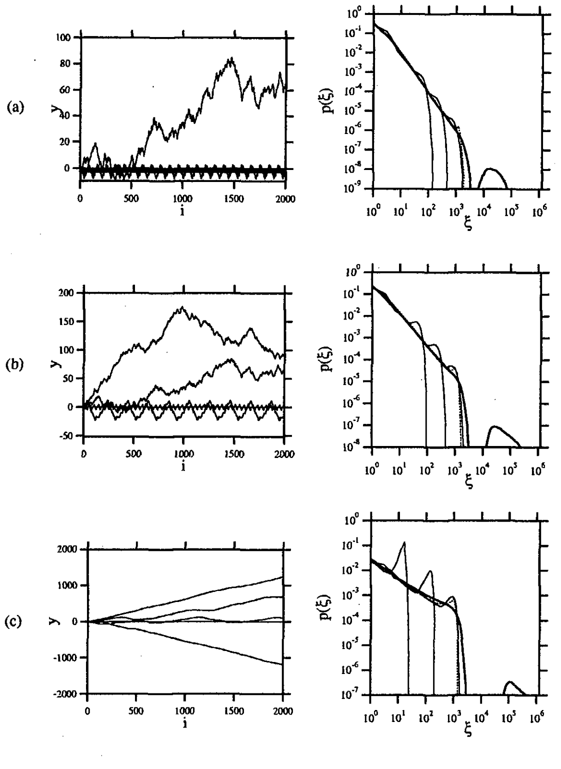

Fig. 9 Test particle position (y-direction) vs. iteration step i (right panel) and p.d.f. of particle position at some time (left panel). Solid lines of p.d.f. are at time $\tau = 10^4, 10^5, 10^6$ for (a) $\gamma = 0$, $\tau = 10^2, 10^3, 10^4$ for (b)$\gamma = 1$ and $\tau = 10, 10^2, 10^3$ for (c)$\gamma = 2$

の分布は、ベキ乗の分布と後ろにあるこぶの分布とからなる。前者が閉じた磁場アイランドを沿う粒子群に、後者が開いた磁場アイランドを沿う粒子群に対応する。このこぶの分布の全体の分布に対する割合が α である。

4. 理論的考察

3節で見てきた磁場アイランドの統計と拡散係数との間のスケール依存性を考察する。磁場スペクトルのベキ乗則がすべての領域で成り立っているとき、磁場アイランドの周縁 S および平均半径 R の分布はベキ乗分布と仮定できる。この仮定を用い、まず、周縁と平均半径の関係について考える。平均半径の分布は $(R_0 - \Delta R/2, R_0 + \Delta R/2)$ にある磁場アイランド数 $n(R)$ を積分して以下のように計算している。

$$p(R_0) \sim \int_{R_0-\Delta R/2}^{R_0+\Delta R/2} n(R)dR \tag{7}$$

ここで、$R \sim S^{1/d}$ とおけば、

$$p(S_0) \sim \int_{S_0-\Delta S/2}^{S_0+\Delta S/2} n(S^{1/d})S^{1/d-1}dS \tag{8}$$

ここで、$n(S^{1/d})$ 以外の部分は近似的に $S \sim S_0$ とし積分の外に出し、$n(S^{1/d})$ の積分は $\int n(R)dR \sim R_0^{-\mu}$ より、$S_0^{-\mu/d}$ とする。また、$p(S_0) \sim S_0^{-\nu}$ だからスケーリング則として

$$\nu = (\mu - 1)/d + 1 \tag{9}$$

を得る。Fig. 7(b) の○印で示した値は、数値的に得られた μ, d を用い、上式の関係式から得られたものである。数値的に得られた ν(●印) と良い一致を示していることがわかる。

次に拡散係数と磁場アイランドの統計を考える。Fig. 9 で見たように、閉じた磁場アイランドに沿う粒子は、ベキ指数 μ のベキ乗分布に沿って広がっていく。よって、移動距離 ξ の確率分布関数を以下のようにおくことができる。

$$p_c(\xi) = A\xi^{-\mu} \quad (\xi_0 \le \xi \le \xi_m) \tag{10}$$

$$p_o(\xi) = \alpha\delta(\xi - \xi_c) \tag{11}$$

ここで、添え字 c は磁場アイランドに沿う粒子分布、添え字 o は開いた磁場等高線に沿う粒子分布である。ξ_0 は最小スケール、ξ_m は系の大きさによって決まる最大スケールである。開いた磁場等高線を沿う粒子は、観測する時間スケール τ まで、速度 v で運動し、直線的ではなくフラクタル次元 d を持った道のりに沿うとすると、時間スケール τ までの移動距離は $\xi_c = (v\tau)^{1/d}$ とおける。その粒子分布は、(11) 式のように $\xi = \xi_c$ に局在するデルタ関数としておき、その積分値は α とする。p_c の積分が $1 - \alpha$ となるように規格化すると、規格化定数 A は以下のようになる。

$$A = \frac{(1-\alpha)(1-\mu)}{\xi_m^{1-\mu} - \xi_0^{1-\mu}} \quad (\mu \neq 1) \tag{12}$$

ある時間 τ までの粒子位置の分散は、分布関数 p_c, o を用い以下のように表現される。

$$< \Delta r(\tau)^2 >= \int_{\xi_0}^{\xi_c} d\xi\, \xi^2 p_c(\xi) + \int_{\xi_c}^{\xi_m} d\xi\, \xi_c^2 (p_c(\xi) + p_o(\xi)) \tag{13}$$

(13) 式右辺の第1項は、閉じた磁場アイランドに沿う粒子群のうちの、磁場アイランドを一周以上している粒子群である (Fig. 9 の分布のベキ乗分布に対応)。(13) 式右辺の第2項は、閉じた磁場アイランドに沿う粒子群のうちの、磁場アイランドを一周していない粒子群と、開いた等高線に沿う粒子群である (Fig. 9 の分布のピーク部分に対応)。この式を計算し、τ のベキ乗の項でまとめると、

$$< \Delta r(\tau)^2 >= c_1 \tau^{(3-\mu)/d} + c_2 \tau^{2/d} + c_3 \tag{14}$$

となる。それぞれの係数は以下のようである。

$$c_1 = \frac{-2(1-\alpha)}{(3-\mu)(\xi_m^{1-\mu} - \xi_0^{1-\mu})} v^{(3-\mu)/d} \tag{15}$$

$$c_2 = (\frac{(1-\alpha)\xi_m^{1-\mu}}{\xi_m^{1-\mu} - \xi_0^{1-\mu}} + \alpha) v^{2/d} \tag{16}$$

$$c_3 = -\frac{(1-\alpha)(1-\mu)}{(3-\mu)(\xi_m^{1-\mu} - \xi_0^{1-\mu})} \xi_0^{3-\mu} \tag{17}$$

ここで、$\tau \to \infty$ および $\xi_m/\xi_0 \to \infty$ と極限をとる。その際、$(\xi_m/\xi_0)^{1-\mu} \to 0\ (\mu > 1)$, $(\xi_m/\xi_0)^{1-\mu} \to \infty\ (\mu < 1)$ となることより $\mu = 1$ を境に場合分けされて、以下のように書ける。

$$D(\tau) \sim \frac{2(1-\alpha)}{(3-\mu)\xi_0^{1-\mu}} v^{(3-\mu)/d} \tau^{(3-\mu)/d-1} + \alpha v^{2/d} \tau^{2/d-1} \quad (\mu > 1) \tag{18}$$

$$D(\tau) \sim -\frac{2(1-\alpha)}{(3-\mu)\xi_m^{1-\mu}} v^{(3-\mu)/d} \tau^{(3-\mu)/d-1} + v^{2/d} \tau^{2/d-1} \quad (\mu < 1) \tag{19}$$

拡散係数は $\tau^{(3-\mu)/d-1}$ と $\tau^{2/d-1}$ の2つに比例する項からなる。$\mu > 1$ のとき α は小さく、また、ξ_m は十分大きいことを考えると、拡散係数のベキ指数 β は以下のようになる。

$$\beta = (3-\mu)/d - 1 \quad (\mu > 1) \tag{20}$$

$$\beta = 2/d - 1 \quad (\mu < 1) \tag{21}$$

数値的に得られた μ, d を用い、上式の関係式の β をプロットした値は Fig. 7(c) の○印 $(\mu > 1)$, △印 $(\mu < 1)$ である。数値的なデータから得られた β と、$\mu = 1$ 付近でのわずかなずれを除き、これらはよく一致していることがわかる。(21) 式の結果を見ると、$\mu < 1$ のときには移動距離の分布関数には依存せず、フラクタル次元 $1 < d < 2$ ならば、超拡散 $0 < \beta < 1$ のみしか存在しない。とくにフラクタル次元が $d = 1$ ではバリスティックな軌道（等速直線運動）となる。一方、$\mu > 1$ のときの (20) 式では、移動距離の分布のベキ指数に依存し、準拡散 $(\beta < 0)$ の場合も存在する。

このスケーリング則を別の直感的な方法により考える。簡単のため、粒子の移動距離の分布関数を閉じた磁場アイランドのみ $p_c(\xi)$ として考える。この分布からモーメントを計算してまとめたものが Fig. 10 である。モーメントの定義は以下のようである。

$$<\xi^a> = \int_{\xi_0}^{\xi_m} \xi^a p_c(\xi) d\xi \tag{22}$$

$a = 0, 1, 2$ について、ここでも同様に ξ_m/ξ_0 が十分大きいとして計算しているため、ベキ指数 μ の領域により、もっとも支配的な項のみを表記している。まず、0次のモーメントは μ の値によらず有限であり、1となるようにする。ここで、$\xi_m \to \infty$ の極限を考えてみよう。a 次 $(a = 1, 2)$ のモーメントの発散の様子を見ると $\mu < 1$ では、ξ_m の a 乗で発散する。$1 < \mu < a + 1$ では、ξ_m の $a + 1 - \mu$ 乗で発散し、発散の仕方が $\mu < 1$ より抑えられていることがわかる。そして、$\mu > a + 1$ では、モーメントは有限の値となる。ここで、考えている系の

	$\mu < 1$	$1 < \mu < 2$	$2 < \mu < 3$	$\mu > 3$
$<1>$	1			
$<\xi>$	$\frac{1-\mu}{2-\mu}\xi_m$	$\frac{\mu-1}{2-\mu}\xi_0\left(\frac{\xi_m}{\xi_0}\right)^{2-\mu}$	$\frac{\mu-1}{\mu-2}\xi_0$	
$<\xi^2>$	$\frac{1-\mu}{3-\mu}\xi_m^2$	$\frac{\mu-1}{3-\mu}\xi_0^2\left(\frac{\xi_m}{\xi_0}\right)^{3-\mu}$		$\frac{\mu-1}{\mu-3}\xi_0^2$

Fig. 10 Several moments of $p(\xi) \sim \xi^{-\mu}$.

最大スケールに到達するような時間スケール τ を考えて、$\xi_m \sim (v\tau)^{1/d}$ とおく。$D(\tau) = <\xi^2>/\tau$ であるので、ベキ指数 β の (20),(21) の関係式を得る。本来、発散するような分布関数であっても、有限の時間スケールで観測することにより、モーメントは時間スケールのベキ乗で増加し、これはすなわち非古典的拡散を意味する。この関係式は系が無限大の場合のスケーリング則であると考えてよい。しかし、分布を与える際に最初から $\xi_m \to \infty$ とすると、$\mu < 1$ でゼロ次の分布関数の積分が発散してしまうため、今考えたようなベキ指数 β は得られないことになる。

5. まとめと今後の課題

時間的に定常な2次元磁場ゆらぎ中での、荷電粒子の平均磁場に対して垂直方向の拡散過程を、粒子のラーマ半径 ρ と磁場ゆらぎの相関長 L との比が $\rho/L \to 0$ の極限について議論した。今回用いた磁場ゆらぎモデルでは、平均磁場と変動磁場がともに2次元面に垂直であるため、荷電粒子は単純に磁場等高線を沿うテスト粒子と置き換えて議論することが可能であった。これらテスト粒子の拡散過程は、非古典拡散であり、超拡散、準拡散のどちらもが観測された。このようなシンプルなモデルにより、非古典的な拡散過程を、数値的かつ解析的に磁場ゆらぎ統計と関連づけることが出来た。

磁場ゆらぎスペクトルのベキ指数依存性に着目し、磁場等高線を沿うテスト粒子により磁場等高線の統計量を評価した。磁場等高線から成る磁場アイランドの平均半径 R はベキ指数 μ のベキ乗分布であり、周縁 S は $S \sim R^{1/d}$ と記述でき、自己相似性を示した。数値的に求めたベキ指数 μ, d より、拡散係数の時間依存性をあらわすベキ指数 β との間のスケーリング則を解析的に導出し、これが数値的に得られた値とよく一致することを示した。有限の系内での数値計算により、無限の系でのスケーリング則を導出した。

時系列のスペクトルがベキ乗であるような1次元時系列に対して、拡散係数のベキ指数の議論が成されている[13)]。今回解析した時系列は、2次元であり、かつ等高

線に沿う軌道から得られる時系列であり、1次元時系列との関連を議論する必要がある。磁場ゆらぎのベキ指数γと、μ, dの関係は数値的に得られたが、解析的な考察を行う必要がある。また、今回は磁場スペクトルがすべての波数領域でベキ乗であると仮定したが、実際に観測される磁場スペクトルの多くは、エネルギーの流入されるような大きなスケールでは、フラットな磁場スペクトルを持ち、特徴的なスケールが存在する。このような磁場スペクトルに対し、現実的な系として解析する必要がある。

今回は、$\rho/L \to 0$の極限について、粒子拡散を磁場等高線の乗換えを行わないという仮定のもとに、磁場等高線の統計から議論した。しかし、現実には$\rho/L > 0$である。この場合、粒子が経験する磁場アイランドの空間スケールは$R \geq \rho$であると考えられる。その時に磁場アイランドの統計がどのように変化するかを議論する必要がある。そして、これら磁場アイランドの乗換えを起こすことによりレビ歩行する粒子拡散の統計を、磁場アイランドの統計と関連付けることは今後の課題である。

今回解析を行った系は、2次元の圧縮的な磁場ゆらぎ,$\mathbf{b} = (0, 0, b(x, y))$であったが、2次元的な磁場ゆらぎには非圧縮な場合,$\mathbf{b} = (b_x(x, y), b_y(x, y), 0)$が存在することが観測からわかっている[14)]。この場合、$\rho/L \to 0$では粒子は基本的に磁場のベクトルポテンシャルa_zの成す等高線に沿って運動する[15),16)]。よって、今回の方法と同様にa_zの等高線の統計と、粒子の運動の統計を関連付けて議論することが可能である。

平均磁場方向の粒子拡散（沿磁力線拡散）は、観測される粒子の平均自由行程が準線形理論により示唆される値と異なることから、議論の対象とされている[18)]。1次元の磁場ゆらぎ（スラブモデル）に対しても、今回と同様の考えにより、ミラー効果の影響に注目し議論することが可能である。粒子が磁場ゆらぎによって断熱的に反射される極限を考え、等しい磁場ゆらぎの位置する空間分布の統計を解析することにより、反射時間の統計を評価することができる。

さらに、3次元的な磁場ゆらぎ中での磁場の大きさを沿うことで得られる時系列は、磁力線のランダムウォークとして知られており、非古典的拡散の観点から議論がなされている[17)]。1次元、2次元で得られる磁場等高線の統計を踏まえ、3次元的な磁場ゆらぎ中での議論が可能である。また、磁場は実際には定常でない効果も考慮する必要がある。今回得られた拡散係数と磁場アイランドのスケーリング則を用い、垂直衝撃波での拡散的加速過程にたいし、加速効率の議論を行うことは有用である。

謝　辞

本研究は平成１３年度日本学術振興会特別研究員奨励費の援助を受けました。ここに謝意を表します。

参 考 文 献

1) J. Giacalone and J.R. Jokipii, The transport of cosmic rays across a turbulent magnetic field, Astrophys. J., 520, 204 (1999).

2) 大塚　史子, 羽田　亨, ゆらぎのある磁場中での宇宙線の輸送, 九州大学大学院総合理工学報告, 22, 4, 365 (2001).

3) F. Otsuka, T. Hada, Cross Field Diffusion of Cosmic Rays in a Two-Dimensional Magnetic Field Turbulence, Space Science Reviews, in press (2003).

4) B.R. Ragot and J.G. Kirk, Anomalous transport of cosmic ray electrons, Astron. Astrophys., 327, 432 (1997).

5) J.G. Kirk, P. Duffy, and Y.A. Gallant, Stochastic particle acceleration at shocks in the presence of braided magnetic fields, Astron. Astrophys., 314,1010 (1996).

6) J. Klafter, M.F. Shlesinger, G. Zumofen, Beyond Brownian Motion, Physics Today, Feb., 33 (1996).

7) E.R. Weeks, J.S. Urbach, H.L. Swinney, Anomalous diffusion in asymmetric random walks with a quasi-geostrophic flow example, Physica D, 97, 291 (1996).

8) J. R. Jokipii, Cosmic-ray propagation, 1: charged particles in a random magnetic field, Astrophys. J., 146, 480 (1966).

9) Reinhard Schlickeiser, A&A Library "Cosmic Ray Astrophysics", Springer. (2002) p.293.

10) W.Baumjohann, R.A. Treumann, "Basic Space Plasma Physics", Imperical College Press, (1996) p.18.

11) 小田垣　孝, "パーコレーションの科学", 裳華房, (1993) p.37.

12) D. スタウファー, A. アハロニー　著, 小田垣　孝　訳, "パーコレーションの基本原理", 吉岡書店, (2001) p.275.

13) 松葉育雄, 統計ライブラリー　"非線形時系列解析", 朝倉書店, (2000) p.81.

14) W.H. Matthaeus, M.L. Goldstein, and D. A. Roberts, Evidence for the presence of quasi-two-dimensional nearly incompressible fluctuations in the solar wind, J. Geophys. Res., 95, 12A, 20673 (1990).

15) K. Arzner, M. Scholer, and R.A. Treumann, Percolation of charged particle orbits in two-dimensional irregular magnetic fields and its effect in the magnetospheric tail, J.Geophys. Rev., 107, A4, 10, 1029 (2001).

16) F. Otsuka, T. Hada, Cross field diffusion of Cosmic rays: Dependence on 2-d field turbulence models, Proceeding of 11th International Congress on Plasma Physics, in press (2003).

17) P. Pommois, P. Veltri, G. Zimbardo, Field line diffusion in solar wind magnetic turbulence and energetic particle propagation across heliographic latitudes, J. Geophys. Res., 106, 24965 (2001).

18) J.W. Bieber , W.H. Matthaeus, and C.W. Smith, W. Wanner, M. B. Kallenrode and G. Wibberenz, Proton and electron mean free path: The palmer consensus revisited., Astrophys. J., 420, 294 (1994).