熱対流のMannevilleモデルの数値解

永谷, 宏幸
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

及川, 正行
九州大学応用力学研究所

https://doi.org/10.15017/16673

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 24 (3), pp.319-322, 2002-12. Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

九州大学大学院総合理工学報告
第24巻 第3号 319-322頁 平成14年12月

Engineering Sciences Reports, Kyushu University
(KYUSHU DAIGAKU SOGORIKOGAKU HOKOKU)
Vol. 24, No. 3, pp. 319-322 DEC. 2002

熱対流の Manneville モデルの数値解

永谷　宏幸*1 ・ 及川　正行*2

(平成14年10月31日　受理)

Numerical Solutions of Manneville Model for Thermal Convection

Hiroyuki NAGATANI and Masayuki OIKAWA
†E-mail of corresponding author: *naga@riam.kyushu-u.ac.jp*

Rayleigh-Bénard convection near onset under free-free boundary conditions for a small Prandtl number and a large aspect ratio is studied. In this case, a direct transition from conduction to spatiotemporal chaos has been reported. We solve numerically the generalized Swift-Hohenberg equations proposed by Manneville for a fluid of Prandtl number $\mathrm{Pr} = 0.5$ and the aspect ratio $\Gamma = 60$. We investigate similarities and differences between the results of the three-dimensional numerical simulation of the Boussinesq fluid for the same condition performed by Xi, Li & Gunton and those obtained from the Manneville model.

Key words : *Rayleigh-Bénard convection, spatiotemporal chaos, generalized Swift-Hohenberg equations*

1. 緒　言

Rayleigh-Bénard 系とは，上下2枚の水平な平板間の流体を上下面の温度差によって駆動する系であり，系を支配する代表的な3つの無次元パラメータと境界壁での境界条件によって様々な現象を示す[1)]．これら3つの無次元パラメータは，温度差の無次元量である Rayleigh 数 R，動粘性率と熱拡散率の比である Prandtl 数 Pr，系の水平スケールと流体層の厚さの比であるアスペクト比 Γ である．コントロールパラメータである R が臨界値 R_c を越えると，熱伝導状態から対流状態へと分岐する．Γ が大きい場合にどのような対流パターンが形成されるのかという問題については，現在でも多くの研究がなされている．

これに関連して，いろいろな定常解の安定性が古くから調べられているが，中でも平行ロール解の安定性は Busse らによって詳しく調べられ，様々な不安定性が見出されるとともに，パラメータ空間での平行ロール解の安定領域も見出され，Busse バルーンとして知られている[2,3)]．ところが，上下の壁面で流体が滑らない Rigid-Rigid 条件の下で，Prandtl 数 $\mathrm{Pr} \approx 1$ でアスペクト比 Γ が大きい場合，平行ロール解が安定であると予測されていた Busse バルーンの中で，Spiral-Defect-Chaos と呼ばれる，時間空間的に乱れた状態が存在することが，実験的[4,5)]，数値的[6-8)]な研究からわかってきた．

また，流体の滑りを許す Free-Free 条件においても，$\mathrm{Pr} < 0.543$ の場合，skewed-varicose 不安定により，R が R_c をわずかに越えたところでロールが不安定になる事が知られており[9)]，Busse らは熱伝導状態から時空カオスへの直接転移について研究した[10)]．また，Xi, Li & Gunton[11)] は Free-Slip の条件の下で，$\mathrm{Pr} = 0.5$，$\Gamma = 60$ のときに Boussinesq 方程式系を用いた数値実験を行い，R が R_c をわずかに越えたところで，解が時空カオス的挙動を示す事を見出し，$R \to R_c$ のとき，あるスケーリング則に従うことを示した．

一方，このような対流の形成過程を研究するモデルとして Swift-Hohenberg 型の方程式がいくつか提案されている．このタイプのモデルは，流体力学の基礎方程式系から合理的な仮定の下で合理的な手続きを経て得られるものではないという欠点をもつのであるが，鉛直座標依存性が消去されているため，Boussinesq 方程式系に比べて簡単である点，また，Newell-Whitehead 方程式と違って，短波長（ロールの間隔のスケール）成分と長波長成分の両方を含んでいる点で優れている．

この研究では，流体の滑りを許す Free-Free 条件の場合に，Manneville[12)] によって提案されたモデル方程式系を用いて，Xi, Li & Gunton の Boussinesq 方程式系の数値実験の結果をどの程度再現できるのかを調べる．

*1 大気海洋環境システム学専攻博士課程
*2 応用力学研究所，大気海洋環境システム学専攻

2. 方程式系と数値計算法

Manneville は Boussinesq 方程式から鉛直座標依存性を消去した，次のようなモデルを導出した[12]．

$$\tau_0 \frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon W - \frac{\xi_0^2}{4q_c^2}\left(\nabla_\perp^2 + q_c^2\right)^2 W \tag{1}$$
$$-gW\left(q_c^2 W^2 + (\nabla_\perp W)^2\right) - \tau_0\left(U_0 \frac{\partial W}{\partial x} + V_0 \frac{\partial W}{\partial y}\right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{Pr}\,\nabla_\perp^2\right)\nabla_\perp^2 \Psi_0 = \frac{1}{q_c^2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\nabla_\perp^2 W - \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\nabla_\perp^2 W\right), \tag{2}$$

$$\tau_0 = \frac{2}{3\pi^2}\left(1 + \mathrm{Pr}^{-1}\right),\ \xi_0^2 = \frac{8}{3\pi^2},\ g = \frac{1}{6\pi^4},$$
$$\mathrm{Pr} \equiv \frac{\nu}{\kappa},\ \mathrm{R} \equiv \frac{\alpha g d^3 \Delta T}{\kappa\nu}.$$

ここで，長さは流体層の厚さ d で，時間は d^2/κ で，速度は κ/d で，温度は $\kappa\nu/\alpha g d^3$ で無次元化されている．ただし，ν：動粘性係数，κ：熱拡散係数，α：熱膨張係数，g：重力加速度，ΔT：上面と下面の温度差，である．また，$\varepsilon \equiv (\mathrm{R} - \mathrm{R}_c)/\mathrm{R}_c \ll 1$ とする．R_c は臨界 Rayleigh 数，q_c は対応する臨界波数である．

水平方向に無限に広がった系では，Free-Slip の条件のもとで Boussinesq 方程式の熱伝導解の線形安定性を調べると，よく知られているように $\mathrm{R}_c = 27\pi^4/4$, $q_c = \pi/\sqrt{2}$ となる．W は鉛直速度成分を $\sin n\pi z$ (z: 無次元の鉛直座標) で展開したときの最低次の係数で，Ψ_0 は水平運動のうちで鉛直依存性をもたない部分の流れ関数である．U_0, V_0 は Ψ_0 を用いて，$U_0 = \partial\Psi_0/\partial y$, $V_0 = -\partial\Psi_0/\partial x$ と書ける．

数値的に方程式 (1), (2) を解くために，空間に関しては 2 次の中心差分法を，時間に関しては 2 次の Adams-Bashforth 法を用いた．また，平均流の計算には SOR 法を用いている．計算領域は 1 辺が $\mathrm{L} = 60$ の正方形 D であり，よってアスペクト比は $\Gamma = 60$ となる．格子点は 256×256 とした．境界条件は x, y 方向ともに周期境界条件とし，初期条件は W, Ψ_0 とも各格子点に，平均 0, 分散 1.0×10^{-3} のガウス分布を与えた．時間刻みについては，$\Delta t = 2.0 \times 10^{-4}$ とした．

3. 計算結果

Prandtl 数は文献 11) に合わせて $\mathrm{Pr} = 0.5$ とし，ε に関しては，$\varepsilon = 0.03 \sim 0.1$ まで 0.01 刻みで計算を行った．Fig. 1 は，$\varepsilon = 0.1$ での数値解の時間発展の様子を示したものである．これらの模様の黒い部分は，流体が上昇している ($W > 0$) 領域を，白い部分は流体が下降している ($W < 0$) 領域を表している．これを見ると，初期に与えた非常に小さな揺らぎが成長し，徐々に自己組織化された対流パターンへと移行していくのがわかる．しかし，ここで見られるパターンは，臨界波数に揃いながら配向も次第に揃っていき最終的に平行ロール型対流へと落ち着くという形成過程とは違い，時間空間的にある構造に落ち着くことはなく，絶えず変化している不規則な構造のように見える．

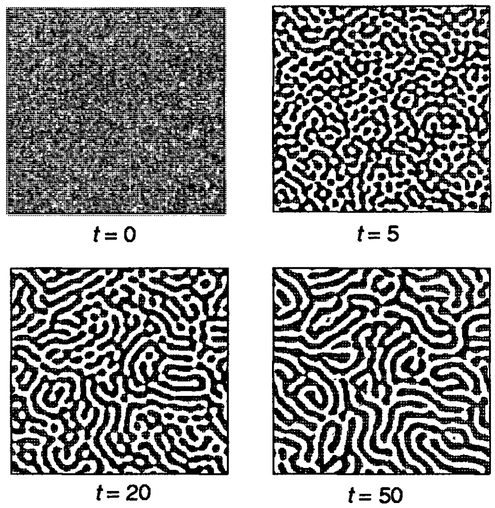

Fig. 1 Time development of convection pattern for Pr=0.5, $\varepsilon = 0.1$. The black parts show the regions of rising fluid ($W > 0$) and the white parts those of descending fluid ($W < 0$).

Fig. 2 は，$\varepsilon = 0.03$, 0.05, 0.1 のそれぞれについて $W_{\max}(t) = \max_D (|W(x, y; t)|)$ を計算したものである．これは，Fig. 1 に代表される時間発展の様子を振幅の飽和という観点から見たものである．つまり，初期の小さな揺らぎが線形成長し，しだいに非線形項が効いてくる事で，振幅がある値に飽和していく．また，飽和に要する時間は，ε が小さくなると長くなる傾向にあるということがわかる．

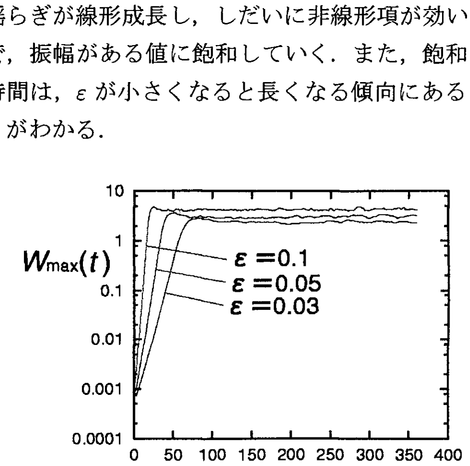

Fig. 2 Time developments of $W_{\max}(t)$. Upper line: $\varepsilon = 0.1$, middle line: $\varepsilon = 0.05$, lower line: $\varepsilon = 0.03$.

このような時間空間的に不規則な構造を統計的に特徴づけるために，次のような構造関数を導入する．まず，

$$J \equiv \sum_{\boldsymbol{q}} \overline{\widehat{W}^*(\boldsymbol{q}, t)\,\widehat{W}(\boldsymbol{q}, t)} \tag{3}$$

と置けば，構造関数は

$$S(\boldsymbol{q},t)=\frac{\widehat{W}^{*}(\boldsymbol{q},t)\,\widehat{W}(\boldsymbol{q},t)}{J} \tag{4}$$

で定義される．ここで，$\widehat{W}(\boldsymbol{q},t)$ は $W(\boldsymbol{r},t)$ の Fourier 成分であり，$\overline{F(t)}$ は $F(t)$ の時間平均を表す．また，

$$S(\boldsymbol{q})\equiv\overline{S(\boldsymbol{q},t)} \tag{5}$$

は時間平均した構造関数である．この時間平均した構造関数 $S(\boldsymbol{q})$ を用いて，モーメント

$$\overline{q^n}=\sum_{\boldsymbol{q}}|\boldsymbol{q}|^n S(\boldsymbol{q}) \tag{6}$$

を導入すれば，相関長は次のように書ける．

$$\xi=\left(\overline{q^2}-\overline{q}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Fig. 2 を見ると $t=100$ 程度で統計的な定常状態に達しているように見える．しかし，振幅は定常状態に達しているけれども一般に位相の緩和にはさらに時間を要するので，統計量を計算する際にはこの点注意が必要である．ここでは統計量 (3)∼(7) を計算するために，無次元時間で $t=360$ から $t=1080$ までのデータを用いた．$t=360$ という時間は振幅が緩和した時間の数倍であり，位相も統計的な定常状態に達していると期待できると判断したからである．

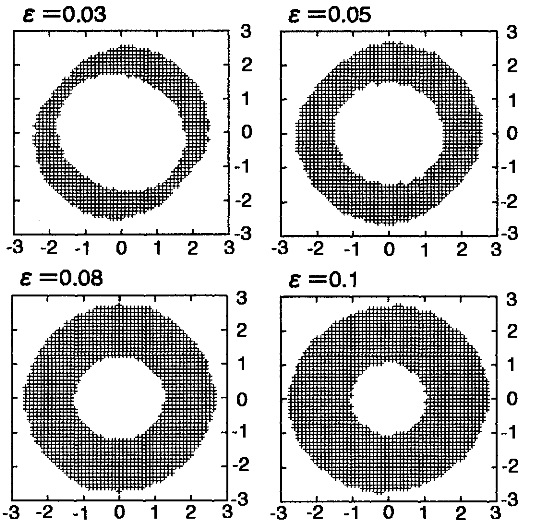

Fig. 3 Projection of time-averaged structure factor onto the $\boldsymbol{q}$-plane for Pr=0.5, $\varepsilon=0.03$, 0.05, 0.08, 0.1

Fig. 3 は，$\varepsilon=0.03$，0.05，0.08，0.1 での時間平均した構造関数の $\boldsymbol{q}$ 平面への射影を，それぞれ表したものである．これを見ると，$\varepsilon\sim0.1$ のとき，一見ランダムに見える不規則な構造は，対流構造の波数 $|\boldsymbol{q}|=q_c$ に対応する特徴的な長さを中心として揺らいでおり，平行ロール型対流とは異なり，$\boldsymbol{q}$ がバラバラな方向を向いたパターンとなっている事がわかる．また，このパターンは，この状態に落ち着いているわけではなく，$\boldsymbol{q}$ の方向は時間空間的に不規則に絶えず変化し続けている．ε が小さい場合も同じ事が言えるが，さらに長時間の計算を行えば，波数 $|\boldsymbol{q}|=q_c$ を中心として揺らぎながらも，対流ロールが，ある方向に揃っていく可能性は完全には否定できない．

この時間平均した構造関数を等方的であると見なせば，$S(\boldsymbol{q})$ を角度平均することができ，これを $S(q)$ と書こう．Fig. 4 は，$\varepsilon=0.03$，0.05，0.08，0.1 の場合に，q/q_c に対しての $qS(q)$ をプロットしたものである．$qS(q)$ を最大にする波数の大きさ $q_{\max}$ は，q_c より小さく，そのずれは ε が大きいほど大きい．このことは，Boussinesq 方程式系の数値計算の結果と一致している．また，Fig. 5 は，同じく $\varepsilon=0.03$，0.05，0.08，0.1 の場合に，$(q-q_{\max})\xi$ に対しての $qS(q)/\xi$ をプロットしたものである．ここで，ξ は (7) で定義される相関長である．Fig. 5 を見ると，$qS(q)$ は，臨界現象で見られるようなスケーリング則を満足している．つまり，$qS(q)/\xi=F[(q-q_{\max})\xi]$ に従っている．

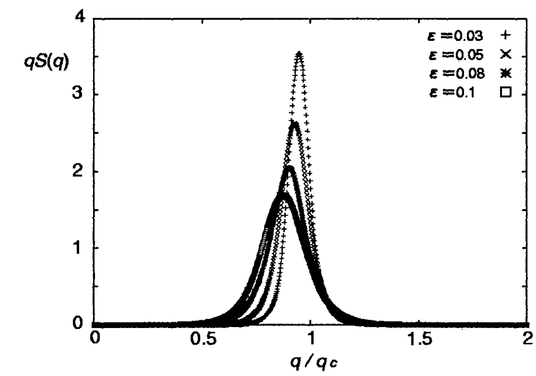

Fig. 4 Plots of $qS(q)$ vs q/q_c for $\varepsilon=0.03$, 0.05, 0.08, 0.1

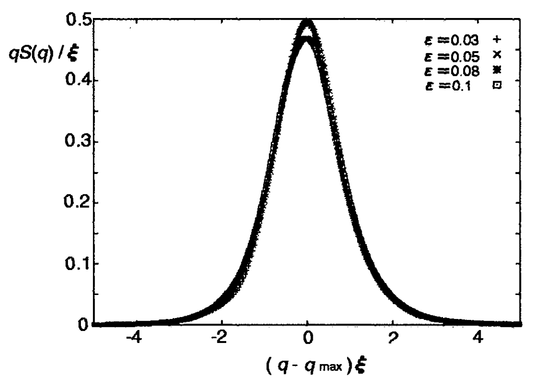

Fig. 5 Plots of $qS(q)/\xi$ vs $(q-q_{\max})\xi$ for $\varepsilon=0.03$, 0.05, 0.08, 0.1

また，相関長 ξ を ε の関数として計算を行った．Fig. 6 は ξ^{-2} と ε との関係を表したものである．これは，べき則 $\xi=\xi_0(\varepsilon-\varepsilon_c)^{-1/2}$ に従っていることを表している．

ここで，$\xi_0 = 1.112$，$\varepsilon_c = 0.006$ である．ε_c は対流発生点（$R \to R_c$）を表し，本来 0 とおくべきであるが，計算領域が有限であるため，有限にとどまると考えられる．これから ε が対流発生点に近づくにつれて，相関長 ξ がべき則に従って発散していることがわかる．つまり，熱伝道状態から，対流発生と同時に，時間・空間的に乱れた対流構造へと直接遷移していることがわかる．ただし，このことは時間平均した構造関数が等方性であるとみなした結果であることに注意すべきである．この等方性は特に ε が小さくなると必ずしも成り立つことが確認されたわけではない．この点は Xi らの論文 [11] でも確認されているわけではないように思われる．

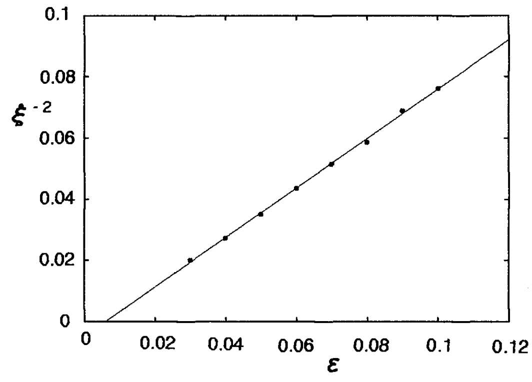

Fig. 6 A plot of ξ^{-2} vs ε. The solid line corresponds to $\xi^{-2} = \xi_0^{-2}(\varepsilon - \varepsilon_c)$ with $\xi_0 = 1.112$

4. 結論

今回，Prandtl 数が 0.5 における臨界値近傍での系の振る舞いを，Manneville によって提案された Swift-Hohenberg 型モデルを使って数値的に調べたが，Boussinesq 方程式系を直接数値計算で解いたものと比較して，次のようなことが言える．

1. $Pr = 0.5$ において，臨界値近傍での Boussinesq 方程式系による振る舞いと同様に，ロール構造ではなく時間・空間的に乱れた様相が現れ，これを再現できるように思われる．
2. Fig. 5 からわかるように，臨界値近傍において，$qS(q)$ はスケーリング則を満足している．しかし，Boussinesq 方程式系の直接数値計算の結果が左右非対称であるのに比べて，左右の対称性がかなり強い．
3. Fig. 6 からわかるように，相関長 ξ は ε の関数であり，ε が転移点に近づくと，相関長は発散している．つまり，転移点において，時間空間的に不規則な構造が直接に現れている．この結果は，Boussinesq 方程式系の直接数値計算のものと類似している．しかし，べき則 $\xi = \xi_0(\varepsilon - \varepsilon_c)^{-1/2}$ において，直接数値計算で求められた ξ_0，ε_c は，それぞれ 0.78，0.005 であり，ξ_0 に関しては，このモデルで求めた $\xi_0 = 1.112$ と比較すると，モデルの方が約 1.5 倍ほど大きく，相関長は長くなる．

本研究では，Swift-Hohenberg 型のモデルを用いて，Boussinesq 方程式系の直接数値計算から得られた結果を，時間平均した構造関数の等方性を仮定することによって定性的には再現できたように思われる．しかし，ε が 0 に近い場合，過渡状態をはたして超えているか，という問題点がまだ残っている．これを確かめるためにはさらに長時間の計算を実行する必要があるが，そのためにはスキームの精度も上げるべきと考えられる．今後は，最終的にどのような対流構造に落ち着くかという事を，安定性も含めて検討したい．

参考文献

1) M. C. Cross & P. C. Hohenberg: Rev. Mod. Phys. 65 (1993) 851.
2) A. Schlüter, D. Lortz & F. Busse: J. Fluid Mech. 23 (1965) 129.
3) F. H. Busse & R. M. Clever: *New Trends in Nonlinear Dynamics and Pattern-Forming Phenomena* (ed. P. Coullet & P. Huerre, Plenum Press, 1990) 37.
4) S. W. Morris, E. Bodenschatz, D. S. Cannell & G. Ahlers: Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 2026.
5) Y. Hu, R. E. Ecke & G. Ahlers: Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 391.
6) M. Bestehorn, M. Fantz, R. Friedrich & H. Haken: Phys. Lett. A 174 (1993) 48.
7) H. W. Xi, J. D. Gunton & J. Viñals: Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 2030.
8) W. Decker, W. Pesch & A. Weber: Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 648.
9) F. H. Busse & E. W. Bolton: J. Fluid Mech. 146 (1984) 115.
10) F. H. Busse, M. Kropp & M. Zaks: Physica D 61 (1992) 94.
11) H. W. Xi, X. J. Li & J. D. Gunton: Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 1046.
12) P. Manneville: J. Phys. (Paris) 44 (1983) 759.