九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

ノンホロノミック移動ロボットの動力学を考慮した軌道計画

盛永, 明啓

https://doi.org/10.15017/1654876

出版情報：九州大学, 2015, 博士（工学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

ノンホロノミック移動ロボットの動力学を考慮した軌道計画

工学府
機械工学専攻
盛永　明啓

目 次

第 1 章　緒言 **1**
1.1　研究背景 1
1.2　ノンホロノミックシステムの軌道計画問題 4
1.3　動力学を考慮した軌道計画 6
1.4　本論文の目的 7
1.5　本論文の構成 11

第 2 章　2 軸慣性ロータ駆動球型ロボットの軌道計画 **14**
2.1　研究背景 14
2.1.1　転がり接触する球体の軌道計画 14
2.1.2　球型ロボットの軌道計画 16
2.1.3　本章の目的 20
2.2　2 軸慣性ロータ駆動型球型ロボットのモデル化 22
2.2.1　接触座標系 22
2.2.2　運動学モデル 24
2.2.3　動力学モデル 26
2.2.4　逆動力学計算 31
2.2.5　角運動量保存 32
2.2.6　動力学的な拘束を受ける球型ロボットの運動 33
2.2.7　2 軸慣性ロータ駆動型球型ロボットの状態方程式 35
2.3　軌道計画 38
2.3.1　数学的準備 38
2.3.2　可制御性 40
2.3.3　軌道計画手法の概要 42
2.3.4　制御モデルの近似 44
2.3.5　Iterative Steering 49
2.3.6　特異点回避のための入力 56

2.3.7 シミュレーション 58
2.4 小括 66

第 3 章 車両ロボットの滑りを活かした軌道計画問題 68
3.1 研究背景 68
3.1.1 車両ロボット 68
3.1.2 車両ロボットのモデル・軌道計画・制御 69
3.1.3 ドリフト走行 74
3.1.4 本章の目的 76
3.2 車両モデル 77
3.2.1 タイヤ摩擦モデルに関する関連研究 77
3.2.2 拡張クーロン摩擦モデル 81
3.2.3 車両モデル 85
3.2.4 旋回半径 91
3.2.5 タイヤが滑り始める条件 92
3.3 ドリフト車庫入れ問題 95
3.3.1 問題設定 95
3.3.2 軌道計画手法 96
3.3.3 シミュレーション 102
3.4 小括 106

第 4 章 結言 108
4.1 球型ロボット 108
4.2 ドリフト車庫入れ 110
4.3 今後の課題 111

謝 辞 113

参考文献 114

第1章　緒言

1.1　研究背景

私たちの周りに存在する機械システムや物理現象の多くは，入力と出力が非線形な関係となる，非線形システムとして表される．非線形システムを対象とする制御問題では，非線形なシステムを線形システムへ近似することにより，すでに体系化された線形制御理論を適用するアプローチが行われてきた．しかし，非線形システムには，本質的に線形近似によっては制御ができないものが存在する．その一つとして，ノンホロノミックシステムが挙げられる．

Fig. 1.1 に示すように，自動車を隣の駐車スペースへ移動させることを考える．自動車は，前輪の進行方向へしか進むことができず，操舵角度は制限されているため，直接横方向へ移動させることはできない．しかし，いわゆる「切り返し」と呼ばれる操作を行うことによって，真横に自動車を移動させることができる．この時，自動車の自由度は平面位置と姿勢の 3 つに対して，アクセル（ブレーキ）による車体の速度と前輪の操舵角の 2 つの操作量によって制御を実現している．また,「切り返し」を組み合わせることにより，Fig. 1.2 のように限られたスペースにおいても車体の位置と姿勢を任意自由に移動させることが可能となる．

自動車車輪の進行方向へしか移動できないという制約は，ノンホロノミック拘束 (nonholonomic constraint) として表される．ホロノミック拘束 (holonomic constraint) は，拘束条件が一般化座標 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ と時間 t としたとき，次のような代数方程式によって表される拘束条件である．

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^l \tag{1.1}$$

ここで，l は独立な拘束の本数である．また，式 (1.1) のように表すことができない

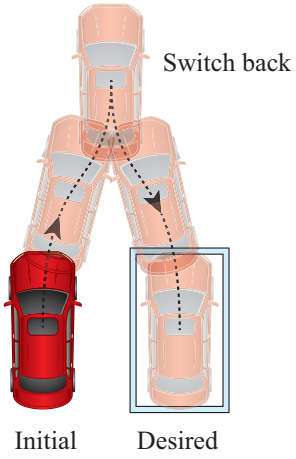

Fig. 1.1 Parking a vehicle with one switch back.

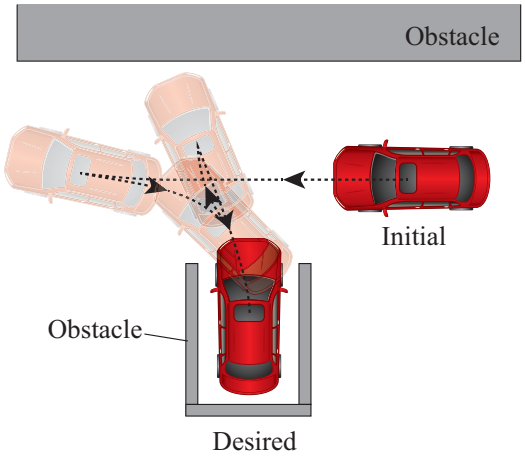

Fig. 1.2 Parking a vehicle with several switch back.

拘束をノンホロノミック拘束と呼ぶ．次のような微分方程式の形で表される拘束条件を考える．

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}, t) = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^l \tag{1.2}$$

式 (1.2) が積分によって式 (1.1) の形に帰着できない場合，式 (1.2) は非ホロノミック拘束となる．

上述の例において自動車の車輪が横滑りしないという制約は，車輪の位置 (x, y) と姿勢 θ として，一般化座標を $\boldsymbol{q} = (x, y, \theta)$ とすると次のように表される．

$$-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta = 0 \tag{1.3}$$

式（1.3）は車体速度と姿勢に関する式となっており，位置と姿勢に関する拘束条件とすることができないため，ノンホロノミック拘束となる．特に，式 (1.3) のように，速度に関するノンホロノミック拘束は，次のようなパフ形式によっ表される．

$$A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0} \tag{1.4}$$

ここで，$A(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{l\times n}$ はフルランクな行列である．式 (1.4) の微分方程式の積分可能性については，Frobenius の定理により確かめられる．

ノンホロノミック拘束を受けるシステムは，自動車の例のみならず，以下のようなものが考えられる [1].

- 車輪が横滑りしないという速度拘束を受けるシステム（車両ロボット，トレーラー，蛇ロボット）
- 体側方向に推進力が無い，または横滑りがないという拘束を受けるシステム（水中移動体，水面移動体，魚ロボット）
- 転がり拘束を受けるシステム（円盤・球体の制御，物体の把持操作）
- 角運動量保存則による回転速度拘束を受ける浮遊機械システム（宇宙ロボット，アクロボット）
- 一端が接地している場合に加速度拘束を受けるシステム（劣駆動マニピュレータ，倒立振子，ホッピングロボット）

上記のような非ホロノミック拘束を受けるシステムの多くは，状態変数を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，入力 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ とすると，入力に対して線形なアフィンシステムとして表される．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) u_i \tag{1.5}$$

ここで，$f(\boldsymbol{x})$ をドリフト項，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ を入力ベクトル場と呼ぶ．または，次式のようなドリフト項を持たない対称アフィンシステムとなる．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}) u_i \tag{1.6}$$

一般に，劣駆動マニピュレータのような加速度拘束のあるシステムはドリフト項を含むアフィンシステム，車輪が横滑りしないような速度拘束の場合は対称アフィンシステムとなる．

ノンホロノミック拘束を受けるシステムの特徴として，一般化座標の数 n に対して制御入力の数 m が少ない劣駆動システムとなるが，目標とする状態への制御が可能となることがある．拘束条件がホロノミック拘束として代数方程式の形で表され

た場合，それぞれの変数を独立に制御することはできなくなるが，積分ができないことによって制御を行う余地が残されることになる．ノンホロノミックシステムの制御は，ロボット工学においても，劣駆動ロボットの制御や，劣駆動特性を持つ人や生物の技能・動作の体系化を行う上で必要となる．特に，移動ロボットについては，自動運転車両を始めとして，人が操作するのではなくロボットが自律して目的地へと到達することが求められている．ノンホロノミックシステムの制御を行うためには，人が行う「切り返し」のような操作を体系化し，ロボットへの目標制御入力として設計する必要がある．

1.2　ノンホロノミックシステムの軌道計画問題

ノンホロノミックシステムに関する研究は，軌道計画問題を対象としたものが多い．軌道計画問題は，対象とするシステムについて，与えられた初期状態と目標状態を結ぶ軌道及び入力を求める問題である．自動車の切り返しのような操作について，人が操作するのではなく，ロボットが自律して移動することが求められる場合，軌道計画問題を解く必要がある．

軌道計画を行う際，事前に初期状態と目標状態の間に解となる軌道が存在するかを確かめる必要がある．一般に，ある初期状態を有限時刻内で，有界な入力を用いて，目標状態へ移すことができることは，可制御性 (controllability) と定義される．非線形システムの場合は，大域的に可制御であることを示すことは難しく，代わりに局所的な可制御性を示すことになる．ある状態について，ある開集合へ遷移させることができる場合を局所可到達 (locally accessible)，状態の近傍へ遷移させることができる場合を局所可制御 (locally controllable)，さらに局所可制御かつ時間が任意に小さく選べる場合を微小時間局所可制御 (small time locally controllable(STLC)) という．全ての点で微小時間局所可制御であるとき，システムは可制御となる．

システムの可制御性が確かめられたとして，軌道計画問題について考える．非ホロノミックシステムの軌道計画は，特に式 (1.6) の対称アフィンシステムとして記述されるシステムに関して，Brockett の定理 [2] により PID 制御のような連続状態フィードバック制御によっては制御不可能であることが示されている．また，対称

アフィンシステムの線形近似により得られるシステムは不可制御となるため，線形制御理論の適用もできない．ノンホロノミックシステムは，非線形システムの中でも特に制御の困難なシステムとしてこれまでに多くの研究がなされている．

一部のノンホロノミックシステムは，chained form や power form と呼ばれる，正準形に変換することが可能であることが知られている．これらのシステムは大域的に可制御であり，ノンホロノミックシステムの制御を正準系の制御に置き換えている．状態変数が 3 次または 4 次，入力が 2 つの対称アフィンシステムは，常に chained form へ変換できることが知られている．また，n 次 2 入力の対称アフィンシステムが chained form へ変換できることは，chained form の変換定理より確かめることができる [3]．Khennouf ら [4] は，chained form に対して，ノンホロノミックシステムの特徴を利用し，不変マニホールドを用いた擬似連続指数安定化制御を提案している．Luo ら [5] は，power form と呼ばれるクラスのシステムに対して，Khennouf らと同様にして安定化手法の提案をしている．ノンホロノミックシステムを正準系に変換することができれば，上記の軌道計画手法を適用できる．

また，システムのフラットと呼ばれる性質を利用した軌道計画手法が提案されている．フラットなシステムとは，フラット出力と呼ばれる，非線形システムを等価的な線形システムに変換することができる関数が存在するシステムのことである [6]．5 変数 3 入力を持つ可制御な対称アフィンシステムはフラットであることが知られているが [7]，一般にフラット出力の導出は困難であり，すべてのシステムにフラット出力が見つかるという保証もない．

ノンホロノミックシステムの軌道計画問題を，最適制御問題に置き換えて解くことも検討されている．初期状態と目標状態を境界条件とし，入力や軌道長さを評価関数として最小化する問題としており，数値的に解くだけでなく，微分幾何学からのアプローチにより解析的に最適解を求める研究 [8] も行われている．また，3 変数と 2 入力を持つ nilpotent なシステムに対する最適制御が Sachkova ら [9] によって提案されている．また，同じく Sachkova[10] は nilpotent でないシステムを nilpotent システムとして近似することで，軌道計画を行う方法も提案している．

また，劣駆動マニピュレータやアクロボット等は，ドリフト項を含むアフィンシ

ステムとして表される．これらのシステムは，Sussmann の定理 [11] によって可制御性の判定ができない場合があり，軌道計画手法も対称アフィンシステムへのものと比較して複雑となる．例として，アクロボットのような角運動量保存則に従うようなシステムに対して，初期角運動量を与えると，ドリフト項のあるアフィンシステムとして表される．Godhavn ら [12] はバンバン制御を用いた制御手法を，Kiyota ら [13] は，時間軸状態制御を用いた制御手法を提案している．

上記に挙げた軌道計画手法は，全てのノンホロノミックシステムについて適用できるわけではない．状態方程式の形 (状態変数や入力の数) によっても適用可能な軌道計画手法は異なる．軌道計画手法を選択する上で，対象とするノンホロノミックシステムの構造を理解することが必要となる．

1.3　動力学を考慮した軌道計画

式 (1.4) のような速度に関するノンホロノミック拘束は，そのシステムの運動を記述する運動学モデルを導出する．軌道計画問題の多くは，運動学モデルを対象としている．この時，運動学モデルでは，入力は速度として与えることになるが，実際の機械システムにおける入力はアクチュエータの発生するトルクとなる．速度に関する拘束を受ける機械システムの運動方程式は，次のように表される．

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\tau} \tag{1.7}$$

ここで，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は正定対称な慣性行列，$c(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \in \mathbb{R}^n$ は遠心力・コリオリ力をまとめたベクトル，$B(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ はフルランクな行列，$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^m$ は入力トルクである．$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ はラグランジュの未定乗数であり，速度拘束 (1.4) が満たされるように発生される必要がある一般化力である．システムの運動は，運動方程式 (1.7) に拘束条件 (1.4) が加わったものとして扱う必要がある．

速度拘束を受ける機械システムの運動方程式 (1.7) は，速度拘束と速度拘束を取り去った縮小された運動方程式に分解することができることが知られている．式 (1.7) の左から $\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{q}) = 0$ を満たすような行列 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{n\times(n-l)}$ を掛けて式を整理

すると

$$\bar{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{\nu}} + \bar{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\nu} = \bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\tau} \tag{1.8}$$

ここで，$\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{n-l}$ はシステムの運動を記述するための速度ベクトル，$\bar{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{(n-l)\times(n-l)}$，$\bar{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q})\left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\right) \in \mathbb{R}^{n-l}$，$\bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{(n-l)\times m}$ である．さらに，運動学モデルは

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\nu} \tag{1.9}$$

となる．運動学モデル (1.9) は対称アフィンシステムとなっており，前節で述べたような軌道計画手法の適用ができる．軌道計画問題を解いて得られた軌道 $\boldsymbol{q}(t)$ および速度入力 $\boldsymbol{\nu}(t)$ を動力学モデル (1.8) に代入することにより，実際に機械システムに与える入力トルクの計算を行う．動力学モデル (1.8) は入力速度の時間微分 $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ を含むが，$\bar{B}$ が逆行列を持てば，次のような変換

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\boldsymbol{B}}^{-1}(\boldsymbol{q})\left(\bar{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v} + \bar{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\nu}\right) \tag{1.10}$$

を適用すると，$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{v}$ となる．さらに，目標速度を $\boldsymbol{u}$ とするフィードバック

$$\boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nu}) \tag{1.11}$$

として，k を大きくとれば，近似的に $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{u}$ とできる．つまり，運動学モデルにおいて入力を $\boldsymbol{u}$ とした軌道計画を解くことで，必要な入力トルクを計算することができ，システムの動力学を考慮した軌道計画を行ったことに等しくなる．または，運動学モデル (1.9) と入力速度に関する微分方程式 $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{v}$ の連立システムとして軌道計画を行うことも考えられるが，モデルにドリフト項が現れるため，運動学モデルのみを考慮して行う軌道計画と比較して困難な問題となる．

1.4　本論文の目的

前節で述べたように，速度拘束を受ける機械システムに対して，式 (1.10) のような入力変換が可能であれば，システムの運動方程式から運動学モデルを切り離すこ

とができ，比較的よく研究されている対称アフィンシステムに対する軌道計画手法が適用できる．しかし，速度拘束以外にもシステムが持つ本質的な非線形性が加わると，軌道計画問題はより困難なものになる．

例えば，式 (1.10) において，入力トルクにかかる行列 $\bar{B}(\boldsymbol{q})$ が逆行列を持たない場合，軌道計画により得られた運動を実現するための入力トルクが計算できなくなる．言い換えると，任意の速度入力 $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{n-l}$ を，入力トルク $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^m$ によって実現できないということになる．一般に，$m = n - l$ の時に行列 $\bar{B}(\boldsymbol{q})$ は逆行列を持つことが知られている [14]．$m < n - l$ の時，縮小された動力学モデル (1.8) は劣駆動となり，速度拘束に加えて力学的な拘束が加わる．この時，軌道計画だけでなく可制御性についても，システムの動力学的モデルを含めて解析を行う必要がある．

既存研究において，速度拘束を受ける機械システムの軌道計画について，本質的に動力学について考慮したものは少ない．本論文では，下記に示すシステムの動力学的な要素が無視できない (A) 球型ロボットの軌道計画，(B) ドリフト車庫入れの 2 つの問題について考え，その軌道計画手法の構築を目的とする．Fig. 1.3 は，2 軸の慣性ロータによって駆動される球型ロボットである．本球型ロボットは，球殻と互いに直交する 2 軸に配置された慣性ロータによって構成されており，慣性ロータの回転によって発生する反力を利用して球殻が転がるという駆動方式を用いている．慣性ロータは，1 つの軸に対して 2 つ，重心が球殻の中心となるように配置されており，各回転軸の慣性ロータとロボット全体の重心は常に球殻の中心に位置する．

球型ロボットの軌道計画問題では，球殻の平面位置と姿勢について，初期状態から目標状態へと移す軌道と慣性ロータへの入力トルクを求めることが目的となる．球型ロボットの運動は，滑らずに転がるという制約を仮定すると，式 (1.4) のようなパフ形式として表される速度に関するノンホロノミック拘束を受けるノンホロノミックシステムとなる．さらに，鉛直軸回りの回転が常にゼロとなるような制約を追加した場合，Fig. 1.4 に示すような ball-plate システムと等価となる．特に，この時の球体の運動を純転がり運動と呼ぶ．ball-plate システムは，chained form への変換ができない，flat でない，nilpotent システムでもないという特徴があり，特に制御の困難なノンホロノミックシステムとされている．一方で，大域的に可制御となることが

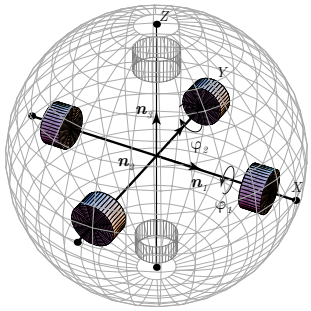

Fig. 1.3 Spherical rolling robot actuated by two internal rotors. Input can not be computed by equation (1.10). Here $n = 5$, $m = 2$, $l = 2$ and $m < n - l$.

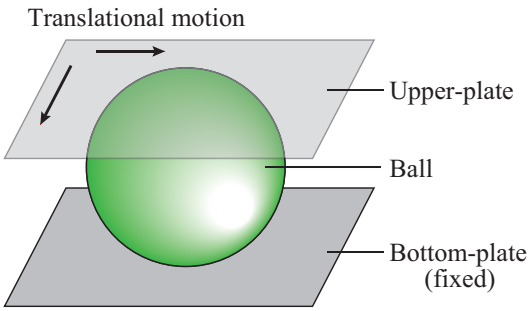

Fig. 1.4 Ball-plate system. Input can be computed by equation (1.10). Here $n = 5$, $m = 2$, $l = 3$ and $m = n - l$.

確かめられており，三平ら [15] は時間軸状態フィードバック制御により，目標状態へ制御できることを示している．また，Oriolo ら [16] は，nilpotent approximation によってモデルを近似して球体の軌道を計算し，iterative steering と呼ばれるアルゴリズムと合わせて軌道計画を行っている．上記の軌道計画では，入力を球体の角速度とした運動学のみを考慮している．

(A) 球型ロボットの軌道計画

また，球型ロボットの場合は平面上を自由に転がることができるため，スピンは物理的に存在する．よって，運動学モデルにおける入力の数は 3 つになり，differentially flat となるため [7]，ball-plate システムよりも幅広い軌道計画手法が適用可能となる．

次に，軌道計画における球型ロボットの動力学的影響について考える．運動学モデルにおける入力が球殻の角速度であるのに対して，実際の入力は慣性ロータに働くトルクである．この時，球型ロボットに取り付けられる慣性ロータの数によって軌道計画の難しさが変わってくることになる．慣性ロータが 3 軸に配置されている場合は，運動学モデルの軌道計画から得られた 3 つの速度入力について，逆動力学計算 (1.10) により必要な入力トルクが計算できる．しかし，本研究で対象とする球型ロボットのように慣性ロータが 2 軸のみであった場合は，入力変換 (1.10) は計算

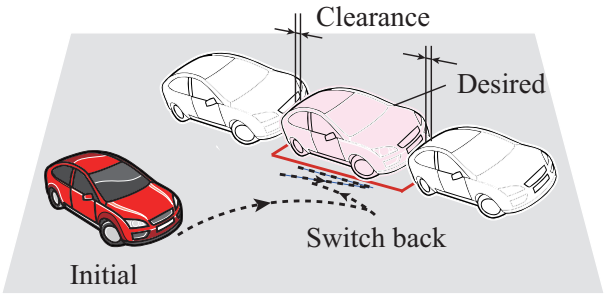

Fig. 1.5 Parking problem for the vehicle.

できず，動力学的な拘束として，ロボットの動力学的なパラメータを含む角速度と姿勢に関する拘束条件が存在するため，任意の角速度を発生させることができない．実際に，さらに，第 2 章で明らかにするように，鉛直軸回りの回転がゼロとなるのは球殻が直線状を転がる場合のみであり，軌道計画においてスピンは無視できない存在となる．この時，球型ロボットの軌道計画問題において，ロボットの運動学のみではなく動力学も考慮する必要がある．

(B) ドリフト車庫入れ

車両ロボットの軌道計画について考える．車両ロボットは，車輪が滑らずに転がるという制約が，速度に関する不可積分な拘束条件となり，運動学モデルがノンホロノミックシステムとなる．車両ロボットの運動学モデルを対象とした軌道計画問題は，ノンホロノミックシステムの典型的な例題としてこれまでに数多くの研究がなされてきた．一方で，実際の車両ロボットにおいては，雪道や砂地などを走行する場合，車輪の滑りが発生する．既存研究において，車輪の滑りは軌道計画問題の中では無視し，軌道追従制御における外乱として扱われる．制御の対象が車両の位置と姿勢のみの場合は，自動車の車庫入れ問題のように運動学モデルについて軌道計画を行い，軌道追従制御を行うか，速度を小さく設定することで滑りは存在しないものとして扱うことができる．

Fig. 1.5 のように，前後に障害物があるような場所への車庫入れを行う場合を考える．障害物の間に十分な間隔があれば切り返しによって目標状態へ到達できる．し

かし，間隔が狭く限りなくゼロに近い場合，障害物に接触せずに切り返しを行うことは不可能であり，目標状態へ到達できない．障害物が存在する場合の車両ロボットの軌道計画については，文献 [17][18] 等で扱われているが，本問題に適用できない．そこで，本問題を軌道計画において車輪の滑りを積極的に用いることによって解くことを考える．車輪を滑らせて，車体を横滑りさせることができれば，障害物の間の目標状態へ到達することが可能となる．このように，車両ロボットについて車輪を滑らせることにより車庫入れをする軌道計画問題をドリフト車庫入れ問題と呼ぶ．ドリフトとは，自動車の運転において，車輪が滑っている状態を積極的にコントロールする運転技術のことであり，ラリー競技等の路面が滑りやすい環境で行われるレース等で用いられる．

ドリフト車庫入れ問題においては，滑りを外乱ではなく制御対象として扱う必要がある．この時，滑りによって生じる摩擦力は転がり摩擦よりも大きく，車両ロボットの運動に与える影響を無視できない．粘弾性体であるタイヤと路面の間に生じる摩擦力が複雑なことは知られており，自動車工学の分野においてもシミュレーションや車両の運動解析を目的として様々なモデルが提案されている．軌道計画を行う上では，摩擦モデルは可能な限り単純化されたモデルが望ましい．車輪が滑っている時，車両モデルは劣駆動システムとして表される．また，不可制御となるため，車輪が滑っている状態を軌道計画問題として解くことは困難である．

そこで，本問題を解くために，ノンホロノミック拘束を受ける車両と滑っている状態の車両の運動を組み合わせることを考える．しかし，既存研究の中では，2 つは異なるシステムとして扱われている．そこで，拘束条件が満されるように発生されなくてはならない一般化力であるラグランジュ乗数と，滑りによって発生する摩擦力を連続的に扱うことのできる，タイヤ摩擦モデルを定義する．また，本摩擦モデルを適用した車両モデルについて，動力学を考慮した軌道計画を行う．

1.5　本論文の構成

本論文の構成を Fig. 1.6 に示す．

第 2 章では，2 軸慣性ロータにより駆動される球型ロボットの軌道計画問題を扱

う．まず，球型ロボットについて研究背景と関連研究についてまとめる．次に，球型ロボットのモデルについて，運動学モデルおよび動力学モデルの導出を行う．運動学モデルは，Montana ら [19] の転がり接触モデルと，非ホロノミック拘束から得られる運動学モデルの 2 通りの導出方法を示す．また，動力学モデルはダランベールの原理による導出を行う．さらに，本ロボットの運動における特徴であるスピンに関する拘束と，可制御性の解析より軌道計画問題の解の存在性に関する確認及び適用可能な軌道計画手法について考察する．最後に，システムの特異点を回避するための軌道計画手法の提案と，シミュレーションによる検証を行う．

第 3 章では，車両ロボットのドリフト車庫入れを軌道計画により行うことを考える．はじめに，関連研究について，車両のモデル化及び制御に関してまとめる．次に，滑りを含めた軌道計画のための摩擦モデルを提案し，車両モデルの導出を行う．次に，ドリフト車庫入れについて問題設定を行った後，軌道計画手法について述べる．モデル及び軌道計画は，1 輪車両および前後 2 輪車両を対象として，それぞれに対して行う．

最後に，第 4 章で本論文のまとめと今後の研究課題について述べる．

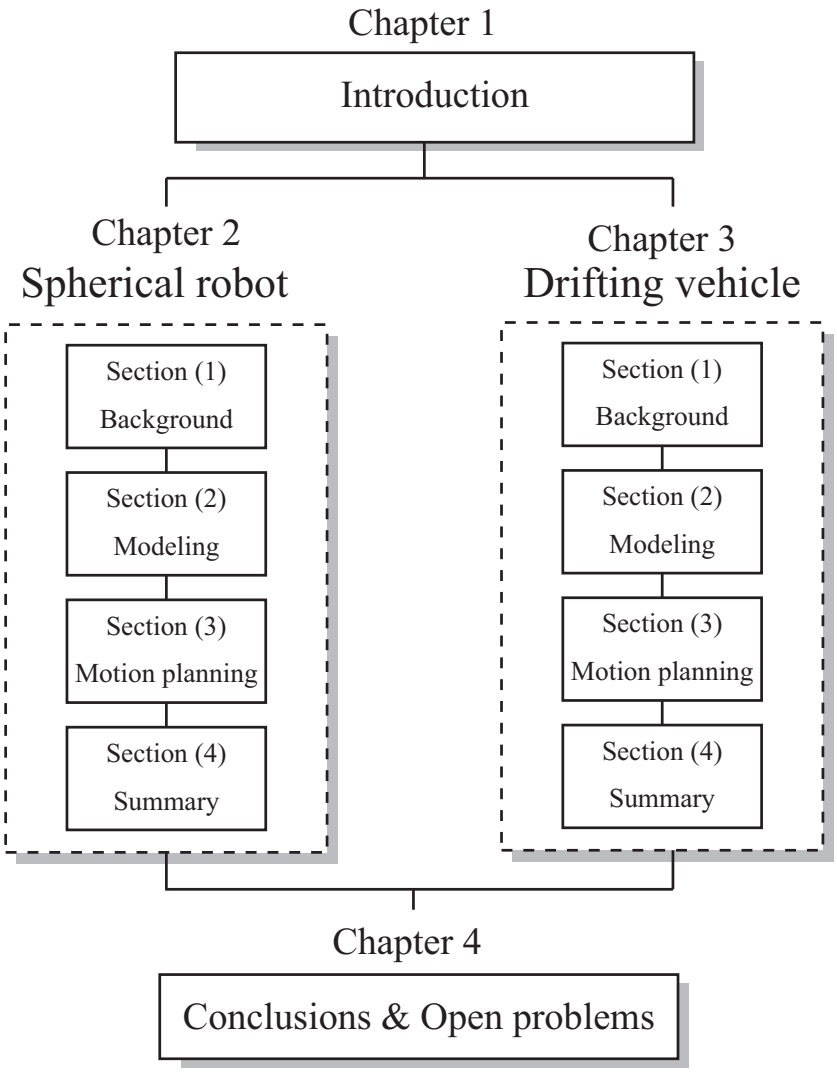

Fig. 1.6 Relationship between chapers

第2章　2軸慣性ロータ駆動球型ロボットの軌道計画

2.1　研究背景

球型ロボットは，球体の形状をしており，転がることにより移動するロボットである．転がりによる移動方式は，脚の歩行と比較すると，エネルギー効率に優れている．また，球殻により内部の機構が守られているため，転倒等による衝撃を受けて動けなくなるリスクが無い点で優れている．さらに，同じ転がりによる移動方式でも車輪型のように移動方向が制限されることがなく，全方向への移動が可能となる．

球型ロボットに求められる基本的なタスクは，現在の位置から目標の位置まで移動することである．さらに，カメラ撮影といった付随するタスクを実行するためには，位置だけでなく姿勢に関しても，目標とする状態へ到達するようにロボットを操作しなければならない．人が操作するのではなく，ロボットが自律してタスクを実行するためには，現在の状態から目標とする状態へと移動するための軌道と，その軌道を生成するための入力を軌道計画問題から導く必要がある．

2.1.1　転がり接触する球体の軌道計画

球体が平面と点で接触し，滑らずに転がると仮定したとき，転がり接触と呼ばれる．転がり接触は，ノンホロノミックな運動学的拘束条件として表現可能であり，球型ロボットの運動学モデルは対称アフィンシステムとしてモデル化される．また，球体の転がり接触は，ball-plate システムとしてロボットハンドの球状の指先と，把持物体間の接触運動を表現する際にも用いられている．Montana[19] らは，2 つの互いに接触する剛体の運動を，幾何学的パラメータによって接触点の運動として定義し

ている．この場合，球体と平面の幾何学的パラメータを代入することによって，球型ロボットの運動学モデルを導出することができる．さらに，Sankar ら [20][21] は 2 つの剛体の転がり接触を，加速度の次元まで含めてモデル化及び解析を行っている．

球体の転がり接触を表現するための一般化座標は，平面位置 (x, y) と球体の姿勢を表すオイラー角 (θ, ϕ, ψ) の，合わせて 5 つとなる．また，速度入力は球体の慣性座標系における角速度 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ となる．特に ball-plate システムでは，平面を動かすことにより球体を操作することを考えるため，鉛直軸回りの角速度 ω_z をゼロと置く場合がある．このとき，球体の運動を純転がり (pure rolling) と呼ぶ．

軌道計画における解となる軌道が存在するかは，可制御性によって確かめられる．Li ら [22] は，球体と平面の接触点運動において，2 つの状態の間に軌道が存在することを，Chow の定理 [23] から示している．また，Banavar ら [24] は，Li らと同様の方法によって球型ロボットの運動学モデルについて可制御性を確かめており，オイラー座標系の設定によって特異点となる点が現れるが，座標系の設定の変更により回避可能であるとしている．5 つの状態変数と 2 つの入力によって表される球体の純転がり運動学モデルは，正準系への変換ができず，flat 出力が見つかっていない，また nilpotent でないことから [16]，特に軌道計画が困難なノンホロノミックシステムとされていた．これまでに提案された軌道計画手法は，大きく分けて次の 3 つとなる．

1 つ目の方法は，時間軸状態フィードバック制御 [15] である．本手法では，ball-plate システムを対象としており，上側の平面の平行移動と回転により球体の位置と姿勢を制御することを目的としている．時変係数をもつ入力によって，Brockett の定理を回避している．

2 つ目の方法は，nilpotent approximation と iterative steering を組み合わせたもの [16] である．nilpotet 近似によって得られるシステムは，triangular form と呼ばれる構造をしており，さらに多項式の関数として各変数のダイナミクスが表現されるため，解析的にフィードフォワード入力の計算が可能となる．さらに，近似システムに対するフィードフォワード入力を繰り返し与えることにより，元のシステムを目標状態へ収束させる．

3 つ目の方法は，幾何学的なアプローチである．構成的な軌道の組み合わせを用いたものであり，球面上の接触点軌道と，対応する平面上での接触点軌道について，適切なパラメータを解析的に計算することにより軌道計画を行う．上記 2 つの方法がフィードバック制御であるのに対して，幾何学的なアプローチによる方法はフィードフォワード制御となる．Das ら [25] は，平面上の接触点軌道を伸開線 (involute) によって与えることで軌道計画を行っている．原田ら [26] は球面上で測地三角形を組み合わせた軌道を，鈴木 [27] は滑らかな軌道として円を組み合わせた軌道を用いた軌道計画手法を提案している．また，中島ら [28] も，球面上における閉軌道の組み合わせによる軌道計画を提案している．Jurdjevic[29] は，ball-plate システムの軌道計画問題を，軌道長さが最短となるような最適制御問題として設定し，さらに接触点軌道をオイラー梁 (Euler's elastica) として解析的に求めている．

いずれの軌道計画手法においても，ノンホロノミックシステムの特徴である Lie bracket 運動が用いられている．平面上又は球面上で接触点が閉軌道を描くとき，他の変数に関しては変化が生じる．この変化量をホロノミー (holonomy) と呼び [1]，位置と姿勢を段階的に制御することにより，2 つの入力で 5 つの状態を制御することを可能としている．

ここで，上に挙げた 3 つの軌道計画において，球体の鉛直軸回りの運動は無いものとしていることに注意する．

2.1.2　球型ロボットの軌道計画

次に，球型ロボットの軌道計画問題について考える．球型ロボットの運動は，球体の転がり接触運動に従う．この時，運動学モデルにおける軌道計画をそのまま適用できることが望ましい．しかし，適用可能な軌道計画手法は，ロボットの駆動機構によって異なる．運動学モデルにおける入力は，球殻の角速度であったが，球型ロボットの場合はアクチュエータによるトルクとなる．球殻の角速度に対して，その角速度を発生させるためのトルクが存在するかが鍵となる．始めに，球型ロボットの駆動機構について紹介し，次に各駆動機構ごとに軌道計画における影響について説明する．

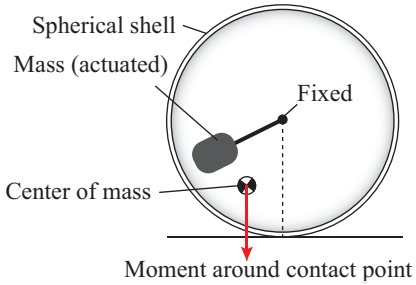

Fig. 2.1 Spherical rolling robot driven by shifting center of mass.

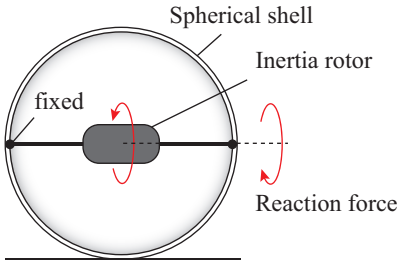

Fig. 2.2 Spherical rolling robot driven by reaction force of the internal rotor.

(A) 球型ロボットの駆動機構

これまでに提案されている球型ロボットの駆動機構についてまとめる．球型ロボットは，平面と接触する球殻フレームと，転がり運動を生起させるための駆動機構によって構成される．球型ロボットの駆動方式は大きく 2 つに分類できる．一つは，球型ロボットの重心を傾けることにより転がり運動を生起する方法である．球型ロボットの重心が，球殻と接触平面の接触点の鉛直線上にある場合，球型ロボットは静止したままであるが，重心が鉛直線上からずれると，回転モーメントが生じるため球型ロボットの転がり運動が発生する．球型ロボットの進む方向に対して重心を傾けることにより，目標とする移動が得られる．

Javadi ら [30] は，球殻内部にレール上を重りが平行に移動するスライド機構を搭載し，重心を移動させることによって転がる球型ロボットを提案している．4 つの重心移動機構を正四面体の中心と頂点を結ぶように配置することにより，任意の方向へ重心を傾けることが可能となっており，全方向への移動を可能としている．石川ら [31] は，2 自由度の振り子機構を搭載し，ロボットの重心を変化させ転がり運動を行う半球型の転がりロボットを提案している．また，Liu ら [32] らも同様に，振り子のような機構を搭載した球型ロボットを開発している．Alves[33] らや Bicchi ら [34] は，球殻の内部を 4 輪車両が走行することにより転がり移動を行う球型ロボットを提案している．本球型ロボットは，重心の移動と車輪と球殻内面の摩擦力を利用したものであり，ロボットの軌道は準静的な仮定のもとで車両ロボットの平面上

における運動に追従する軌道をとる．

2 つ目は，球殻内部に搭載した慣性ロータの回転により発生する慣性モーメントを利用した駆動方式である．Joshi ら [35] は，直交する 2 軸に慣性ロータを搭載した球型ロボットを開発している．1 軸あたり 2 つの慣性ロータが球殻の中心から対称に配置されており，ロボット全体の重心が球殻の中心となる．また，大谷ら [36] は，ロボットの中心にある 1 つの慣性ロータの回転軸を，任意の軸回りに向けることができるようなジャイロ機構が組み込まれている球型ロボットを提案している．

(B) 軌道計画

球型ロボットの軌道計画の目的は，球体の転がりにおける軌道計画と同様に，球殻の接触点位置と姿勢を初期状態から目標状態まで導くことである．運動学モデルにおける軌道計画との違いは，駆動機構の回転や姿勢といった自由度がシステムの状態変数として加わること，また入力が角速度ではなく駆動機構に働くトルクとなることである．この時，状態方程式における状態変数と入力の数は，運動学モデルが 5 つと 2 つであるのに対して，$10+2m$ と m となる．ここで，m は駆動機構の自由度の数である．上に述べた球型ロボットの場合，駆動機構の自由度は 2 または 3 となっている．さらに，球殻は転がり拘束を受けるため，動力学部と運動学部に分離することができ，縮約されたロボットの運動を表すモデルの状態変数は $8+2m$ となる．球体の転がり運動学モデルと比較して，入力の数が同じであるにもかかわらず状態の数が大きく増えており，軌道計画問題は困難な問題となる．

重心を移動させる駆動方式を採用した球型ロボットについて，位置と姿勢の両方に関する軌道計画を解いているものはない．いずれも簡単な動作実験のみ，または位置の制御に留まっている．

第 1 章で述べたように，動力学モデルと運動学モデルを分離することができ，さらに運動学モデルにおける入力が，動力学モデルにおいて実現可能であれば，球型ロボットの軌道計画問題は，球体の転がり運動に対する軌道計画問題に置き換えることができる．球殻の位置と姿勢に関する一般化座標を $\boldsymbol{q}_s = (x, y, \theta, \phi, \psi)^T$，アクチュエータの一般化座標を $\boldsymbol{q}_a \in \mathbb{R}^m$ とする．すると，球型ロボットの運動方程式は

次のように記述できる．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{ss} & \boldsymbol{M}_{sa} \\ \boldsymbol{M}_{sa} & \boldsymbol{M}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}_s \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_s(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ \boldsymbol{c}_a(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_s(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ \boldsymbol{g}_a(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{q}_s)\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

ここで，$\boldsymbol{M}$ は慣性行列，$\boldsymbol{c}$ はコリオリ・遠心力ベクトル，$\boldsymbol{g}$ は重力ベクトルである．式 (2.1) の左から $\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q}_s)\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{q}_s) = 0$ となる行列 $S(\boldsymbol{q}_s)$ を掛けると，球殻の運動方程式を動力学部と運動学部に分離することができる．

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{M}}_{ss} & \bar{\boldsymbol{M}}_{sa} \\ \bar{\boldsymbol{M}}_{sa} & \bar{\boldsymbol{M}}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{c}}_s(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ \bar{\boldsymbol{c}}_a(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_s = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}_s)\boldsymbol{\omega}_s \quad (2.3)$$

ここで，$\boldsymbol{\omega}_s$ は球殻の慣性座標系からみた角速度であり，運動学モデルにおける速度入力となっている．式 (2.2) において，何らかの状態変換により $\boldsymbol{\omega}_s \approx \boldsymbol{\tau}$ とできた場合，運動学モデルにおける軌道計画で十分と言える．しかし，(2.2) は劣駆動システムとなっており，$\boldsymbol{\omega}_s$ を慣性ロータに関する状態変数または入力トルクの関数としてように表すことはできない．

式 (2.2) のような劣駆動システムの可積分条件については，[37] で研究されている．慣性ロータを用いた球型ロボットの場合，特に重心が常に球殻の中心となるように慣性ロータが配置されている場合は，運動方程式に非保存力である重力項が現れず，角運動量保存則によって，入力項を含まない球殻に関する運動方程式は積分不可能となり，角速度と駆動機構の状態変数の関係を陽に導くことができる．この性質が，慣性ロータによって駆動される球型ロボットの軌道計画を行う足がかりとなる．

さらに，軌道計画における駆動機構の与える影響として，入力トルクの数に注意する必要がある．重心を移動させる方式の球型ロボットの場合，入力トルクの数は Javadi らのスライダー機構を用いた球型ロボットでは 4 つ，石川ら，Liu らの振り子機構を用いたものでは 2 つとなっている．いずれも，重心位置を球殻の中心から全方向に対して配置できるようにしており，球型ロボットの全方向移動が可能となっている．対して，慣性ロータによって駆動される球型ロボットの場合，2 つまたは 3 つの直交する軸に配置されている．3 つの軸に慣性ロータが搭載されている場合，動力学モデル (2.2) において，運動学モデルにおける入力である 3 軸回りの角速度を

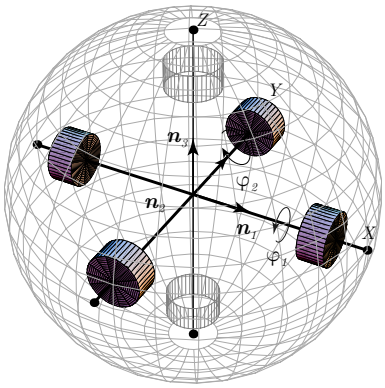

Fig. 2.3 Spherical rolling robot driven by orthogonal two rotors.

任意の値として得ることができる．しかし，2 軸のみに慣性ロータが搭載されている場合，角加速度に関する動力学モデルを積分して得られる式より，自由に角速度を入力として与えることができない．よって，球型ロボットの軌道計画において，運動学と動力学を分離して考えることができなくなる．

既存研究において，2 軸の慣性ロータによって駆動される球型ロボットに対して，Agrawal ら [38] は最適制御を試みている．シミュレーションでは軌道計画の数値計算例が示されているが，近似システムに対する軌道計画にとどまっており，目標状態へは到達していない．また，Banavar ら [24] は運動学モデルにおける軌道計画を適用しているが，上述の通り，動力学を考慮して軌道計画を行う必要がある．

2.1.3　本章の目的

本章の目的は Fig. 2.3 に示す，直交する 2 軸の慣性ロータによって駆動される球型ロボットの軌道計画である．本軌道計画問題の難しさは，次の 2 つである．1 つ目に，運動学モデルのみではなく，動力学の範囲まで考慮した軌道計画が必要となることである．単純に状態変数の数が増えることにより，可制御性の確認と軌道計画における計算が複雑化する．状態変数の数は 12，入力の数が 2 つとなる．2 つ目に，特異点の存在である．後に詳細について述べるが，動力学モデルを積分して得られる式より，角速度と慣性ロータの回転速度の関係を導くことが可能であり，状

態変数が 5 つと入力が 2 つのシステムが得られる．本システムは，球体の転がり運動モデルと同様に正準系への変換ができず，differentially flat でない，nilpotent でもないことから既存の軌道計画が適用できない．さらに，鉛直軸回りの回転の影響により，球面上の接触点軌道から平面上の軌道を解析的に計算することが困難であり，幾何学的アプローチの適用も困難となる．特に，nilpotent approximation により近似システムを計算する際に，常に可制御でなくなる点が特異点として現れるため，Oriolo らの手法をそのまま適用することができない．

そこで，本研究では，2 つの異なる手法によって得られる軌道を組み合わせて軌道計画を行う．1 つ目の軌道は，慣性ロータが配置される大円 (球面上における赤道) に直交する測地線に基づいた幾何学的なアプローチによって得られる軌道である．本軌道に沿った球の運動では鉛直軸回りの角速度が発生しないため，軌道に沿った状態の変化量を解析的に計算することができる．2 つ目の軌道は，nilpotent approximation と iterative steering を組み合わせて得られる軌道である．nilpotent approximation において現れる特異点を回避するために，球面上の接触点座標系の原点に当たる南極点を原点とした近似モデルを構築し，南極点を含む半球面のみを通るような軌道を求める．また，球面上の接触点を変化させずに接触角と平面上の接触点位置を目標状態へ到達させるために，球面上の接触点軌道が閉軌道となるように入力を決定する．

本章では，2.2 節で 2 軸慣性ロータ駆動球型ロボットのモデルの導出を行う．運動学モデルと動力学モデルをそれぞれ導出し，角運動量保存則より縮約された運動方程式により制御モデルを導出する．次に，2.3 節では，初期状態と目標状態を結ぶ軌道及び制御入力の設計を行う．まず可制御性について解析を行い，制御モデルにおける特異点の存在を明らかにする．さらに，特異点を考慮した 3 段階に分割した軌道計画について説明した後，それぞれの軌道計画手法について述べる．最後に，シミュレーションにより，本軌道計画手法の有効性を示す．

なお，本章の大部は文献 [39][40] にて公表済みである．

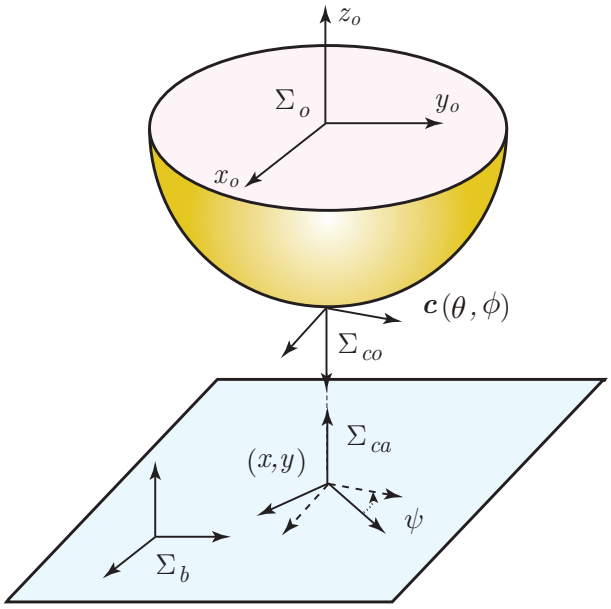

Fig. 2.4 Contact coordinates

2.2　2 軸慣性ロータ駆動型球型ロボットのモデル化

本節では，2 軸慣性ロータ駆動型球型ロボットの運動学モデルと動力学モデルを導出する．球型ロボットは平面上を滑ることなく転がることによって移動するものとする．また転がり摩擦とスピン運動による摩擦については考慮しないものとする．

2.2.1　接触座標系

ここでは，運動学モデルの導出の際に用いる接触座標系について定義する．Fig. 2.4 に示すように慣性座標系 Σ_b，球体の中心に固定された座標系 Σ_o，平面上に固定された座標系 Σ_a とする．さらに接触座標系として，球体と平面の接触点において平面上に座標系 Σ_{ca}，球面上に座標系 Σ_{co} を定義する．接触座標系においてベクトル $\boldsymbol{u}_{co} = [\theta, \phi]^T$ は球面上の接触点座標を，$\boldsymbol{u}_{ca} = [x, y]^T$ は平面上の接触点座標を表す．また座標系 Σ_{ca} と Σ_{co} の x 軸のなす角度として接触角 ψ を定義する．以降，座標系 Σ_b と Σ_a は一致するものとし $\Sigma_b = \Sigma_a$ とする．また座標系 Σ_a と Σ_{ca} は平行である．

球面上の点の位置は次のようにパラメータ表示される，

$$\boldsymbol{c}(\theta,\phi)=R\begin{bmatrix}-\sin\theta\cos\phi\\ \sin\phi\\ -\cos\theta\cos\phi\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_x(\phi)\begin{bmatrix}0\\0\\-R\end{bmatrix} \tag{2.4}$$

ここで R は球の半径である．このパラメータ表記においては原点は球面上の南極に位置する．また $\phi=\pm\pi/2$ において特異点となるため，他のパラメータ表記が必要となる．次に，式 (2.4) において Σ_{co} に対する姿勢が次のように表されるガウス座標系 Σ_{co} を定義する．

$${}^o\boldsymbol{R}_{co}(\theta,\phi)=\begin{bmatrix}\frac{\boldsymbol{c}_u}{|\boldsymbol{c}_u|} & \frac{\boldsymbol{c}_v}{|\boldsymbol{c}_v|} & \frac{\boldsymbol{c}_u\times\boldsymbol{c}_v}{|\boldsymbol{c}_u\times\boldsymbol{c}_v|}\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

ここで

$$\boldsymbol{c}_u=\frac{\partial\boldsymbol{c}(\theta,\phi)}{\partial\theta},\quad \boldsymbol{c}_v=\frac{\partial\boldsymbol{c}(\theta,\phi)}{\partial\phi} \tag{2.6}$$

$\boldsymbol{c}_u$ と $\boldsymbol{c}_v$ の定義から

$${}^o\boldsymbol{R}_{co}(\theta,\phi)=\begin{bmatrix}-\cos\theta & \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ \sin\theta & \cos\theta\sin\phi & -\cos\theta\cos\phi\end{bmatrix} \tag{2.7}$$

この行列は次のように分解できる．

$${}^o\boldsymbol{R}_{co}(\theta,\phi)=\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_x(\phi)\boldsymbol{R}_z(\pi) \tag{2.8}$$

ここで行列はそれぞれ x,y,z 軸回りの回転行列である．ここで慣性座標系 Σb に対する物体座標系 Σ_o の姿勢行列を次のように定義する．

$$\boldsymbol{R}={}^b\boldsymbol{R}_o=(\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_x(\phi)\boldsymbol{R}_z(\psi))^T=\boldsymbol{R}_z^T(\psi)\boldsymbol{R}_x^T(\phi)\boldsymbol{R}_y^T(\theta) \tag{2.9}$$

接触座標系をオイラー角として回転行列を表現することができる．

$$\boldsymbol{R}= \tag{2.10}$$
$$\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi+\sin\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi+\cos\theta\sin\phi\sin\psi\\ -\cos\theta\sin\psi+\sin\theta\sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\psi & \sin\theta\sin\psi+\cos\theta\sin\phi\cos\psi\\ \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi\end{bmatrix}$$

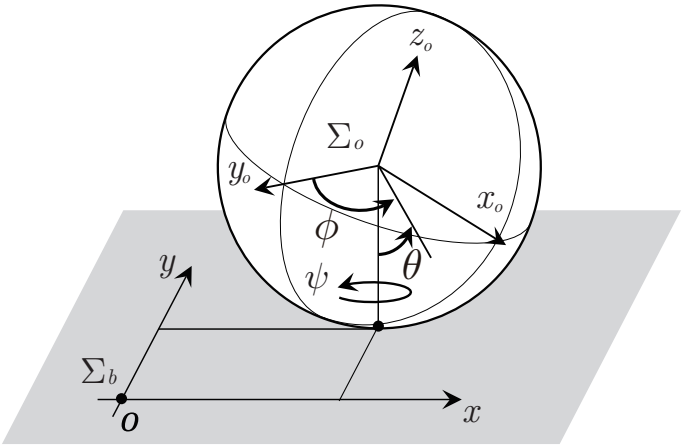

Fig. 2.5 Kinematic model of spherical robot

2.2.2　運動学モデル

2 つの曲面が互いに滑ることなく移動する時，接触点の運動は 3 つの幾何学パラメータ $\mathcal{K}$(curvature form)，$\mathcal{M}$ (connection form)，$\mathcal{T}$ (metric tensor) によって表される．それぞれの曲面上の接触点に局所座標系 Σ_{ca}，Σ_{co} を定義する．座標系 Σ_{ca} に対する座標系 Σ_{co} の速度，角速度をそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{v}} = [\tilde{v}_x, \tilde{v}_y, \tilde{v}_z]^T$,$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = [\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z]^T$ とおく．Montana ら [19] は 2 つの曲面が転がり接触する際の各曲面の座標系における接触点の運動を次のように表している．

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{co} = \mathcal{M}_o^{-1}\left(\mathcal{K}_o + \tilde{\mathcal{K}}_a\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix} -\tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_x \end{bmatrix} - \tilde{\mathcal{K}}_a \begin{bmatrix} \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \end{bmatrix}\right) \tag{2.11}$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{ca} = \mathcal{M}_a^{-1}\mathcal{R}_\psi\left(\mathcal{K}_o + \tilde{\mathcal{K}}_a\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix} -\tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_x \end{bmatrix} - \tilde{\mathcal{K}}_o \begin{bmatrix} \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \end{bmatrix}\right) \tag{2.12}$$

$$\dot{\psi} = \tilde{\omega}_z + \mathcal{T}_o\mathcal{M}_o\dot{\boldsymbol{u}}_{co} + \mathcal{T}_a\mathcal{M}_a\dot{\boldsymbol{u}}_{ca} \tag{2.13}$$

$$\tilde{v}_z = 0 \tag{2.14}$$

ここで，$\tilde{\mathcal{K}}_a = \mathcal{R}_\psi\mathcal{K}_a\mathcal{R}_\psi$ は Σ_{co} の x 軸，y 軸に対する接触点における曲面 ”a” の曲率である．またここで

$$\mathcal{R}_\psi = \begin{bmatrix} -\cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

である．平面と球面の接触運動の場合は，

$$\mathcal{M}_a = \boldsymbol{I},\ \ \mathcal{K}_a = \mathbf{0},\ \ \mathcal{T}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

また

$$\mathcal{M}_o = R\ \mathrm{diag}\{\cos\phi, 1\},\ \ \mathcal{K}_o = \boldsymbol{I}/R,\ \ \mathcal{T}_o = \begin{bmatrix} \tan\phi/R & 0 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

ここで $\boldsymbol{I}$ と $\mathbf{0}$ はそれぞれ 2×2 の単位行列，零行列である．慣性座標系 Σ_b からみた座標系 Σ_o の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}_o = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ とする．ベクトル $\boldsymbol{\omega}_o$ と $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ は $\tilde{\boldsymbol{\omega}} =^{co} \boldsymbol{R}_{ca}\boldsymbol{\omega}_o$ の関係をもつ．式 (2.15)-(2.17) を式 (2.11)-(2.14) に代入すると接触運動学の式は $\boldsymbol{\omega}_o$ によって次のように表される．

$$\dot{x} = R\omega_y \tag{2.18}$$

$$\dot{y} = -R\omega_x \tag{2.19}$$

$$\dot{\theta} = -(\sin\psi\omega_x + \cos\psi\omega_y)/\cos\phi \tag{2.20}$$

$$\dot{\phi} = -\omega_x\cos\psi + \omega_y\sin\psi \tag{2.21}$$

$$\dot{\psi} = -\omega_z - (\omega_x\sin\psi + \omega_y\cos\psi)\tan\phi \tag{2.22}$$

またこれらの式は状態空間表現を用いて次のように表すこともできる．

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R & 0 \\ -R & 0 & 0 \\ -\sin\psi/\cos\phi & -\cos\psi/\cos\phi & 0 \\ -\cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi\tan\phi & -\cos\psi\tan\phi & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

本論文ではスピン無し拘束（$\omega_z = 0$）を用いないことに注意する．ball-plate システムにおいてはスピン無し拘束は自然に導かれるものであるが球型ロボットの運動においてはスピン運動は生じるものと考える．ball-plate システムは文献 [22][15] 等で可制御であることが示されており，任意の初期状態と目標状態に対して，2 つの状態を結ぶ軌道が存在する．また，球型ロボットの運動学モデル (2.23) は，ball-plate システムに 1 つ入力が加わる形となるため，明らかに可制御である．

2.2.3　動力学モデル

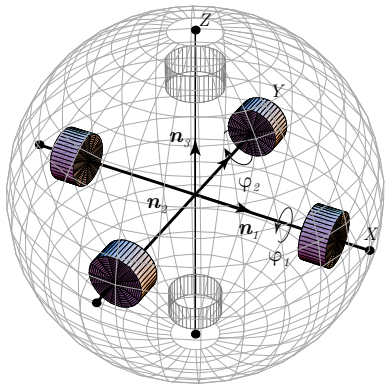

Fig. 2.6 Construction of the spherical robot.

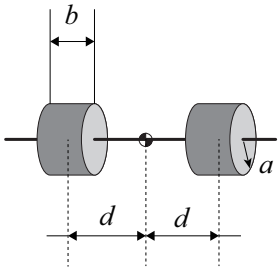

Fig. 2.7 The inertial rotor composed of two masses.

本節では 2 軸慣性ロータ駆動球型ロボットの動力学モデルを導出する．本研究における球型ロボットは Fig. 2.8 のように球殻と慣性ロータによって構成される．球殻の厚さは無視できるものとし，質量を m_o，半径を R とする．また，球殻の慣性モーメントは $\boldsymbol{J}_o = \frac{2}{3} m_o R^2$ となる．慣性ロータは球殻の内部に固定されている．また 2 つの回転軸は球殻の中心で直交する． 1 軸あたりの慣性ロータは，Fig. 2.7 のように球の中心から d の距離に対称に質量 m，半径 a，幅 b の回転物体が配置されており，2 つ合わせて質量 $2m$ の慣性ロータとみなす．慣性ロータの回転軸回りと，回転軸に直交する軸回りの慣性モーメントはそれぞれ，

$$J_p = m\left(2d^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{6}\right), \quad J_r = ma^2 \tag{2.24}$$

となる．これより，球殻と n 個の慣性ロータによって構成される球型ロボットの動力学モデルの導出を行う．座標系と位置ベクトルの取り方を図 2.8 に示す．基準座標系を Σ_b，物体座標系 Σ_o を球殻の中心に設定する．Σ_i は i 番目の慣性ロータの重心に固定された座標系とする．基準座標系から見た球殻中心の物体座標系の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_o$，i 番目の慣性ロータ座標系の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とする．また，$\boldsymbol{v}_o$，$\boldsymbol{\omega}_o$ と $\boldsymbol{v}_i$，$\boldsymbol{\omega}_i$ をそれぞれ基準座標系から見た球殻座標系と慣性ロータ座標系の速度ベクト

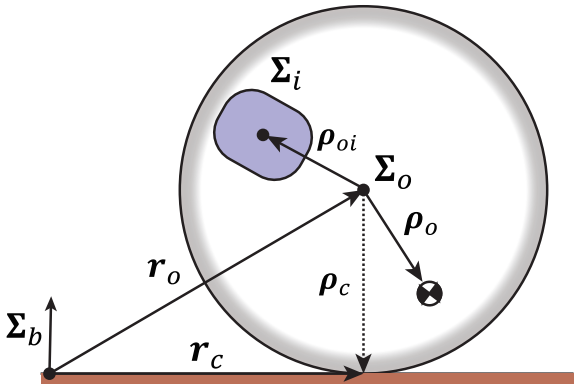

Fig. 2.8 Definition of the coordinates and vectors.

ル，角速度ベクトルとする．さらに，各物体座標系の慣性座標系に対する仮想変位，微小回転角をそれぞれ $\delta\boldsymbol{r}_o$，$\delta\boldsymbol{\pi}_o$ と $\delta\boldsymbol{r}_i$，$\delta\boldsymbol{\pi}_i$ とおく．球殻と n 個の慣性ロータによって構成される球型ロボットに対して，ダランベールの原理は次のように表される．

$$\begin{aligned}
&\delta\boldsymbol{r}_o \cdot \{m_o\dot{\boldsymbol{v}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}}_o \times m_o\boldsymbol{\rho}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times (\boldsymbol{\omega}_o \times m_o\boldsymbol{\rho}_o) - m_o\boldsymbol{g}\} \\
&\quad + \quad \delta\boldsymbol{\pi}_o \cdot \{m_o\boldsymbol{\rho}_o \times \dot{\boldsymbol{v}}_o + \boldsymbol{J}_o\dot{\boldsymbol{\omega}}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{J}_o\boldsymbol{\omega}_o - \boldsymbol{\rho}_o \times m_o\boldsymbol{g}\} \\
&\quad + \quad \sum_{i=1}^{n} \delta\boldsymbol{r}_i \cdot \{m_i\dot{\boldsymbol{v}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times m_i\boldsymbol{\rho}_{oi} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times m_i\boldsymbol{\rho}_{oi}) - m_i\boldsymbol{g}\} \\
&\quad + \quad \sum_{i=1}^{n} \delta\boldsymbol{\pi}_i \cdot \{m_i\boldsymbol{\rho}_{oi} \times \dot{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\rho}_i \times m_i\boldsymbol{g}\} = \delta\boldsymbol{W} \quad (2.25)
\end{aligned}$$

ここで，ベクトル $\boldsymbol{\rho}_{io}$ は座標系 Σ_i の原点から i 番目の回転体の重心へのベクトルである．$\delta\boldsymbol{W}$ は慣性ロータに生じる入力トルクのなす仮想仕事であり，摩擦力等の外力は考慮しないものとする．

位置ベクトル，速度ベクトル，角速度ベクトルに対して運動学的な性質を適用すると，

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_o + \boldsymbol{\rho}_i \quad (2.26)$$

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{\rho}_i, \quad \dot{\boldsymbol{v}}_i = \dot{\boldsymbol{v}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}}_o \times \boldsymbol{\rho}_o \times (\boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{\rho}_i) \quad (2.27)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_o + \boldsymbol{\omega}_i^{rel}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{\omega}_i^{rel} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^{rel} \quad (2.28)$$

ここで $\boldsymbol{\rho}_i$ は座標系 Σ_o 原点から座標系 Σ_i へのベクトル，$\boldsymbol{\omega}_i^{rel}$ と $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^{rel}$ はそれぞれ i 番目の回転体の座標系 Σ_i に対する角速度，角加速度である．また幾何学的な関係により

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \delta \boldsymbol{r}_o + \delta \boldsymbol{\pi}_o \times \boldsymbol{\rho}_i \tag{2.29}$$

$$\delta \boldsymbol{\pi}_i = \delta \boldsymbol{\pi}_o + \delta \boldsymbol{\pi}_i^{rel} \tag{2.30}$$

ここで $\delta \boldsymbol{\pi}_i^{rel}$ は座標系 Σ_i 回りの i 番目の回転体の微小回転角である．

$\boldsymbol{M}_i$ を i 番目の回転体に生じるモーメントとする．システム全体に対する仮想仕事は，

$$\delta \boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^{n} \delta \boldsymbol{\pi}_i \cdot \boldsymbol{M}_i - \delta \boldsymbol{\pi}_o \cdot \boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \delta \boldsymbol{\pi}_i^{rel} \cdot \boldsymbol{M}_i \tag{2.31}$$

ここで球殻と回転体によって構成されるシステムが幾何学的に対称であるものと考える．つまり球殻の重心は球の中心に ($\boldsymbol{\rho}_o = 0$)，また 1 軸当たりの回転体は図 2.7 のように球の中心に対して対になっており，その重心は球の中心と一致するものとする ($\boldsymbol{\rho}_{oi} = \boldsymbol{0}$)．よって式 (2.25) は次式のように簡略化される，

$$\delta \boldsymbol{r}_o \cdot \{m_o \dot{\boldsymbol{v}}_o - m_o \boldsymbol{g}\} + \delta \boldsymbol{\pi}_o \cdot \{\boldsymbol{J}_o \dot{\boldsymbol{\omega}}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{J}_o \boldsymbol{\omega}_o\} \tag{2.32}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \delta \boldsymbol{r}_i \cdot \{m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i - m_i \boldsymbol{g}\} + \sum_{i=1}^{n} \delta \boldsymbol{\pi}_i \cdot \{\boldsymbol{J}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{J}_i \boldsymbol{\omega}_i\} = \delta \boldsymbol{W} \tag{2.33}$$

ここで，$\boldsymbol{J}_i$ は各慣性ロータの慣性座標系から見た慣性テンソルであり，その固定されている軸によって次のように表される，

$$\boldsymbol{J}_i^{(o)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} J_r & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 \\ 0 & 0 & J_p \end{bmatrix} & \text{rotor rotating around } x-\text{axis} \\ \begin{bmatrix} J_p & 0 & 0 \\ 0 & J_r & 0 \\ 0 & 0 & J_p \end{bmatrix} & \text{rotor rotating around } y-\text{axis} \\ \begin{bmatrix} J_p & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix} & \text{rotor rotating around } z-\text{axis} \end{cases} \tag{2.34}$$

また，各軸の慣性ロータの回転はベクトル $\boldsymbol{n}_i$ 軸回りのみの 1 自由度であると仮定する．この回転軸は球殻の物体座標系 Σ_o に固定されている．各慣性ロータの回転角と入力トルクをそれぞれ φ_i，τ_i とする．この時，各慣性ロータより生じるモーメントは，

$$\boldsymbol{M}_i = \tau_i \boldsymbol{n}_i \tag{2.35}$$

と表される．また仮想変位は

$$\delta\boldsymbol{\omega}_i^{rel} = \delta\varphi_i \boldsymbol{n}_i \tag{2.36}$$

となる．よって慣性ロータへのトルク入力により生じる仮想仕事は次のようになる．

$$\delta \boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^{n} \delta\varphi_i \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{n}_i \tau_i = \sum_{i=1}^{n} \delta\varphi_i \tau_i \tag{2.37}$$

以上を式 (2.33) に代入して整理すると，

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\pi}_o \cdot \Big\{ &\boldsymbol{J}_o\dot{\boldsymbol{\omega}}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{J}_o\boldsymbol{\omega}_o - \boldsymbol{\rho}_c \times m_o(\dot{\boldsymbol{v}}_o - \boldsymbol{g}) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i \\ &+ \boldsymbol{\rho}_i \times m_i(\dot{\boldsymbol{v}}_i - \boldsymbol{g}) - \boldsymbol{\rho}_c \times m_i(\dot{\boldsymbol{v}}_i - \boldsymbol{g}) \Big\} + \sum_{i=1}^{n} \delta\varphi_i \boldsymbol{n}_i \cdot \{\boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i\} = \sum_{i=1}^{n} \delta\varphi_i \tau_i\end{aligned} \tag{2.38}$$

この時，$\delta\boldsymbol{\pi}_o$ と $\delta\varphi_i, (i = 1, \cdots, n)$ は独立変数であることから球殻に関する動力学モデルは次のように表される．

$$\boldsymbol{J}_o\dot{\boldsymbol{\omega}}_o - \boldsymbol{\rho}_c \times m_o\dot{\boldsymbol{v}}_o + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\rho}_i \times m_i(\dot{\boldsymbol{v}}_i - \boldsymbol{g}) - \boldsymbol{\rho}_c \times m_i\dot{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{0} \tag{2.39}$$

また，ロータに関する動力学モデルは次のように表される．

$$\boldsymbol{n}_i \cdot \{\boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i\} = \tau_i, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.40}$$

さらに $\dot{\boldsymbol{v}}_o = -\dot{\boldsymbol{\omega}}_o \times \boldsymbol{\rho}_c$，また球殻の質量 m_o と i 番目の回転軸に配置された慣性ロータの質量 m を合わせた球型ロボット全体の質量を $M = m_o + 2nm$ とすると，式 (2.39) は

$$(\boldsymbol{J}_o - M\hat{\boldsymbol{\rho}}_c\hat{\boldsymbol{\rho}}_c)\dot{\boldsymbol{\omega}}_o + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{0} \tag{2.41}$$

ここで，$\hat{\boldsymbol{\rho}}_c$ はベクトル $\boldsymbol{\rho}_c$ の外積行列である．ロータの対称性より $\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{n}_i = J_r\boldsymbol{n}_i$，またこれより $\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{n}_i = J_r$．各ベクトルの関係を考慮すると，$\boldsymbol{n}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i) = 0$，$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{n}_i\dot{\phi}_i) = \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{n}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{n}_i\dot{\varphi}_i) = J_r\boldsymbol{n}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{n}_i\dot{\varphi}_i) = 0$ より

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{n}_i\dot{\varphi}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{n}_i\dot{\varphi}_i + \boldsymbol{n}_i\dot{\varphi}_i + \boldsymbol{n}_i\dot{\varphi}_i \times \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{n}_i\dot{\varphi}_i + \boldsymbol{n}_i\dot{\varphi}_i \times \boldsymbol{J}_i\boldsymbol{\omega}_o + \boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{n}_i\dot{\varphi}_i) \\
&= \boldsymbol{\omega}_o \times \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{\omega}_o + \boldsymbol{n}_i\dot{\varphi}_i)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

式 (2.42) の関係より，最終的に動力学モデルは次のように表される．

$$\boldsymbol{J}_c\dot{\boldsymbol{\omega}}_o + J_r \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i\ddot{\varphi}_i + \boldsymbol{\omega}_o \times \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i\left(\boldsymbol{\omega}_o + \boldsymbol{n}_i\dot{\varphi}_i\right) = \boldsymbol{0} \tag{2.43}$$

$$J_r\left(\boldsymbol{n}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_o\right) + J_r\ddot{\varphi}_i = \tau_i, \quad i = 1, n \tag{2.44}$$

ここで，慣性ロータの回転軸を示すベクトル $\boldsymbol{n}_i$ について，添字が 1 から 3 のものは，球殻の中心に固定された物体座標系の x 軸，y 軸，z 軸と一致するものとする．よって，球型ロボットの姿勢を表す各オイラー角 θ, ϕ, ψ が 0 であるとき，

$$\boldsymbol{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

となる．また慣性行列 $\boldsymbol{J}_c$ は次のようにおいた．

$$\boldsymbol{J}_c = \boldsymbol{J}_o - M\hat{\boldsymbol{\rho}}_c\hat{\boldsymbol{\rho}}_c + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i \tag{2.46}$$

動力学モデル (2.43)(2.44) を $\dot{\boldsymbol{\omega}}$，$\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$ について解き直す．

$$\ddot{\varphi}_i = \frac{1}{J_r}\tau_i - (\boldsymbol{n}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_o), \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.47}$$

を式 (2.43) に代入すると次式が得られる．

$$\left(\boldsymbol{J}_c - J_r \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_i^T \right)^{-1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_o = -\boldsymbol{h} - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i \tau_i \tag{2.48}$$

さらに，

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_o = -\left(\boldsymbol{J}_c - J_r \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_i^T \right)^{-1} \left(\boldsymbol{h} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i \tau_i \right) \tag{2.49}$$

システムのダイナミクスは状態空間モデルの形 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ であらわすことができる．状態ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = [\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \omega_x, \omega_y, \omega_z, x, y, \theta, \phi, \psi]^T \tag{2.50}$$

であり，状態空間モデルは次式のように表される．

$$\dot{\boldsymbol{x}} \triangleq \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_o \\ x \\ y \\ \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \tau_1/J_r + (\boldsymbol{n}_1 \cdot \{\boldsymbol{J}_c - J_r \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_i^T\}^{-1} \{\boldsymbol{h} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i \tau_i\} \\ \tau_2/J_r + (\boldsymbol{n}_2 \cdot \{\boldsymbol{J}_c - J_r \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_i^T\}^{-1} \{\boldsymbol{h} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i \tau_i\} \\ -(\boldsymbol{J}_c - J_r \sum_{i=1} \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_i^T)^{-1} (\boldsymbol{h} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i \tau_i) \\ R\omega_y \\ -R\omega_x \\ -(\omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi)/\cos\phi \\ -\omega_x \cos\psi + \omega_y \sin\psi \\ -\omega_z - (\omega_x \sin\psi + \omega_y \cos\psi) \tan\phi \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

2.2.4　逆動力学計算

ロボットの運動がある軌道計画により与えられているとき，つまり球体の運動を表す変数 $\boldsymbol{\omega}_o(t), x(t), y(t), \theta(t), \phi(t), \psi(t)$ が時間関数として得られていると仮定する．

このとき制御入力を求める式は，式 (2.48) の左から $\boldsymbol{n}_i$ を掛けることによって i 番目の慣性ロータのトルク入力は次のように求めることができる，

$$\tau_i = -\boldsymbol{n}_i \cdot \left(\boldsymbol{J}_c - J_r \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{n}_k \boldsymbol{n}_k^T \right) \dot{\boldsymbol{\omega}}_o - \boldsymbol{n}_i \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_o \times \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{J}_k \left(\boldsymbol{\omega}_o + \boldsymbol{n}_k \dot{\varphi}_k \right) \right) \tag{2.52}$$

この τ_i に関する式を式 (2.47) に代入し微分方程式として $\varphi_i(t)$ について解くことで慣性ロータの運動が得られる．さらに式 (2.53) に代入することで最終的に必要な制御トルクを得ることができる．慣性ロータが 3 つの直交する軸に配置されている場合は，式 (2.53) 次のように簡略化することができる　．

$$\tau_i = -\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{J}_c \dot{\boldsymbol{\omega}}_o + \boldsymbol{n}_i \cdot J_r \dot{\boldsymbol{\omega}}_o - \boldsymbol{n}_i \cdot \left(J_r \boldsymbol{\omega}_o \times \sum_{=1}^{n} \boldsymbol{n}_k \dot{\varphi}_k \right) \tag{2.53}$$

しかし，慣性ロータが 2 軸又は 1 軸のみに配置されている場合は，後述するように，球の転がり運動は動力学モデルより導かれる拘束条件を満たす必要がある．

2.2.5　角運動量保存

動力学モデル (2.43)(2.44) は，次のように左辺が積分された形として表すことができる．

$$\frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{J}_c \boldsymbol{\omega}_o + J_r \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i \dot{\varphi}_i \right) = \boldsymbol{0} \tag{2.54}$$

$$\frac{d}{dt} \left(J_r \left(\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_o \right) + J_r \dot{\varphi}_i \right) = \tau_i \tag{2.55}$$

これは，$\dot{\boldsymbol{n}}_i = \boldsymbol{\omega}_o \times \boldsymbol{n}_i$ と $d(\boldsymbol{J}_c \boldsymbol{\omega})/dt = (\boldsymbol{J}_o - M \hat{\boldsymbol{\rho}}_c \hat{\boldsymbol{\rho}}_c) \dot{\omega}_o + d(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i \boldsymbol{\omega}_o)$ の関係より導出できる．従って，　球型ロボットの接触点回りの角運動量は保存される．もし球殻と平面の間の摩擦力等を考慮する場合は角運動量保存則は成り立たないが，球型ロボットは滑らずに転がるとしているため，式 (2.54) が成立するものとする．式

(2.54)(2.55) から次の式が得られる．

$$\boldsymbol{J}_c\boldsymbol{\omega}_o + J_r\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{n}\dot{\varphi}_i = \boldsymbol{c} \tag{2.56}$$

$$J_r\left(\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_o\right) + J_r\dot{\varphi}_i = \int_{t_0}^{t}\tau_i(s)ds, \quad i=1,2 \tag{2.57}$$

ここで $\boldsymbol{c}$ は定数ベクトルである．ロボットは初期時刻において静止していると仮定すると $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ となり，式 (2.56) は

$$J_r\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{n}_i\dot{\varphi}_i = -\boldsymbol{J}_c\boldsymbol{\omega}_o \tag{2.58}$$

球の運動が与えられたとき容易にロータの運動を計算することができる．式 (2.58) の両辺にベクトル $\boldsymbol{n}_3$ を乗じると，

$$\dot{\varphi}_i = -\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{J}_c\boldsymbol{\omega}_o/J_r, \quad i=1,2 \tag{2.59}$$

上式により制御トルクに関する式 (2.53) を慣性ロータの回転速度 $\dot{\varphi}_i$ を含まない形で表すことができる．式 (2.59) を式 (2.53) に代入すると

$$\tau_i = -\boldsymbol{n}_i\cdot\left(\boldsymbol{J}_c - J_r\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{n}_k^T\right)\dot{\boldsymbol{\omega}}_o + \boldsymbol{n}_i\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_o\times\left\{\boldsymbol{J}_c - \sum_{k=1}^{2}\boldsymbol{J}_k\right\}\boldsymbol{\omega}_o\right) \tag{2.60}$$

式 (2.60) よりロータの運動を計算することなく球の運動から必要なトルクの計算を行うことができる．しかし，すべての運動に対してトルク (2.60) が求まるわけではないことに注意する．例として次のような球面上の赤道に沿った運動を考える．球の角速度を $\boldsymbol{\omega}_o=\{0,\omega_y(t),0\}$ とする．また初期姿勢を $\theta=\pi/2,\phi=0,\psi=0$ とする．これを運動学モデル (2.22) に代入するとベクトル $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ を得る．これらをトルクを求める式 (2.60) に代入すると，右辺は 0 になる．実際にこの運動は 2 軸慣性ロータによる球型ロボットでは不可能な運動であることがわかる．そこで，球体の軌道生成において考慮する必要がある拘束条件について次節で明らかにする．

2.2.6　動力学的な拘束を受ける球型ロボットの運動

非ホロノミック拘束を有する移動ロボットの制御手法として，back-stepping 法が挙げられる．非ホロノミック拘束を含む運動学モデルより軌道生成をおこない，動

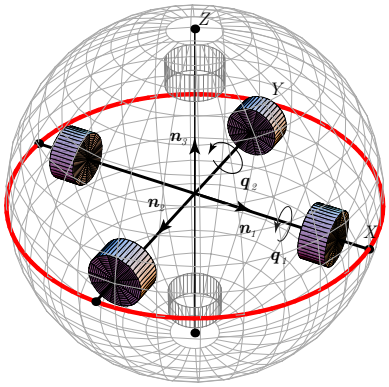

Fig. 2.9 Singularity line.

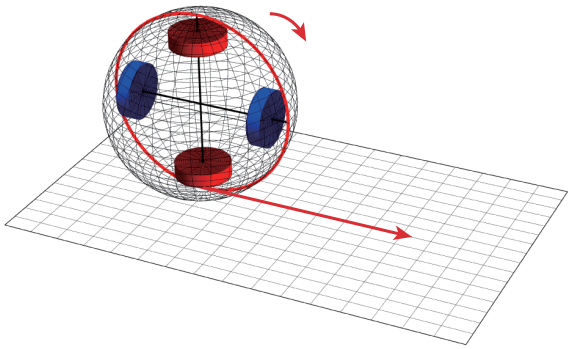

Fig. 2.10 Dynamically unrealizable motion.

力学モデルより必要な入力を計算することができる．しかし，2 軸の慣性ロータによっては，運動学モデルにおける入力である角速度 $\boldsymbol{\omega}_o$ を任意に生成できない．本節では，運動学的な拘束である球の転がり拘束に加えて，動力学的な拘束を受けることを示す．

球型ロボットの動力学式 (2.58) の左から $\boldsymbol{n}_3$ を掛けると次の式が得られる．

$$\boldsymbol{n}_3 \cdot \boldsymbol{J}_c \boldsymbol{\omega}_o = \boldsymbol{0} \tag{2.61}$$

式 (2.61) は $\boldsymbol{n}_3$ 軸回りの角運動量がゼロとなることを示しており，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ と姿勢角に関する拘束条件とみなすことができる．この拘束条件が軌道計画問題においてどのような影響を及ぼすのかを考察する．$\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{n}_3 = J_p\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{J}_2\boldsymbol{n}_3 = J_p\boldsymbol{n}_3$ より $\boldsymbol{J}_c\boldsymbol{n}_3 = (\boldsymbol{J}_o - M\hat{\boldsymbol{\rho}}_c\hat{\boldsymbol{\rho}}_c) + 2J_p\boldsymbol{n}_3$，さらにここで $\boldsymbol{J}_o - M\hat{\boldsymbol{\rho}}_c\hat{\boldsymbol{\rho}}_c = \mathrm{diag}\{\frac{2}{3}m_o + M, \frac{2}{3}m_o + M, \frac{2}{3}m_o\}R^2$．$\boldsymbol{n}_3 \triangleq \{n_{3x}, n_{3y}, n_{3z}\}$ とする．式 (2.61) は

$$\kappa(n_{3x}\omega_x + n_{3y}\omega_y) + n_{3z}\omega_z = 0 \tag{2.62}$$

ここで κ は次のように計算できる．

$$\kappa = 1 + \frac{MR^2}{\frac{2}{3}m_oR^2 + 2J_p} \tag{2.63}$$

κ は球型ロボットの鉛直軸回りの慣性モーメント J_{zz} と水平方向軸回りの慣性モーメント J_{xx}，J_{yy} の比率を表しており，慣性比率と呼ぶ．式 2.63 より，κ は常に 1 よ

り大きい値をとる．また，慣性比率が大きくなるのは球殻質量 m_o よりも慣性ロータの質量 m が大きく，慣性ロータの慣性モーメント J_p が小さいときである．また，式 2.62 より純転がり拘束 $\omega_z = 0$ は $n_{3x}\omega_x + n_{3y}\omega_y = 0$ となる場合を除いて一般に成り立たないことがわかる．式 (2.62) は角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_o$ と球の姿勢に関する状態変数 θ, ϕ, ψ に関する拘束となっており，軌道計画において考慮する必要がある．式 (2.62) を ω_z に関する形に直し，球体の転がりモデル (2.22) に代入すると $\dot{\psi}$ に関して次の式が得られる．

$$\dot{\psi} = \left\{ (\kappa - 1)\tan\phi\sin\psi - \kappa\frac{\tan\theta\cos\psi}{\cos\phi} \right\}\omega_x + \left\{ (\kappa - 1)\tan\phi\cos\psi + \kappa\frac{\tan\theta\sin\psi}{\cos\phi} \right\}\omega_y \tag{2.64}$$

ここで $\kappa = 0$ とした場合は純転がり運動の場合と一致する．ある球面上の接触点軌道が平面上に描く軌道は，次の $\{\dot{\theta}, \dot{\phi}\}$ を入力とする式によって表される．

$$\dot{x} = -R\cos\psi\cos\phi\ \dot{\theta} + R\sin\psi\ \dot{\phi} \tag{2.65}$$

$$\dot{y} = R\sin\psi\cos\phi\ \dot{\theta} + R\cos\psi\ \dot{\phi} \tag{2.66}$$

$$\dot{\psi} = (1 - \kappa)\sin v_o\ \dot{\theta} + \kappa\frac{\tan\theta}{\cos\phi}\ \dot{\phi} \tag{2.67}$$

次に，Fig.　2.11 のように球面上で接触点が円軌道を描く場合に平面上の接触点が描く軌道を Fig. 2.12 に示す．$\kappa = 0$ の場合は平面上の接触点軌道は円弧を描くが，$\kappa = 2.5$，$\kappa = 5$ の場合はスピンが生じることによって異なる軌道を描く．スピンが生じない，つまり $\omega_z = 0$ が成り立つのは，式 (2.62) より $\kappa > 1$ を考慮すると $n_{3x}\omega_x + n_{3y}\omega_y = 0$ となる場合のみである．また $\kappa \neq 0$ の場合，式 (2.65)-(2.67) において接触角や平面上の接触点位置の変化量を解析的に計算することが困難なため，ball-plate システムにおいて用いられた構成的な軌道によって軌道計画問題を解くことは困難となる．

2.2.7　2 軸慣性ロータ駆動型球型ロボットの状態方程式

2 軸慣性ロータによる球型ロボットの場合，動力学モデルは角運動量保存により角速度の次元で表現される．ここで，ロータの回転速度が任意に与えることができ

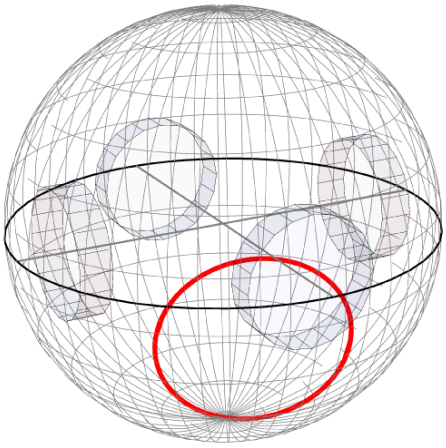

Fig. 2.11 The trajectory on the sphere

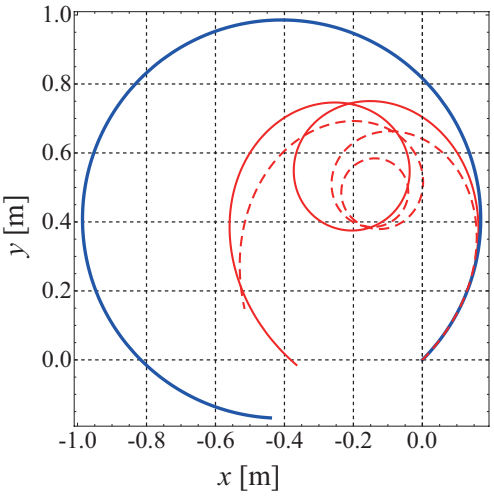

Fig. 2.12 Trajectories on the sphere, blue : $\kappa = 0$, red : $\kappa = 2.5$, red and dash : $\kappa = 5$

る場合，つまりロータの回転速度を入力としたとき，劣駆動による非ホロノミック拘束と転がり拘束の両方を含む球型ロボットの状態方程式を求める．

式 (2.18)-(2.22) に式 (2.59) を代入することにより次の状態方程式を得る，

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}_c^{-1} J_r \left[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\right] \boldsymbol{u} \triangleq \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})u_1 + \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})u_2 \tag{2.68}$$

ここで制御入力はロータの回転速度 $\boldsymbol{u} \triangleq \{\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2\}^T$ であり，ベクトル場 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2$ は次のように表される．

$$\boldsymbol{g}_1 = \alpha \begin{bmatrix} -Rn_{1y} \\ Rn_{1x} \\ \sin\theta \tan\phi \\ \cos\theta \\ \sin\theta \frac{\sin^2\phi + \kappa\cos^2\phi}{\cos\phi} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{g}_2 = \alpha \begin{bmatrix} -Rn_{2y} \\ Rn_{2x} \\ 1 \\ 0 \\ (1-\kappa)\sin\phi \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

ここで $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ は姿勢行列 $\boldsymbol{R}$ の要素であり次のように表される．

$$n_{1x} = \cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\phi\sin\psi \tag{2.70}$$

$$n_{1y} = -\cos\theta\sin\psi + \sin\theta\sin\phi\cos\psi \tag{2.71}$$

$$n_{2x} = \cos\phi\sin\psi \tag{2.72}$$

$$n_{2y} = \cos\phi\cos\psi \tag{2.73}$$

さらに $\alpha = J_r/J_{xx}$ は慣性行列 $\boldsymbol{J}_c$，ロータの回転軸回りの慣性モーメント J_r によって決定され，次のように表される質量分布パラメータである．

$$\alpha = \frac{J_r}{MR^2}\,\frac{\kappa - 1}{\kappa} \tag{2.74}$$

システム (2.68) は転がり拘束と角運動量保存による拘束を含む非ホロノミックシステムである．よって，(2.68) から得られた軌道は全ての拘束条件を満たしていることになり，式 (2.60) より必要なトルクの計算も可能である．

2.3　軌道計画

本節では，動力学を考慮した球型ロボットの制御モデル (2.68) について軌道計画を行う．まず，制御モデルの可制御性の解析を行い，解となる軌道の存在を示す．次に，本軌道計画で用いる nilpotent approximation 及び iterative steering について簡単に説明した後，軌道計画の詳細について述べる．最後に，シミュレーションにより本軌道計画手法の有効性を示す．

2.3.1　数学的準備

前章で述べたようにシステム (2.68) のベクトル場 $g_i, i = 1, \cdots, m$ は自身とその Lie bracket の集合として Lie 代数をなす．この時 Lie 代数 L は k 以上の長さの Lie bracket がゼロとなるような整数 k が存在するとき nilpotent であるという．またこの整数 k を order of nilpotency と呼ぶ．

球型ロボットのモデルは nilpotent システムではない．このことは実際に高次の Lie bracket を計算することで確かめることができる．しかし，ここで nilpotent approximation と呼ばれる近次を用いることでシステムは可制御性を失うことなく nilpotent システムとして扱うことができるようになる．ここでは初めに式 (2.68) の対称アフィン系の形で表される非ホロノミックシステムにおけるいくつかの定義について述べる [41]．

- Sub-Riemannian distance
  状態空間における 2 点 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in \boldsymbol{R}^n$ について，2 点を結ぶ軌道 $\boldsymbol{c}$（一意ではない）が存在しその距離を次のように定義する．

$$\text{length}(\boldsymbol{c}) = \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + \cdots + u_m^2(t)}dt \tag{2.75}$$

$$d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \inf_{\boldsymbol{c}} \text{length}(\boldsymbol{c}) \tag{2.76}$$

- nonholonomic partial derivatives
  滑らかな実関数 f と対称アフィンシステム $\dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{g}_i u_i$ に対して，f の

$\boldsymbol{g}_i, i = 1, \cdots, m$ に沿った Lie 微分 $\boldsymbol{g}_i f$ のことを first-order nonholonomic partial derivatives と呼ぶ．また高次の Lie 微分については $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{g}_i f))$ を second-order partial derivatives のように呼ぶ．

- order : p
  関数 f について，全ての $s-1$ 次以上の非ホロノミック偏微分が $\bar{\boldsymbol{x}}$ で消えるとき，関数 f は点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ で order $\leq s$ であるという．もし関数 f が $\boldsymbol{x}_0$ で order$s$ であるならば, $f(\boldsymbol{x}) = O(d^s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_o))$ となる．

- weight : ω_j，privileged coordinates $(z_1, \cdots, z_n)$
  整数 $\omega_j, j = 1, \cdots, n$ について， $n_s = n_s(\boldsymbol{x})$ と $n_0 = 0$ に対して $n_{s-1} < j \leq n_s$ であるとき $\omega_j = s$ となるように定義する．ある $\bar{\boldsymbol{x}}$ を原点とする局所座標系 $(z_1, \cdots, z_n)$ は，$j = 1, \cdots, n$ に対して z_j の次数が ω_j に等しいとき privileged coordinates を構成する．またこのときの ω_j を座標 z_j の weight であると言う．

privileged coordinates で表現される関数やベクトル場の次数については次のように計算を行なう．

- 単項式 $z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ の次数は，その weighted degree $\omega(\alpha) = \omega_1\alpha_1 + \cdots + \omega_n\alpha_n$ に等しい．

- $\boldsymbol{z} = 0$ ($\boldsymbol{x}_o$ の写像) における関数 $f(\boldsymbol{z})$ の次数は， f の 0 でのテイラー展開の中に現れる単項式のうち，最も小さい weighted degree に等しい．

- ベクトル場 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n} h_j(\boldsymbol{z})\partial_{z_j}$ の次数は，次のように定義される h の 0 でのテイラー展開の中に現れる単項式のうち，最も小さい weighted degree に等しい:

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}) \approx \sum_{\alpha, j} a_{\alpha, j} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \partial_{z_j} \tag{2.77}$$

  ここで $a_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \partial_{z_j}$ を単項式とみなし，∂_{z_j} の weight degree を $-\omega_j$ とする．また，式 (2.77) の $\{\partial_{z_j}\}$ は，点 $\boldsymbol{z}$ で定義される局所座標系である privileged

coordinates の $\boldsymbol{z}$ での接空間の基底を成す．また，ベクトル場 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z})$ のベクトル表記に対して

$$[h_1(\boldsymbol{z}), \cdots, h_n(\boldsymbol{z})]^T = h_1(\boldsymbol{z})\partial_{z_1} + \cdots + h_n(\boldsymbol{z})\partial_{z_n} \tag{2.78}$$

のような関係で表すことができる．

2.3.2　可制御性

前節では 2 軸慣性ロータによる球型ロボットのモデルの導出を行った．式 (2.68) は転がり拘束と劣駆動による非ホロノミック拘束を受ける，動力学を考慮した球型ロボットのモデルとなっている．軌道計画問題では，(2.68) を制御モデルとして，初期状態 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_s$ と目標状態 $\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}_f$ を結ぶ軌道 $\boldsymbol{x}(t), t \in [0, T]$ と，対応する制御入力 $\boldsymbol{u}(t)$ を求める．式 (2.18)-(2.22) で表される球体の運動学モデルの場合は，全ての状態 $\boldsymbol{x}$ について可制御であった．しかし，前節で示したように，劣駆動により 2 軸の慣性ロータによる入力では運動学モデルにおける入力である角速度を任意に生成することができない．そこで，制御モデル (2.68) について可制御性の確認を行う．$L(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2)$ をベクトル場 $\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$ によって生成される Lie algebra とする．$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$ の Lie bracket の内，次数の低いものから 8 個を，$\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3 = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2]$, $\boldsymbol{g}_4 = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_3]$, $\boldsymbol{g}_5 = [\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3]$, $\boldsymbol{g}_6 = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_4]$, $\boldsymbol{g}_7 = [\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_4]$, $\boldsymbol{g}_8 = [\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_5]$ とする．制御モデル (2.68) は nilpotent でないため $\boldsymbol{g}_9$ 以降も無数に存在する．distribution を $B_{ij} = \{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\}$, $i = 4, 5$, $j = 5, 6, 7, 8$ とする．

distributionB_{45} は $\theta = \pm\pi/2$ を除いて $\mathrm{Rank}(B_{45}) = 5$ となる．$\theta = \pm\pi/2$ は Fig. 2.13 の赤線であり，球面上の接触点座標において，2 つの慣性ロータの回転軸と直交する大円上に当たる．次に，B_{46} については，$\theta = \pm\pi/2$ でフルランクとなるため制御モデル (2.68) は全ての点でフルランクな distribution が存在するため可制御となる．5 つの状態変数と 2 つの入力からなる制御モデル (2.68) の可制御性は，2-trailer モデル [41] と構造的な類似性が見られる．degree of nonholonomy 及び grow vector はそれぞれ $\theta \neq \pm\pi/2$ では 3，$\{2, 3, 5\}$ であるが，$\theta = \pm\pi/2$ では 4 及び $\{2, 3, 4, 5\}$ となる．しかし，distribution の構造及び特異点に関して 2-trailer モデ

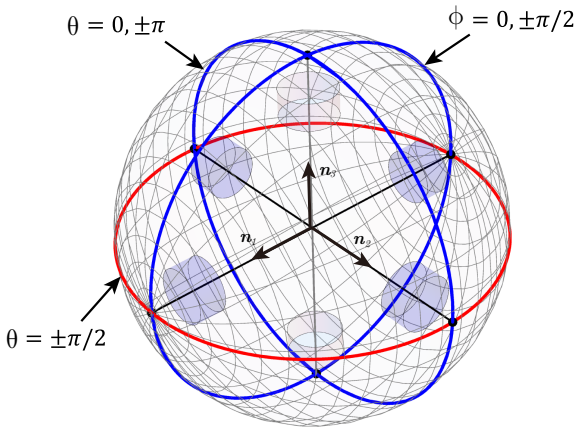

Fig. 2.13 Singular sets of different distributions. The red line represents the physical singularity at which $\det B_{45} = 0$. On the blue line corresponding to $\theta = 0, \pm\pi$, $\det B_{47} = \det B_{56} = \det B_{58} = 0$ and on the blue line corresponding to $\phi = 0, \pm\pi/2$, $\det B_{46} = \det B_{48} = \det B_{57} = 0$.

ルと異なる．2-trailer モデルでは，大域的に可制御となる distribution が存在する (B_{46} in [41]) が，制御モデル (2.68) の場合は，いかなる distributionB_{ij} においても $\mathrm{Rank}(B_{ij}) < 5$ となる点が存在する．例として，B_{ij}, $i = 4, 5$, $j = 6, 7, 8$ についてそれぞれ特異点となる点を Fig. 2.13 に示す．また，各 distribution の行列式の値 $|B_{ij}|$ の値を Fig. 2.14 から Fig. 2.15 に示す．行列式の値がゼロとなっている点でランク落ちしており，それぞれ球面上の接触点座標における大円に当たる．また，より高い次数 (6 次までを計算により確認) の Lie bracket によって distribution を構成しても大域的にフルランクとならない．

高次の Lie bracket を組み合わせても大域的にフルランクとなる distribution が存在しない場合でも，複数の distribution による近似システムを用いた nonhomogeneous nilpotent approximation[41] によって軌道計画を解くことができるとも考えられる．しかし，高次の Lie bracket の計算及び近似システムの導出の計算コストは非常に高く，nilpotent システムのための軌道計画手法が必要になることも考慮すると，実現困難であると言える．そこで，本節では軌道計画において特異点となる点を含む点と含まない点を分離し，単一の distribution の近似システムのみを用いる．さら

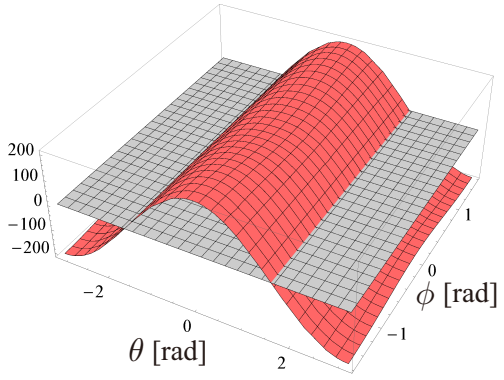

Fig. 2.14 Determinant of the matrix $[B_{45}]$

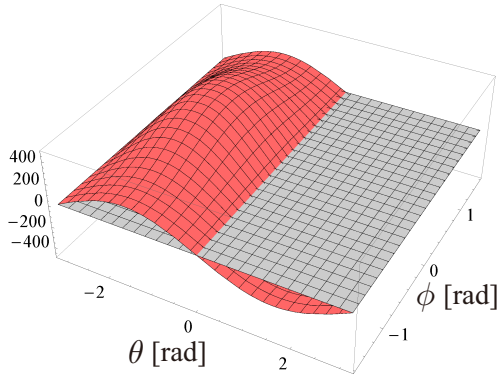

Fig. 2.15 Determinant of the matrix $[B_{46}]$

に，球面上の接触点軌道が $\theta = \phi = 0$ を始点と終点となる閉軌道となるように入力を選ぶことによって，$\theta = \phi = 0$ を原点とする 1 つの近似モデルを導出するだけでよい．従って，nilpotent approximation を適用した軌道計画として非常に計算が容易になる．

2.3.3　軌道計画手法の概要

可制御性の解析で明らかにしたように，制御モデル (2.68) は特異点の存在により，ball-plate システムと異なる性質を持つ．球面上の接触点がロータ回転軸に直交する大円上に在る時，degree of nonholonomy が 3 から 4 に変化する．また，球面上の接触点が特異点 $\theta = \pm\pi/2$ 上を移動する場合，角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_o$ は常にベクトル $\boldsymbol{\omega}_o$ 上に位置することになる．この時，動力学的な実現可能性条件 $\boldsymbol{n}_3 \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}_o = 0$ を満たさない．つまり，このような運動は動力学的に (つまり，2 軸の慣性ロータによる駆動方式によっては) 実現できないことを意味する．可制御性の解析より，全ての初期状態と目標状態に対する解が存在することは明らかである．しかし，システムが nilpotent でないこと，differentially flat でないこと，正準系への変換ができないことから，既存の軌道計画手法の適用ができない．特に ball-plate システムに対する nilpotent approximation 及び iterative steering を組み合わせた軌道計画手法は，

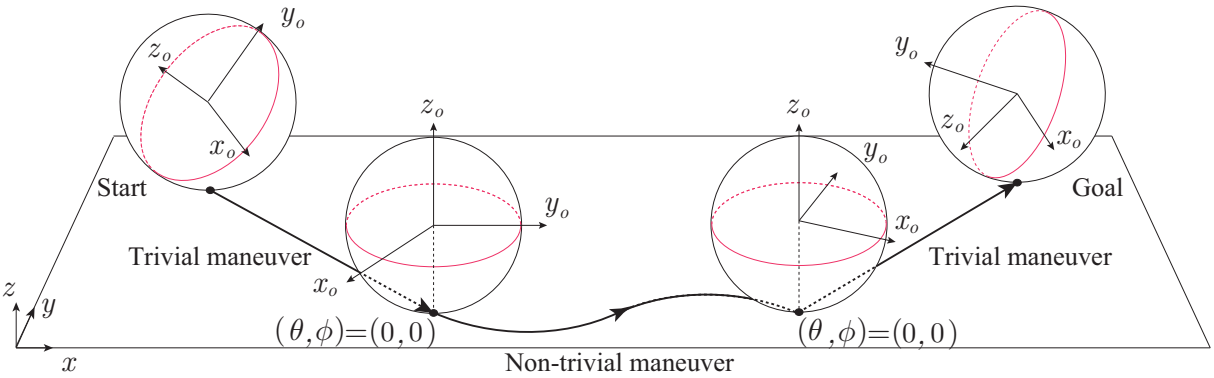

Fig. 2.16 Motion planning strategy.

特異点の存在により適用ができない．また，特異点を含む場合，2-trailer モデルに対する nonhomogenious nilpotent approximation を適用した軌道計画手法については，全ての点で可制御となる distribution の存在が必要となる．しかし，高次の Lie bracket の計算及び近似モデルの導出，入力の計算は計算コストが高く，実現は困難である．また，接触点軌道の解析的な計算については，球面上の接触点軌道がに直交する測地線を除いてスピンの存在により困難となる．

そこで，本論文では，制御モデル (2.68) の軌道計画を複数の段階に分けて行う．Fig. 2.16 に本軌道計画手法の概要図を示す．軌道計画は大きく 3 つのパートに分かれている．1 つ目のパートと 3 つ目のパートでは，特異点を通過することを目的としており，球面上の接触点が特異点 $\theta = \pm\pi/2$ を通る軌道となる．また，1 つ目のパートでは，球面上の接触点を北極点または南極点 $(\theta = 0, \phi = 0)$ へと移動させ，3 つ目のパートでは北極点または南極点から目標状態とする球面上の接触点まで移動させる．いずれも特異点に直交するような測地線となるような軌道を描くため，スピンが発生せずに幾何学的な関係より問題を解くことができる．2 つ目のパートでは，球面上の接触点座標は変化させずに，残りの変数である平面上の接触点位置 (x, y) と接触角 ψ を目標状態まで移動させることが目的となる．また，球面上の接触点座標が特異点を通らずに半球面上のみを通るような軌道を用いる．半球面のみであれば，distribution B_{45} は特異点を持たないため，nilpotent approximation の適用が可能となる．次節では，本軌道計画における 2 つ目のパートで用いる nilpotent

approximation 及び iterative steering について説明する．

2.3.4　制御モデルの近似

初めに，n 変数 m 入力を持つ対称アフィンシステム $\dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u_i$ に対する nilpotent approximation[41][42] について述べる．

(1) growth vector と重み $\omega_1, \cdots, \omega_n$ を計算する．

(2) 点 $\boldsymbol{x}_o$ の接空間 $\mathcal{L}^r(\boldsymbol{x}_o) = T_{\boldsymbol{x}_o}\boldsymbol{R}^n$ の基底をなし，また $\boldsymbol{x}_o$ の近傍の点 $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\boldsymbol{g}_{n_{s-1}+1}(\boldsymbol{x}), \cdots, \boldsymbol{g}_{n_s}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{L}^s(\boldsymbol{x}), \quad s = 1, \cdots, r \tag{2.79}$$

となるベクトル場 $\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n$ を選ぶ．ここで，$\mathcal{L}^s(\boldsymbol{x})$ は length $\leq s$ である Lie bracket によって張られるベクトル空間である．

(3) 元の座標系 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ から局所座標系 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ への変換を次のように行う．

$$\boldsymbol{y} = \Gamma^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \tag{2.80}$$

ここで， Γ は各要素が Γ_{ij} が次のように定義される $n \times n$ 行列である．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}_o) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ij} \partial_{x_i} \right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_o} \\ &= [\Gamma_{1j}, \Gamma_{2j}, \Gamma_{3j}, \Gamma_{4j}, \Gamma_{5j}]^T \end{aligned} \tag{2.81}$$

(4) $\boldsymbol{x}_o$ を原点とする privileged coordinates $\boldsymbol{z} = (z_1, \cdots, z_n)$ を次のように求める，

$$z_j = y_j + \sum_{k=2}^{\omega_j - 1} h_k(y_1, \cdots, y_n), \quad j = 1, \cdots, n \tag{2.82}$$

ここで

$$h_k(y_1, \cdots, y_n) = - \sum_{|\alpha|=k, \omega(\alpha)<\omega_j} \boldsymbol{g}_1^{\alpha_1} \cdots \boldsymbol{g}_{j-1}^{\alpha_{j-1}} (y_j + \sum_{q=2}^{k-1} h_q)(\boldsymbol{x}_o) \prod_{i=1}^{j-1} \frac{y_i^{\alpha_i}}{\alpha_i!} \tag{2.83}$$

また，$|\alpha| = \sum_{i-1}^{n} \alpha_i$，$\omega(\alpha) = \omega_1\alpha_1 + \cdots + \omega_n\alpha_n$ である．

(5) 元のシステムを privileged coordinates で表す．

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{z}) u_i \tag{2.84}$$

(6) ベクトル場 $\boldsymbol{g}_i$ を $\mathbf{0}$ でテイラー展開する．さらに weight に関して各項を整理する．

$$\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_i^{(-1)}(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{g}_i^{(0)}(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{g}_i^{(1)}(\boldsymbol{z}) + \cdots \tag{2.85}$$

さらに $\hat{\boldsymbol{g}}_i = \boldsymbol{g}_i^{(-1)}(\boldsymbol{z})$ とする．

(7)　次式を元のシステムの nilpotent 近次システムとする．

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{m} \hat{\boldsymbol{g}}_i(z_1, \cdots, z_{j-1}) u_i, \quad j = 1, \cdots, n \tag{2.86}$$

以上の手順で得られた近次システム (2.86) に対して，初期状態から目標状態へ導く適切な入力を計算する．近似システム (2.86) の右辺は多項式関数であり，次のような triangular form を成す．

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_1 \\
&\vdots \\
\dot{x}_m &= u_m \\
\dot{x}_{m+1} &= \sum_{j=1}^{m} g_{m+1,j}(x_1, \cdots, x_m) u_j \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \sum_{j=1}^{m} g_{n,j}(x_1, \cdots, x_{n-1}) u_j
\end{aligned} \tag{2.87}$$

次に，モデル (2.68) に対して nilpotent approximation を適用し，近似モデルを導出する．球面上の接触点座標における南極点 $(\theta, \phi) = (0, 0)$ を原点とする nilpotent 近次システムを求める．初めに，次のような入力変換を適用する．

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sec u \\ 1 & -\tan u \tan v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

変換後のシステムは以下のように表される．

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \omega_1 \\
\dot{\phi} &= \omega_2 \\
\dot{\psi} &= (1-k)\sin v\omega_1 + k\sec v\tan u\omega_2 \\
\dot{x} &= -R\cos v\cos\psi\omega_1 + R\sin\psi\omega_2 \\
\dot{y} &= R\cos v\sin\psi\omega_1 + R\cos\psi\omega_2
\end{aligned} \tag{2.89}$$

ここで，変換行列 (2.88) は $\theta = \pm\pi/2$ において特異となることに注意する．以下に，対称アフィンシステム (2.88) に対して nilpotent approximation を適用して近似モデルの導出を行う手順について説明する．

(1) Weight を (1, 1, 2, 3, 3) とする．

(2) 接空間の基底として行列 B_r を $B_r = \{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4, \boldsymbol{g}_5\}$ とする．

(3) 元の座標系 $\boldsymbol{x}$ から局所座標系 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_5)$ へ変換する．

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \tag{2.90}$$

ここで $\boldsymbol{\Gamma}$ は $n \times n$ 行列であり，$u = v = 0, \psi = \Psi$ のとき各要素は次のようになる．

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{42} & 0 & \Gamma_{44} & \Gamma_{45} \\ \Gamma_{51} & 0 & 0 & \Gamma_{54} & \Gamma_{55} \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

よって局所座標系は次のように表される．

$$y_1 = u \tag{2.92}$$

$$y_2 = v \tag{2.93}$$

$$y_3 = \Gamma_{33}\psi \tag{2.94}$$

$$y_4 = \Gamma_{42}v + \Gamma_{44}x + \Gamma_{45}y \tag{2.95}$$

$$y_5 = \Gamma_{51}u + \Gamma_{54}x + \Gamma_{55}y \tag{2.96}$$

ここで定数 Γ_{33} から Γ_{55} は，$\Gamma_{33} = \frac{1}{2k-1}$，$\Gamma_{42} = \frac{1}{3k-1}$，$\Gamma_{44} = \frac{\sin\Psi}{R(1-3k)}$，$\Gamma_{45} = \frac{\cos\Psi}{R(1-3k)}$，$\Gamma_{51} = \frac{1}{3k-1}$，$\Gamma_{54} = \frac{\cos\Psi}{R(1-3k)}$，$\Gamma_{55} = \frac{-\sin\Psi}{R(1-3k)}$ となる．

(4) $\theta = \phi = 0$ の時，式 (2.83) は 0 となる．よって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$.

(5) privileged coordinates によって元のシステムのダイナミクスを表現すると

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{z}) u_i \tag{2.97}$$

ここで，ベクトル場 $\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{z})$，$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{z})$ はそれぞれ次のようになる．

$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \Gamma_{33}(1-k)\sin z_2 \\ -R\Gamma_{44}\cos z_2 \cos\left(\frac{z_3}{\Gamma_{33}}\right) + \Gamma_{45} R \cos z_2 \sin\left(\frac{z_3}{\Gamma_{33}}\right) \\ \Gamma_{51} - \Gamma_{54} R \cos z_2 \cos\left(\frac{z_3}{\Gamma_{33}}\right) + \Gamma_{55} R \cos z_2 \sin\left(\frac{z_3}{\Gamma_{33}}\right) \end{bmatrix} \tag{2.98}$$

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \Gamma_{33} k \tan z_1 \sec z_2 \\ \Gamma_{42} + \Gamma_{44} R \sin\left(\frac{z_3}{\Gamma_{33}}\right) + \Gamma_{45} R \cos\left(\frac{z_3}{\Gamma_{33}}\right) \\ \Gamma_{54} R \sin\left(\frac{z_3}{\Gamma_{33}}\right) + \Gamma_{55} R \cos\left(\frac{z_3}{\Gamma_{33}}\right) \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

(6) ベクトル場 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{z})$ を privileged coordinates の原点 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ でテイラー展開して weighted degree について均一なベクトル場として表現し，ベクトル場の近似を $\hat{\boldsymbol{g}}_i = \boldsymbol{g}_i^{(-1)}(\boldsymbol{z})$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{z})$ について，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{z}) &= \partial_{z_1} + \Gamma_{33}(1-k)\sin z_2 \partial_{z_3} \\
&\quad + \Big\{ -\Gamma_{44} R \cos z_2 \cos\left(z_3/\Gamma_{33}\right) + \Gamma_{45} R \cos z_2 \sin\left(z_3/\Gamma_{33}\right) \Big\} \partial_{z_4} \\
&\quad + \Big\{ \Gamma_{51} - \Gamma_{54} R \cos z_2 \cos\left(z_3/\Gamma_{33}\right) + \Gamma_{55} R \cos z_2 \sin\left(z_3/\Gamma_{33}\right) \Big\} \partial_{z_5} \\
\hat{\boldsymbol{g}}_1(\boldsymbol{z}) &= \partial_{z_1} + \Gamma_{33}(1-k) z_2 \partial_{z_3} \\
&\quad + \Big\{ -\Gamma_{44} R + \frac{\Gamma_{45} R}{\Gamma_{33}} z_3 + \frac{1}{2}\Gamma_{44} R z_2^2 \Big\} \partial_{z_4} \\
&\quad + \Big\{ (\Gamma_{51} - \Gamma_{54} R) + \frac{\Gamma_{55} R}{\Gamma_{33}} z_3 + \frac{1}{2}\Gamma_{54} R z_2^2 \Big\} \partial_{z_5}
\end{aligned} \tag{2.100}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{z})$ について，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{z}) &= \partial_{z_2} + \Gamma_{33} k \tan z_1 \sec z_2 \partial_{z_3} \\ &\quad + \Big\{ \Gamma_{42} + \Gamma_{44} R \sin\left(z_3/\Gamma_{33}\right) + \Gamma_{45} R \cos\left(z_3/\Gamma_{33}\right) \Big\} \partial_{z_4} \\ &\quad + \Big\{ \Gamma_{54} R \sin\left(z_3/\Gamma_{33}\right) + \Gamma_{55} R \cos\left(z_3/\Gamma_{33}\right) \Big\} \partial_{z_5} \qquad (2.101) \\ \hat{\boldsymbol{g}}_2(\boldsymbol{z}) &= \partial_{z_2} + \Gamma_{33} k z_1 \partial_{z_3} \\ &\quad + \Big\{ (\Gamma_{42} + \Gamma_{45} R) + \frac{\Gamma_{44} R}{\Gamma_{33}} z_3 \Big\} \partial_{z_4} + \Big\{ \Gamma_{55} R - \frac{\Gamma_{54} R}{\Gamma_{33}} z_3 \Big\} \partial_{z_5} \qquad (2.102)\end{aligned}$$

となる．

(7) 対称アフィンシステム (2.68) の nilpotent 近次システムは次のように表される．

$$\begin{aligned}\hat{\dot{\boldsymbol{z}}} &= \sum_{i=1}^{2} \hat{\boldsymbol{g}}_i(\boldsymbol{z}) u_i \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \Gamma_{33}(1-k) z_2 & \Gamma_{33} k z_1 \\ -\Gamma_{42} + \frac{\Gamma_{45} R}{\Gamma_{33}} z_3 + \frac{1}{2} \Gamma_{44} R z_2^2 & (\Gamma_{42} + \Gamma_{45} R) + \frac{\Gamma_{44} R}{\Gamma_{33}} z_3 \\ (\Gamma_{51} - \Gamma_{54} R) + \frac{\Gamma_{55} R}{\Gamma_{33}} z_3 + \frac{1}{2} \Gamma_{54} R z_2^2 & \Gamma_{55} R - \frac{\Gamma_{54} R}{\Gamma_{33}} z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (2.103)\end{aligned}$$

ここで，近次システム (2.103) の可制御性について，Lie bracket を $\hat{\boldsymbol{g}}_3 = [\hat{\boldsymbol{g}}_1, \hat{\boldsymbol{g}}_2]$, $\hat{\boldsymbol{g}}_4 = [\hat{\boldsymbol{g}}_1, \hat{\boldsymbol{g}}_3]$，$\hat{\boldsymbol{g}}_5 = [\hat{\boldsymbol{g}}_1, \hat{\boldsymbol{g}}_3]$ として実際に計算する．

$$\hat{\boldsymbol{g}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{k}{3k-1}(\cos\Psi z_1 + \sin\Psi z_2) \\ -\frac{1}{3k-1}\left((k-2)\cos\Psi z_2 + k \sin\Psi z_1\right) \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{g}}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos\Psi \\ -\sin\Psi \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{g}}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin\Psi \\ -\frac{3(1-k)}{3k-1}\cos\Psi \end{bmatrix}$$

distribution を $G = span\{\hat{\boldsymbol{g}}_1, \hat{\boldsymbol{g}}_2, \hat{\boldsymbol{g}}_3, \hat{\boldsymbol{g}}_4, \hat{\boldsymbol{g}}_5\}$ とすると $\det G = \frac{1+(2-3k)\cos 2\Psi}{3k-1} = \text{const}$ より近次システム (2.103) は可制御である．

2.3.5 Iterative Steering

nilpotent approximation より得られた近似モデル (2.103) に基づき，制御モデル (2.68) を目標値へと導く制御入力を設計する．iterative steering は，一定時間間隔毎にシステムを目標状態へと導くようなフィードフォワード入力を制御入力として与えることによって，対象とするシステムを目標状態へ安定化させる制御アルゴリズムである．各時間間隔において，少なくとも目標状態との誤差を減少させることが必要となるが，目標状態を初期状態の近傍に新たに設定することで保証される [43][44][45][16]．以下に，iterative steering の詳細について示す．

A1. $i = 0$，$t_i = 0$，$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_s$ とする．

A2. 制御入力を与える時間区間を ΔT として，終端時刻を $t_{i+1} = t_i + \Delta T$ とする．初期状態と目標状態の間に $\boldsymbol{x}_i^d = \boldsymbol{x}_i + \eta(\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{x}_i)$ となるような点を新たな目標状態として設定する．ここで，$\eta \in [0, 1]$ は十分に小さな正数である．Nilpotent approximation により得られた近似システム (2.103) に目標状態 $\boldsymbol{x}_i^d$ を射影して得られるベクトルを $\boldsymbol{z}_i^d$ とする．近似システムにおいて，時間区間 $t \in [t_i, t_{i+1}]$ で原点から $\boldsymbol{z}_i^d$ まで導く制御入力を設計する．この制御入力は nilpotent システムの構造を利用することによって解析的に得ることができる．

A3. 制御入力を元のシステムへ適用する．許容誤差を ϵ とし，もし終端時刻において $\|\boldsymbol{x}(t_{i+1})\| > \epsilon$ であれば，$i = i + 1$ 及び $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}(t_{i+1})$ として手順 2 に戻る．$\|\boldsymbol{x}(t_{i+1})\| \leq \epsilon$ であれば終了する．

各時間区間で設定される目標状態は，パラメータ η によって決定される．η が 1 に近いほど目標状態が本来の目標状態の近くに設定されるため，より少ない回数で軌道計画を行うことが期待できる．しかし，近似システムは原点から離れるほどに元のシステムとの誤差が大きくなる．近似システムに対して設計された制御入力が元のシステム上で少なくとも目標状態へ近づくことを保証するためには，十分に小さな η を選ぶ必要がある．制御入力を繰り返し与えるごとに，次第に目標状態へ近づくことを考慮すると，η の値は一定ではなく，初期状態と目標状態の誤差の大きさ

によって変化させる方が効率が良いといえる．そこで，η を適応的に変化させるように変更した global iterative steering[46][47] について，以下に説明する．

B1. $i = j = k = 0$ とし，初期時刻を $t_j = 0$，初期状態を $\boldsymbol{x}_{0,0} = \boldsymbol{x}_s$，初期パラメータを $\eta_0 = \|\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_s)\|_{\boldsymbol{x}_f}$ とする．

B2. $k = k+1$，$t_{i+1} = t_i + \Delta T$ とする．ここで，ΔT は各繰り返しにおける時間長さである．パラメータ η によって，初期状態と目標状態の間に新たな目標状態を $\boldsymbol{x}^d_{j,k} = \boldsymbol{x}_{j,k} + \boldsymbol{H}_k(\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{x}_{j,k})$ として設定する．ここで，$\boldsymbol{H}_k = \mathrm{diag}\{h^1_k, \cdots, h^5_k\}$ であり，$\boldsymbol{H}_k$ の対角要素 $h^m_k, m = 1, \cdots, 5$ はそれぞれ次のように定義される十分に小さな定数である．

$$h^m_k = \max\left\{0, \left(1 - \frac{k\eta_j}{\|\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_{j,0})\|_{\boldsymbol{x}_f}}\right)^{w_m}\right\},\ m = 1, \ldots, 5 \tag{2.104}$$

ここで，η_j は適応的に決定されるパラメータであり，w_m は m 番目の変数の重みである．

B3. 近似システム (2.103) より，目標状態 $\boldsymbol{x}^d_{j,k}$ を privileged coordinates 上に射影して得られるベクトル $\boldsymbol{z}^d_i$ を計算する．近似システムについて privileged coordinates 上で，時間区間 $t \in [t_i, t_{i+1}]$ で原点から目標状態まで移動させるような制御入力 $\boldsymbol{u}_i$ を設計する．この制御入力を元のシステム (2.68) に適用する．

B4. もし $\|\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}(t_i{+}1))\|_{\boldsymbol{x}^d_{i,j}} > \frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}(t_i))\|_{\boldsymbol{x}^d_{i,j}}$ であれば，パラメータを $\eta_{j+1} = \eta_j/2$ と変更する．さらに，$j = j{+}1$，$k = 0$ と更新し，新たな初期状態を $\boldsymbol{x}_{j,0} = \boldsymbol{x}(t_{i+1})$ とする．

B5. $i = i + 1$ として手順 2 に戻る．目標状態との誤差 $\|\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}(t_{i+1}))\|_{\boldsymbol{x}_f}$ が許容誤差 e よりも小さくなるまで繰り返す．

上記のアルゴリズムでは，各繰り返しにおける目標状態を決定するパラメータ η が自動的に更新される．もし，最初に設定したパラメータの下で目標状態へ近づかなかった場合には，パラメータを半分にしてより初期状態の近くに目標状態を設定することになる．

各時間間隔における制御入力 $u_k(t)$ は

$$u_k(t) = \alpha(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \tag{2.105}$$

つまり，k 番目の入力は $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}(t_k)$ と表され，各時間間隔の初期状態と目標状態によって決定される．しかし実際には前節で得られた nilpotent 近次システムにおいて入力の設計を行うため，

$$u(t) = \alpha(\boldsymbol{z}_k^f), \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \tag{2.106}$$

ここで $z_k^f = \Gamma(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_f)$ である．各 iteration において，目標値との誤差に基づいたフィードフォワード入力 (2.106) を計算し，それを繰り返し行うことによって状態を目標値に収束させる．入力の大きさは，各 iteration の時間幅 ΔT の大きさによって正規化されており，ΔT を変化させることにより入力の絶対値が変化する．また ΔT をサンプリング時間とみなすと，iterative steering はフィードバック制御と同等のものとなる．nilpotent approximation によって得られた近似システム (2.103) を元に，元のシステム (2.68) に対して，初期状態 $\boldsymbol{x}_s$ から目標状態 $\boldsymbol{x}_f$ へ導く入力を計算する．ここでは，5 つの状態変数を 2 つの制御入力によって制御する必要がある．特に，本軌道計画では球面上の接触点 (θ, ϕ) は変化させずに接触角 ψ と平面上の接触点位置 (x, y) を目標値まで変化させることになる．

nilpotent システムの構造を利用した軌道手法は [38][48][49] 等が提案されている．本論文では，計算が簡潔であり，幾何学的な解釈が得られることから，幾何学的アプローチによる構成的な軌道を用いて軌道計画を行う．さらに，軌道計画を次のように 2 段階に分けて行う．

1. 接触角制御
   球面上の接触点座標 (θ, ϕ) を変化させずに接触角 ψ を目標値へ．

2. 接触点位置制御
   球の姿勢 (θ, ϕ, ψ) を変化させずに位置 (x, y) を目標値へ．

以下に，それぞれの軌道計画を iterative steering の手順に沿って説明する．

1. 接触角制御

初めに，球面上の接触点座標 θ, ϕ を変化させずに接触角 ψ を目標状態まで移動させる．この時，平面上の接触点位置 (x, y) は考慮しない．

A1. $i = 0$ に対して，初期時刻及び初期状態をそれぞれ $t_i = 0$，$\boldsymbol{x}_i \triangleq [\theta_i, \phi_i, \psi_i, x_i, y_i] = [0, 0, \psi_s, x_s, y_s]$ とする．

A2. i 番目のステップの終端時刻を $t_{i+1} = t_i + \Delta T$，目標接触角 $\psi_{j,k} = \psi(t_i)$ に対して $\psi^d_{j,k} = \psi_{j,k} + h^3_k(\psi_f - \psi_{j,k})$ を設定する．ここで，h^3_k は式 (2.104) によって定義される．さらに，式 (2.103) により計算される i 番目のステップにおける目標接触角の privileged coordinates へ写像された値は次のようになる．

$$\Psi^d_i = h^3_k(\psi_f - \psi_{j,k})/(2\kappa - 1) \tag{2.107}$$

ここで，$\kappa > 1$ は慣性比率である．制御入力として次のような制御入力を設定する．

$$u_1(t) = r_i \cos \sigma_i \Omega\, t \tag{2.108}$$

$$u_2(t) = r_i \sin \sigma_i \Omega\, t \tag{2.109}$$

ここで，$\Omega = 2\pi/\Delta T$，$t \in [t_i, t_{i+1}]$，$\sigma_i = \mathrm{sign}(\psi_f - \psi_{j,k})$ である．制御入力 (2.108)-(2.109) は球面上の接触点座標上で半径 r_i の円を描くような軌道を生成する．また σ_i は円の方向を決定するパラメータである．実際に，球面上の接触点座標は制御入力 (2.108)-(2.109) を代入すると次のように表される．

$$\theta(t) = \frac{r_i}{\sigma_i \Omega} \sin \sigma_i \Omega\, t \tag{2.110}$$

$$\phi(t) = \frac{r_i}{\sigma_i \Omega}(1 - \cos \sigma_i \Omega\, t) \tag{2.111}$$

よって，各ステップにおける終端時刻では，球面上の接触点座標に関して，パラメータ r_i の値によらず $\theta(t_i) = \theta(t_{i+1})$，$\phi(t_i) = \phi(t_{i+1})$ が成立する．制御入力 (2.108)-(2.109) による接触角の変化分は，nilpotent approximation によって導出された近似システム (2.103) 上で計算する．

$$z_1(t_{i+1}) = z_2(t_{i+1}) = 0,\ z_3(t_{i+1}) = \sigma_i \pi r_i^2/\Omega^2 \tag{2.112}$$

パラメータ r_i は，終端時刻における接触角 $\psi(t_i)$ が目標接触角 Ψ_i^d と一致するように，$z_3(t_{i+1}) = \Psi_i^d$ を満たすように決定する．

$$r_i = \Omega\sqrt{|\Psi_i^d|/\pi} \tag{2.113}$$

以上により，制御入力 (2.108)-(2.109) は i 番目のステップにおいて，privileged coordinates 上で z_1, z_2 及び z_3 を原点から $0, 0$ 及び Ψ_i^d まで変化させる．一方で，元のシステム (2.89)-(2.89) 上では，球面上の接触点に関しては $\theta(t_{i+1}) = \phi(t_{i+1}) = 0$ を満たすが，接触角については目標接触角 ψ_i^d にはならない．

A3. $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{i+1}$ とする．$i = i + 1$ として次のステップに進む．ステップの終端時刻における接触角 $\psi(t_{i+1})$ が目標接触角 ψ_f に対して十分に近づくまで繰り返す．

制御入力 (2.108)-(2.109) は球面上の接触点が円を描く軌道となることから，$|\theta(t)| \leq r_i/\Omega$，$|\phi(t)| \leq r_i/\Omega$ と見積もることができる．球面上の接触点が近似システム (2.103) の特異点 $\theta = \pm\pi/2$ を通過することのないような条件は，次式により与えられる．

$$\frac{r_i}{\Omega} = \sqrt{\frac{h_k^3\,|\psi_f - \psi_{j,k}|}{(2\kappa - 1)\pi}} \leq \sqrt{\frac{h_k^3}{2\kappa - 1}} < \pi/2 \tag{2.114}$$

式を整理すると，h_k^3 に関する条件が求められる．

$$h_k^3 < (2\kappa - 1)\pi^2/4 \tag{2.115}$$

よって，慣性比率 $\kappa > 1$ であるため，任意の $h_k^3 \in [0, 1]$ に対して制御入力 (2.108)-(2.109) は球面上の接触点座標における特異点 $\theta = \pm\pi/2$ を通らないことが確認できた．

2. 接触点位置制御

次に，平面上の接触点位置 (x, y) を，球体の姿勢 (球面上の接触点位置 (θ, ϕ) と接触角 ψ を変化させることなく，目標値 (x_f, y_f) まで移動させる制御入力の導出を行う．

A1. $i = 0$ に対して，初期時刻及び初期状態を $t_i = 0$，$\boldsymbol{x}_i = [0, 0, \psi_f, \bar{x}_s, \bar{y}_s]$ とする．ここで，$\bar{x}_s, \bar{y}_s$ は接触角制御において最終ステップの終端時刻における値となる．

A2. i 番目のステップの終端時刻を $t_{i+1} = t_i + 2\Delta T$ とする．目標位置 $x_{i,j} = x(t_i)$ 及び $y_{i,j} = y(t_i)$ に対して $x^d_{j,k} = x_{j,k} + h^4_k(x_f - x_{j,k})$，$y^d_{j,k} = y_{j,k} + h^5_k(y_f - y_{j,k})$ を設定し，privileged coordinates 上での目標位置を (2.103) より求める．

$$X^d_i = \frac{h_k}{R(1-3\kappa)}\{\sin\psi_f(x_f - x_{j,k}) + \cos\psi_f(y_f - y_{j,k})\} \quad (2.116)$$

$$Y^d_i = \frac{h_k}{R(1-3\kappa)}\{\cos\psi_f(x_f - x_{j,k}) - \sin\psi_f(y_f - y_{j,k})\} \quad (2.117)$$

ここで，$h_k = h^4_k = h^5_k$ である．$\Omega = 2\pi/\Delta T$ として，制御入力を次のように定義する．i 番目のステップの時間区間 $t \in [2(i-1)\Delta T, (2i-1)\Delta T]$ に対して，

$$u_1(t) = \rho_i \cos(\gamma_i + \Omega t) \quad (2.118)$$

$$u_2(t) = \rho_i \sin(\gamma_i + \Omega t) \quad (2.119)$$

また，i 番目のステップの時間区間 $t \in [(2i-1)\Delta T, 2i\Delta T]$ に対して，

$$u_1(t) = \rho_i \cos(\gamma_i - \Omega t) \quad (2.120)$$

$$u_2(t) = \rho_i \sin(\gamma_i - \Omega t) \quad (2.121)$$

これらの制御入力は，球面上の接触点座標において 2 つの原点 $\theta = 0, \phi = 0$ を中心とする対称な円を描く軌道を生成する．実際に，球面上の接触点座標は，時間区間 $t \in [2(i-1)\Delta T, (2i-1)\Delta T]$ に対して

$$\theta(t) = \frac{\rho_i}{\Omega}\{\sin(\gamma_i + \Omega t) - \sin\gamma_i\} \quad (2.122)$$

$$\phi(t) = \frac{\rho_i}{\Omega}\{\cos\gamma_i - \sin(\gamma_i + \Omega t)\} \quad (2.123)$$

また，$t \in [(2i-1)\Delta T, 2i\Delta T]$ に対して

$$\theta(t) = \frac{\rho_i}{\Omega}\{\sin\gamma_i - \sin(\gamma + \Omega t)\} \quad (2.124)$$

$$\phi(t) = \frac{\rho_i}{\Omega}\{\sin(\gamma_i + \Omega t) - \cos\gamma\} \quad (2.125)$$

となる．球面上の接触点 (θ, ϕ) に関して，各ステップの終端時刻 $t = t_i + (2i - 1)\Delta T$ においてゼロとなることから，$\theta(t_i) = \theta(t_i), \phi(t_i) = \phi(t_i)$ を満たす．また，球面上の接触点は 2 つの対称な円上を時計回り及び反時計回りに移動することから，各ステップの終端時刻において接触角 ψ の値は変化しない，つまり $\psi(t_i) = \psi_(t_{i+1})$ となる．よって，制御入力 (2.118)-(2.119) はパラメータの値によらず，ステップの初期時刻と終端時刻で球体の姿勢を変化させない．次に，制御入力 (2.118)-(2.119) による平面上の接触点位置 (x, y) の変化分について計算する．近似システム (2.103) に制御入力を代入して，時間区間 $t \in [2(i-1)\Delta T, 2i\Delta T]$ で積分することにより，次のように計算できる．

$$z_1(t_{i+1}) = z_2(t_{i+1}) = z_3(t_{i+1}) = 0 \tag{2.126}$$

$$z_4(t_{i+1}) = 2\pi\rho_i^3 \sin(\psi_f - \gamma_i)/\Omega^3 \tag{2.127}$$

$$z_5(t_{i+1}) = 2\pi\rho_i^3 \cos(\psi_f - \gamma_i)/\Omega^3 \tag{2.128}$$

ここで，終端時刻における値が目標値と一致するための条件 $z_4(t_{i+1}) = X_i^d$, $z_5(t_{i+1}) = Y_i^d$ から，パラメータ ρ_i 及び γ_i の値を決定する．

$$\rho_i = \Omega\sqrt[6]{\frac{(X_i^d)^2 + (Y_i^d)^2}{4\pi^2}} \tag{2.129}$$

$$\gamma_i = \psi_f - \arctan(X_i^d/Y_i^d) \tag{2.130}$$

以上により，(2.118)-(2.119) 及び (2.120)-(2.121) によって定義される制御入力は，近似システム (2.103) 上で，各変数を原点から $[0, 0, 0, X_i^d, Y_i^d]$ まで変化させる．一方で，元のシステム上では球体の姿勢を変化させない $(\theta(t_{i+1}) = \phi(t_{i+1}) = 0,\ \psi(t_{i+1}) = \psi_f)$ が，平面上の接触位置を目標位置 $x_{j,k}^d$ 及び $y_{j,k}^d$ まで変化させないことに注意する．

A3. $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{i+1}$ とする．$i = i + 1$ として次のステップに進む．ステップの終端時刻における平面上の接触点位置 $(x(t_{i+1}), y(t_{i+1}))$ が目標値 $(x_{j,k}^d, y_{j,k}^d)$ に対して十分に近づくまで繰り返す．

制御入力 (2.118)-(2.119) 及び (2.120)-(2.121) は球面上の接触点座標系 (θ, ϕ) 上で半径 ρ_i/Ω の円を描き，$|\phi(t)| \leq \rho_i/\Omega$ を見積もることができる．軌道が特異点となる

赤道上を通過しないための条件は次のように与えられる．

$$\frac{\rho_i}{\Omega} = \sqrt[6]{\frac{(X_i^d)^2 + (Y_i^d)^2}{4\pi^2}} < \frac{\pi}{2} \tag{2.131}$$

この不等式条件は，(2.116)-(2.117) を代入することにより，h_k に関して次のように表すことができる．

$$h_k < \bar{h}_k = \frac{\pi^4 R(3\kappa - 1)}{32\sqrt{(x_f - x_{j,k})^2 + (y_f - y_{j,k})^2}} \tag{2.132}$$

よって，h_k が (2.132) を満たすとき，球面上の接触点の軌道が特異点 $\theta = \pm\pi/2$ を通過することはない．もし (2.104) によって定義される h_k が $\bar{h}_k$ よりも大きくなる場合には，$h_k = \bar{h}_k - \epsilon$ とすることで特異点を回避することができる．ここで，ϵ は定数である．

2.3.6　特異点回避のための入力

本節では，本軌道計画の trivial maneuver で用いるスピンの生じない軌道について，目標状態 $\boldsymbol{x}_f$ からパート 2 の目標値 $\bar{\boldsymbol{x}}_f = [\bar{x}_f, \bar{y}_f, 0, 0, \bar{\psi}_f]^T$ を計算方法について示す．

初めに，球面上で $\theta = \pm\pi/2$ に直交する測地線に沿った球型ロボットの運動ではスピンが生じないことを示す．任意の軸 $\boldsymbol{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ 回りに α 回転するときの回転行列は次のように表すことができる．

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} n_x^2(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & n_x n_y(1-\cos\alpha)+n_z\sin\alpha & n_x n_z(1-\cos\alpha)-n_y\sin\alpha \\ n_x n_y(1-\cos\alpha)+n_z\sin\alpha & n_y^2(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & n_y n_z(1-\cos\alpha)+n_x\sin\alpha \\ n_x n_z(1-\cos\alpha)+n_y\sin\alpha & n_y n_z(1-\cos\alpha)-n_x\sin\alpha & n_z^2(1-\cos\alpha)+\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{2.133}$$

さらに，平面上の接触点の軌道が直線上を転がる時は $n_x = \cos\beta, n_y = \sin\beta, n_z = 0$ として次のように表される．

$$\boldsymbol{R}_s(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \cos^2\beta(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & \frac{1}{2}\sin 2\beta(1-\cos\alpha) & -\sin\beta\sin\alpha \\ \frac{1}{2}\sin 2\beta(1-\cos\alpha) & \sin^2\beta(1-\cos\alpha)+\cos\alpha & \cos\beta\sin\alpha \\ \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{2.134}$$

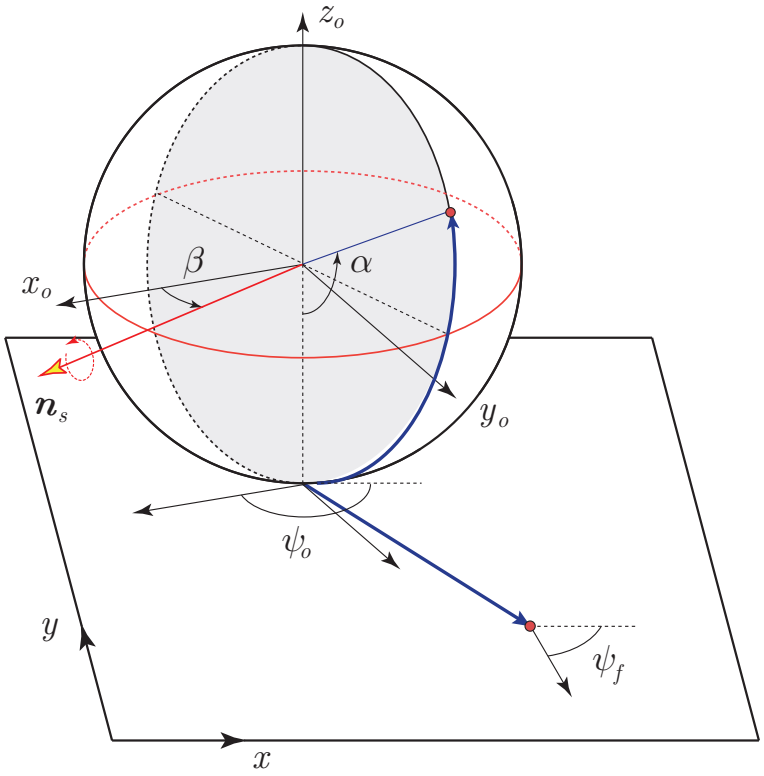

Fig. 2.17 Straight line based motion planning for avoiding singularity and spinning.

ここで $\alpha = \alpha(t), \beta = const$ として $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^T$ に代入すると

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\beta\dot{\alpha} \\ 0 & 0 & -\sin\beta\dot{\alpha} \\ \cos\beta\dot{\alpha} & \sin\beta\dot{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.135}$$

この時 $\omega_z = 0$ よりスピンは生じないことが確認できる．また $\boldsymbol{J}_c = \mathrm{diag}\{J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}\}$ より，拘束条件 $\boldsymbol{n}_3 \cdot \boldsymbol{J}_c\boldsymbol{\omega}_o = 0$ を満たしていることが確認できる．よって，球面上で $\theta = \pm\pi/2$ に直交する測地線でありスピンが生じないような球型ロボットの運動は動力学的に実現可能である．

次に，パート 3 において目標状態 $\boldsymbol{x}_f$ から α と β を計算することによってパート 2 における目標状態 $\bar{\boldsymbol{x}}_f$ を得ることができる．α，β 並びに $\bar{\boldsymbol{x}}_f$ は次の手順で得られる．

目標位置における球体の姿勢は以下のようにあらわせる．

$$\boldsymbol{R}(0,0,\bar{\psi}_f)\boldsymbol{R}_s(\alpha,\beta) = \boldsymbol{R}(\theta_f,\phi_f,\psi_f) \tag{2.136}$$

以上より，α,β,$\bar{\psi}_f$ は

$$\alpha = \arccos\left(\cos\theta_f \cos\psi_f\right) \tag{2.137}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{\cos\phi_f \sin\theta_f}{\sin\phi_f}\right) \tag{2.138}$$

$$\bar{\psi}_f = \beta - \arctan\left(\frac{\sin\theta_f\cos\psi_f - \cos\theta_f\sin\phi_f\sin\psi_f}{\sin\theta_f\sin\psi_f + \cos\theta_f\sin\phi_f\cos\psi_f}\right) \tag{2.139}$$

また，初期位置 $\bar{x}_f$，$\bar{y}_f$ は

$$\bar{x}_f = x_f - R\alpha\cos\left(\beta - \bar{\psi}_f - \pi/2\right) \tag{2.140}$$

$$\bar{y}_f = y_f - R\alpha\sin\left(\beta - \bar{\psi}_f - \pi/2\right) \tag{2.141}$$

以上，パート 3 の初期状態 $\bar{\boldsymbol{x}}_f$ が求まった．同様の手順によって，パート 1 における目標状態 $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ を初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ より求めることができる．

2.3.7　シミュレーション

本節で提案した軌道計画手法の有効性をシミュレーションにより示す．初期状態を $\boldsymbol{x}_0 = \{0, 0, 3\pi/4, 2.0, 2.0\}$，目標状態を $\boldsymbol{x}_f = \{0, 0, 0, 0, 0\}$ として，κ について異なる値 $\kappa = 2.5$ 及び $\kappa = 10$ についてシミュレーションを行う． 初めに，iterative steering においてパラメータ η を一定とした場合の軌道計画について示す．接触角制御では，平面上の位置 (x, y) を考慮せずに接触角 ψ のみを目標値 $\psi = 0$ へ導く．$\eta = 0.6$ と設定した時の状態の時間変化を Fig. 2.18 に示す．5 回の繰り返しの後に，接触角 ψ の目標値との誤差は 0.001 以下となった．また，球面上の接触点 (θ, ϕ) は変化していない．また，平面上の位置は最終的に $(2.0, 2.0)$ から $(1.51, 2.85)$ へ変化した．

次に，平面上の位置 (x, y) の制御を行う．$\eta = 0.6$ と設定した時の状態の時間変化を Fig. 2.19 に示す．10 回の繰り返しの後に位置に関する目標値との誤差ノルムが 0.001 以下となった．また，この時球体の姿勢に関しては変化していない．

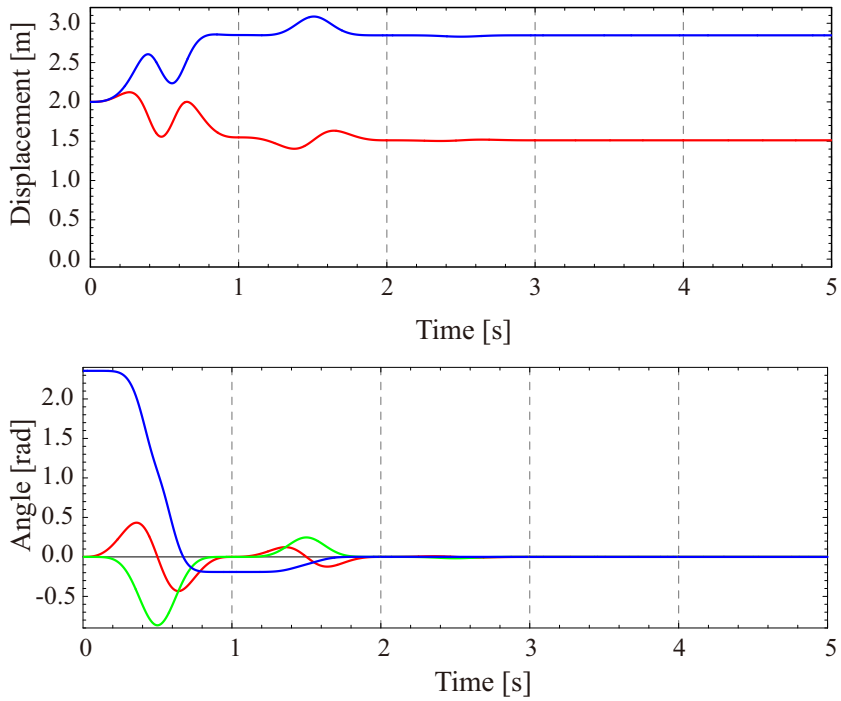

Fig. 2.18 Time histories of x (red line), y (blue line) (top), ψ (blue line), θ (red line), and ϕ (green line) (bottom) during the first part of the maneuver.

球面上の接触点 (θ, ϕ) の軌道及び平面上の接触点位置 (x, y) の軌道を Fig.2.20 に示す．接触角制御における軌道は緑色の線で，平面上の接触点位置制御における軌道は前半と後半部をそれぞれ赤色と青色の線で示している．図より，状態が目標へ近づくにつれて単一の繰り返しにおける変化が減少していることが確認できる．

以上のシミュレーションの結果より本軌道計画手法の有効性が確認できた．次に，慣性比率 κ と各繰り返しにおける目標状態を決定するパラメータ η による収束性の影響と適切な選択方法について考察する．式 (2.115)，(2.132) は軌道が特異点を通過しないための条件を示している．

慣性比率を $k = 2.5$ から $k = 10$ へ変化させて，同様のシミュレーションを行う．この時，η の値を小さくしなければ軌道計画によって目標状態へ収束できないことが確認できた．パラメータ η を 0.6 から 0.5 へ変化させた時のシミュレーション結果について，球面上の接触点軌道及び平面上の接触点軌道をそれぞれ Fig.2.21 に示

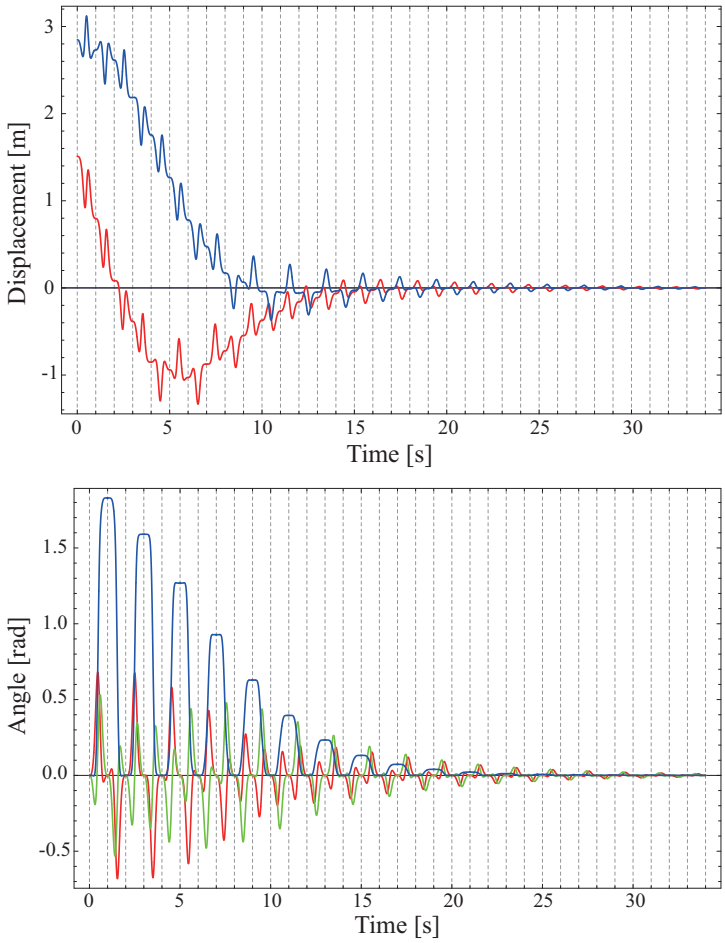

Fig. 2.19 Time histories of x (red line), y (blue line) (top), ψ (red line), θ (blue line), and ϕ (green line) (bottom) during the second part of the maneuver.

す．パラメータの値を変化させた時，制御入力の大きさも比例して変化する．よって，パラメータ η を小さくすると，接触点軌道は球面上の接触点座標上でより小さな円を描く軌道となり，目標状態に収束するまでに要する繰り返しの回数は増加することになる．

以上より，収束までに要する繰り返しの回数は，慣性比率 κ 及びパラメータ η に依存すると考えられる．2 つのパラメータを様々に変化させてシミュレーションを行った結果を Fig. 2.22 に示す．ここで，動力学的に実現不可能であるがスピン無し

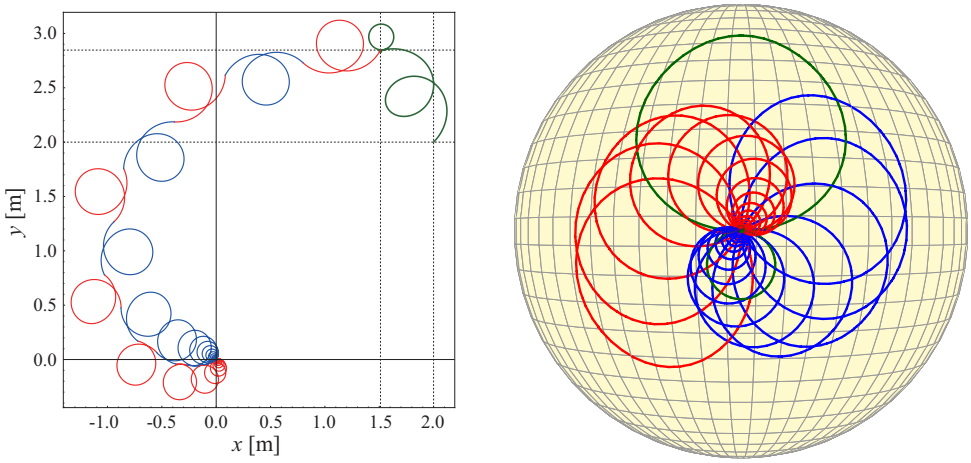

Fig. 2.20 Trajectory of the contact point on the plane (left) and on the sphere (right) during the non-trivial maneuver for $k = 2.5$. The 1st part of the maneuver is shown in green color, while the 2nd part is shown in red (as resulted from (2.118)-(2.119)) and blue (as resulted from (2.120)-(2.121)) colors.

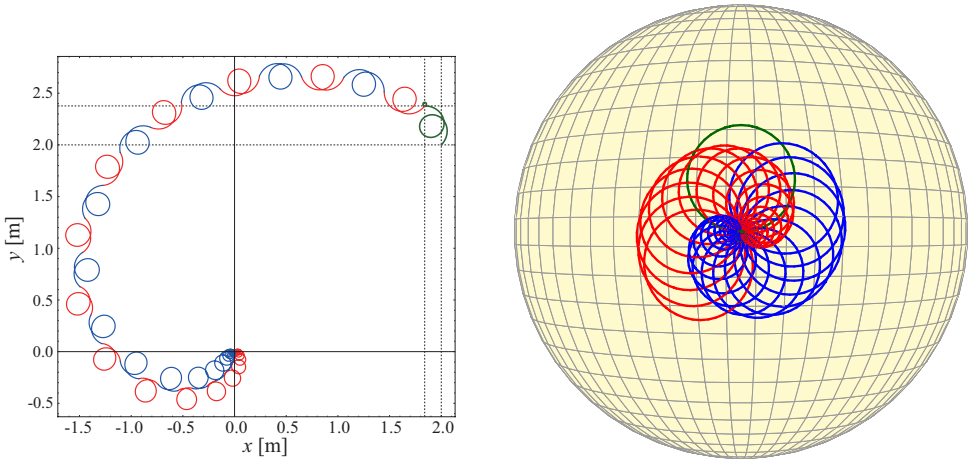

Fig. 2.21 Trajectory of the contact point on the plane (left) and on the sphere (right) during the non-trivial maneuver for $k = 10$. The 1st part of the maneuver is shown in green color, while the 2nd part is shown in red (as resulted from (2.118)-(2.119)) and blue (as resulted from (2.120)-(2.121)) colors.

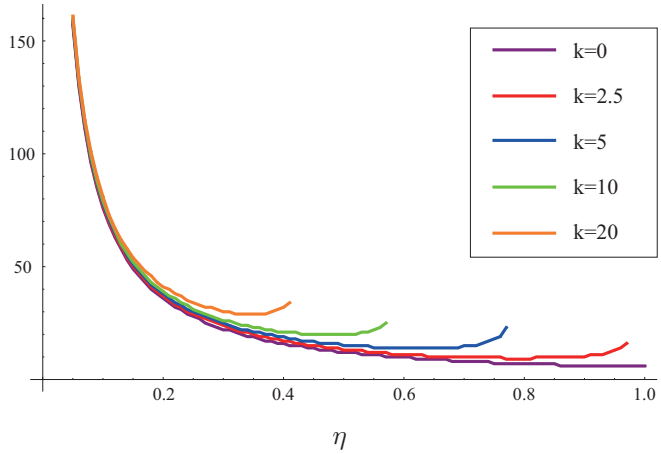

Fig. 2.22 Number of iterations in the second part of the non-trivial maneuver as function of η for different values of the inertia ratio k.

に相当する $\kappa = 0$ の場合も含めている．図より，慣性比率 κ が大きくなるにつれて，収束するまでに要する回数が減少しているが，パラメータ η を大きくしていくと目標状態へ収束しなくなる．特に慣性比率 κ が大きいほどに，より小さなパラメータ η で収束しなくなっている．近似システムの原点に当たる球面上の座標 $(0, 0)$ に近い程，元のシステムとの誤差は小さいが，慣性比率 κ が大きいほどよく近似できている領域が減少している．

極限の場合として $k \to \infty$ とした時，近似システム (2.103) は可制御であるが，式 (2.91) で定義される変換行列 Γ は特異になる．よって，元のシステムから privileged coordinates への変換は慣性比率 κ の増大に伴って特異となる．また，物理的な観点では，慣性比率 κ は球型ロボットの慣性ロータが設置された軸回りとそうでない軸回りの慣性モーメントの比率を表している．慣性比率 κ が大きいのは，より質量の大きな球殻を質量の小さな慣性ロータの回転によって駆動していることに相当するため，収束に要する繰り返しの回数も増加すると解釈できる．

これまでに，パラメータ η を一定として iterative steering を行った場合についてシミュレーションと考察を行った．次に，global iterative steering に従ってパラメータ η を決定する場合の軌道計画の有効性をシミュレーションにより示す．まず，$\kappa = 2.5$ の時のシミュレーション結果を示す．Fig. 2.23 の左図は平面上の球の接触点軌道を，

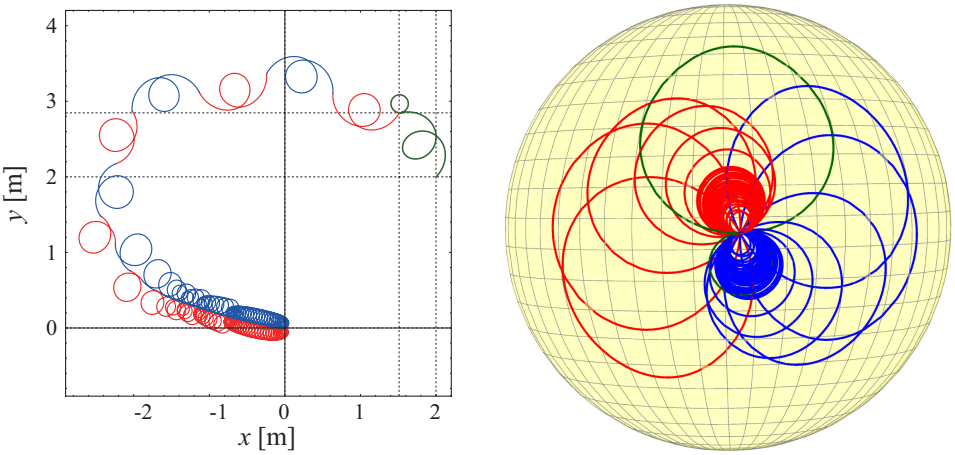

Fig. 2.23 Trajectory of the contact point on the plane (left) and on the sphere (right) during the non-trivial maneuver for $\kappa = 2.5$. The 1st part of the maneuver is shown in green color, while the 2nd part is shown in red and blue colors.

右図は球面上の接触点軌道を表している．初めに，球体の姿勢に関する軌道計画として，接触角 ψ を目標値へ収束させる．3 回の繰り返しの後，ψ の目標値との誤差は 0.001 以下となる．一方で，平面上の位置 (x, y) については，$(2.0, 2.0)$ から $(1.51, 2.85)$ まで変化した．次に，球体接触点位置 (x, y) に関する軌道計画を行う．53 回の繰り返しにより位置に関する誤差ノルムが $0.001[m]$ 以下となる．また，各繰り返しの境界では球の姿勢は変化しておらず，位置のみを目標状態へ収束させることができている． $\kappa = 10$ の場合のシミュレーション結果を Fig. 2.24 に示す．接触角の軌道計画では，2 回の繰り返しにより目標接触角との誤差が 0.001 以下となっている．また，この時平面上の接触点位置 (x, y) は $(2.0, 2.0)$ から $(1.84, 2.38)$ に変化した．次に，平面上の位置の軌道計画では，64 回の繰り返しの後に目標位置との誤差ノルムが 0.001 以下となった．次に，シミュレーションにより得られた結果について，パラメータ η を一定とした場合と比較する．$\kappa = 2.5$ の場合，Fig.2.25 と比較すると，パラメータを $\eta = 0.6$ として一定とした場合では，収束に要する繰り返しの回数は接触角制御で 5 回，平面上の接触点位置の制御で 10 回であった．また，$\kappa = 10$ の場合は，接触角制御で 2 回，平面上の接触点位置の制御で 29 回であった．よって，パラメータ η の値を一定とした場合の方がより少ない回数で目標値まで収束しており，より効

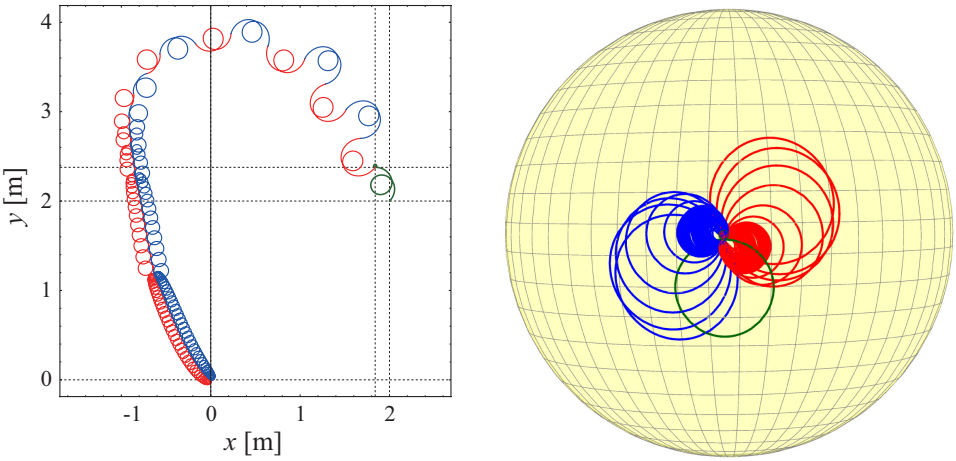

Fig. 2.24 Trajectory of the contact point on the plane (left) and on the sphere (right) during the non-trivial maneuver for $\kappa = 10$. The 1st part of the maneuver is shown in green color, while the 2nd part is shown in red and blue colors.

率的な軌道計画となっている．

一方で，パラメータ η を適応的に変化させた場合の収束性は大域的に保証されている．パラメータ η を一定とした場合では，Fig. 2.22 に示したように，慣性比率 κ とパラメータ η の増大によって目標状態へ収束しない場合を確認している．Iterative steering における収束性を保証するためには十分に小さなパラメータを設定する必要がある．また，η が小さいほどに収束するまでに要する繰り返しの回数は増大する．$\kappa = 2.5$ の時，パラメータの値を $\eta = 0.1$ と設定して改めてシミュレーションを行った結果を Fig. 2.22 に示す．目標状態へ収束するまでに，それぞれ接触角制御に 5 回，平面上の接触点位置の制御に 76 回の繰り返しを要した．繰り返し回数を最小とする最適なパラメータ $\eta = \eta^\star$ を見つけるためには，パラメータ η の値を変化させて試行錯誤的にシミュレーションを行う必要がある．

目標状態へ収束するために要する繰り返しの回数は，慣性比率 κ だけではなく初期状態と目標状態の誤差によっても変化する．Fig. 2.26 は初期状態において接触角 ψ を $3\pi/4$ から $-\pi/2$ へ変化させた時のシミュレーション結果を示している．パラメータ η を適応的に変化させた場合，目標状態へ収束するまでに要する回数は，接触角制御において 3 回，平面上の位置の制御において 12 回となっている．パラメータ η

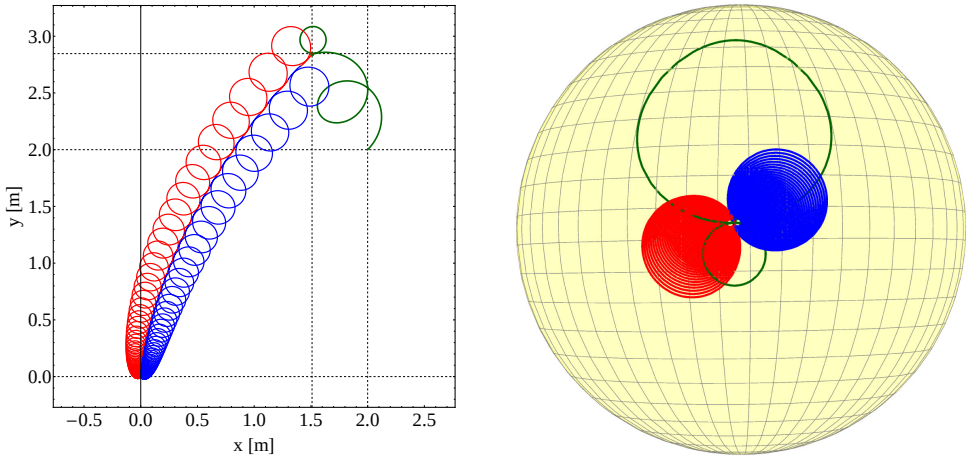

Fig. 2.25 Trajectory of the contact point on the plane (left) and on the sphere (right) during the non-trivial maneuver for $\kappa = 2.5$ with constant $\eta = 0.1$. The 1st part of the maneuver is shown in green color, while the 2nd part is shown in red and blue colors.

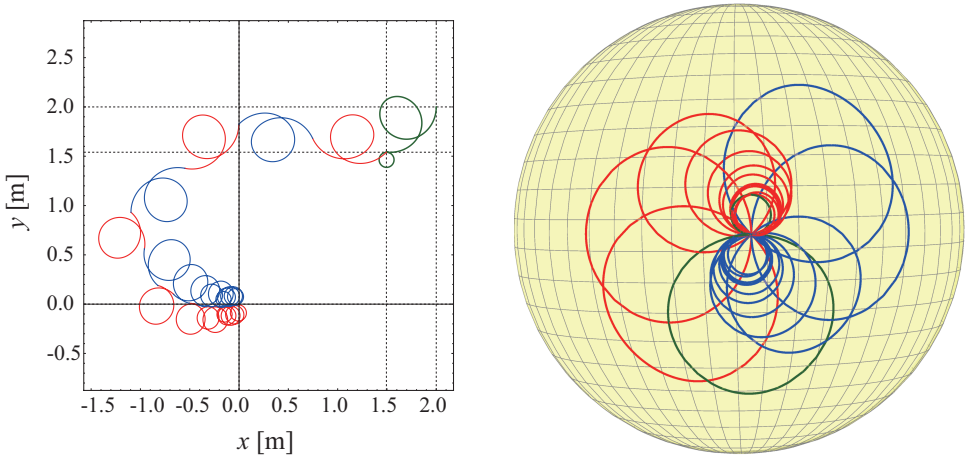

Fig. 2.26 Trajectory of the contact point on the plane (left) and on the sphere (right) during the non-trivial maneuver for $\kappa = 2.5$. The 1st part of the maneuver is shown in green color, while the 2nd part is shown in red and blue colors.

は $\eta = 0.6$ として一定とした場合は，それぞれ 3 回と 9 回の繰り返しで目標状態へ収束した．

2.4　小括

本章では，2 軸の慣性ロータによって駆動される球型ロボットの軌道計画を行った．本軌道計画問題の特徴として，運動学的なノンホロノミック拘束である転がり接触に加えて，慣性ロータの軸が 2 本であることにより発生する動力学的な拘束について考慮する必要があることである．制御モデルはドリフト項の無い対称アフィンシステムとして表され，慣性ロータの配置された軸に直交する球面上の赤道に沿った転がり運動が物理的な特異点となる．本システムに対して，初期状態から目標状態まで導くような軌道及び制御入力を設計するために，大きく 2 つの段階に分けた軌道計画を行った．1 つ目の軌道計画では，特異点を通過するために，特異点に直交する球面上の測地線に沿った軌道を用いた．本軌道に沿った球型ロボットの運動ではスピンが発生しないため，解析的に軌道を計算することができる．2 つ目の軌道計画では，制御モデルを nilpotent approximation によって近似し，iterative steering と組み合わせることにより，特異点を除いた状態で軌道計画を行った．これらの軌道計画手法の有効性をシミュレーションにより示した．特に，iterative steering において，各繰り返しの中で目標状態を設定するパラメータ η の決定方法について，パラメータを一定とした場合と適応的に変化させる場合で比較し，その収束性について考察を行った．パラメータ η を決定する上で，収束性と効率はトレードオフの関係となる．

本研究では，球面上の閉軌道による接触角及び平面上の接触点位置の変化量が解析的に計算できないため，nilpotent approximation によって近似的に求めているが，数値的に変化量を求めることも考えられる [50]．しかし，その場合は数値計算を行う上で初期推定解が必要であり，計算時間が長くなるというデメリットがある．本研究では，入力の形を関数として与えているため，異なる初期状態や慣性比率が与えられた場合でも，入力の関数を変更する必要が無く，数値計算を解く必要もない．また，文献 [16] では，iterative steering による軌道計画のロバスト性が示されており，本軌道計画手法が数値計算による軌道計画に対して優れている点であると言える．

また球型ロボットのアクチュエータに関して，本研究では 2 軸の慣性ロータによって駆動される球型ロボットを対象としているが，シミュレーションにより得られた球

型ロボットの軌道は非常に複雑であり，移動ロボットとして非効率的であるように思われる．もし 3 軸の慣性ロータが配置されていれば，任意の軸回りの角速度を発生させることができるため，より短い軌道長さで目標状態へ到達することが可能となる．3 軸の慣性ロータによって駆動される球型ロボットや動力学を考慮した ball-plate システムの軌道計画に関しては，Muralidharan ら [51] や Mukherjee ら [52] が行っている．また，浦久保ら [53] のように最適制御により軌道を求めることも考えられる．本研究の軌道計画が必要となるのは，例えば 3 軸内の 1 軸の慣性ロータが故障した場合等が考えられる．同様の考え方として，Balasubramanian ら [54] は，移動ロボットが岩などに乗り上げてしまい車輪等の通常の駆動機構が使用できなくなった場合に，重心を変化させることで球面上の形状をした車体底部で閉軌道を描くようにして車体を動かし，移動させることを行っている．

第3章　車両ロボットの滑りを活かした軌道計画問題

3.1　研究背景

3.1.1　車両ロボット

車両ロボットは，人間の操作によらずに自律して移動することが可能であり，一つまたは複数の車輪の転がりによって移動する車両である．車輪の転がりによる移動は，脚による歩行と比較して非常にエネルギー効率が優れており，大きなスピードを出すことができる．一方で，凹凸があり軟弱な路面への対応は困難であり，進行方向が限られるために小回りが利かないといったデメリットもある．しかし，現代では車輪による転がり移動に適した道路が整備されており，人間の生活には欠かせないものとなっている．人間の運転行動は,「認知」,「判断」,「操作」の３つのサイクルで成り立っているとされる．例えば，交差点に進入する状況では，信号を確認し（認知），黄色だったため停止線手前で停止することを考え（判断），ブレーキ操作により減速する（操作）といった行動をとる．これらの行動サイクルを自動化する場合，それぞれの行動に対して人間に代わることのできる技術が必要となる．車両ロボットにおける「判断」および「操作」は，軌道計画および制御問題として置き換えることができる．つまり，現在の状態（初期状態）から目標とする状態までの車両の軌道計画を行い，決定した軌道に追従するように制御を行う．目標状態との間に存在する障害物，速度やブレーキ性能の制限を拘束条件として問題に組み込むことになる．また，目標とする位置や姿勢，速度が実際に実現可能かどうか確認する必要がある．例えば，大きなスピードで交差点に差し掛かったとき，信号を確認してからブレーキ操作を行っても停止線の前で停止できないという状況も考えら

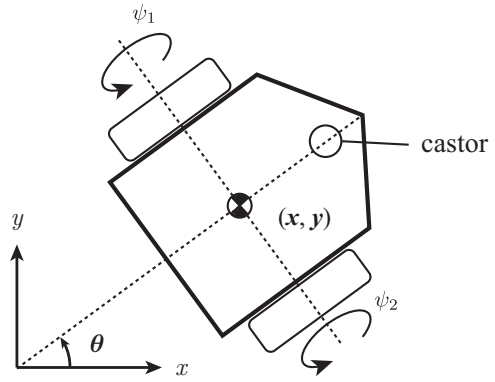

Fig. 3.1 Two wheeled mobile robot

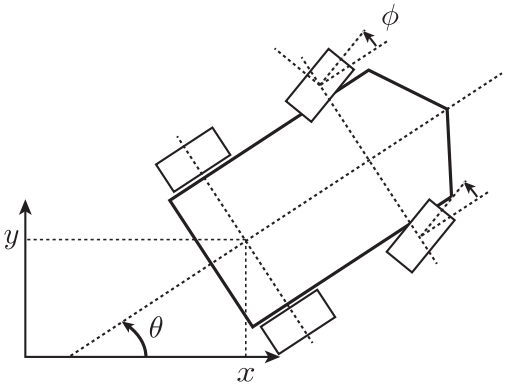

Fig. 3.2 Four wheeled mobile robot

れる．

3.1.2　車両ロボットのモデル・軌道計画・制御

車両ロボットの制御に関する研究は，大きく分けて 2 通りのアプローチにより行われている．これらの違いは，車輪の滑りを状態変数として扱うか否かである．特に，車輪の滑りは無いものとする場合，車両の制御問題は，ノンホロノミックシステムの軌道計画問題として扱う場合が多い．

(A) ノンホロノミック拘束を受ける車両ロボット

車輪が滑らずに転がるという制約は，ノンホロノミック拘束として表すことができる．車両ロボットは，ノンホロノミックシステムの軌道計画における典型的な例題として多くの研究がなされてきた．また，その多くは運動学モデルを対象とするものであり，車庫入れや縦列駐車を例題として軌道計画が行われている．

ノンホロノミック拘束を受ける車両ロボットの例を示す．

Fig. 3.1 は，2 つの平行に取り付けられた車輪によって駆動される車両ロボットである．2 つの車輪は独立にモータによって駆動される．一般化座標として平面上の重心位置 (x, y) と姿勢 θ をとる．2 つの車輪の距離を l，車輪の半径を r とすると，車

両の速度に関して次のような関係を導くことができる．

$$\dot{x} = \frac{r}{2}(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)\cos\theta \tag{3.1}$$

$$\dot{y} = \frac{r}{2}(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)\sin\theta \tag{3.2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{r}{l}(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) \tag{3.3}$$

さらに，$u_1 = \frac{r}{2}(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)$，$u_2 = \frac{r}{l}(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2)$ とすると，次の運動学モデルが導出される．

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

ここで，$u_1 = V$，$u_2 = \omega$ であり，それぞれ車体並進速度及び旋回速度である．運動学モデルは，車体が横滑りしないといノンホロノミック拘束からも導出ができる．つまり，車体が横滑りしないという拘束条件は次のように表される．

$$-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta = 0 \tag{3.5}$$

式 (3.8) は積分不可能なノンホロノミック拘束であり，車体進行方向の速度に関する式

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta = V \tag{3.6}$$

と合わせることにより，運動学モデル (3.4) を導くことができる．

Fig. 3.2 の 4 輪車両の場合，前後の車輪にノンホロノミック拘束が加わる．後輪軸中心の位置を (x, y)，姿勢を θ とおく．さらに，前輪の操舵角を ϕ，後輪軸中心から前輪軸中心までの距離を L と置く．後輪が横滑りしないという条件は，式 (3.8) によって表され，前輪については，前輪軸中心の位置を (x_1, y_1) とすると次のように表される．

$$-\dot{x}_1\sin(\theta + \phi) + \dot{y}_1\cos(\theta + \phi) = 0 \tag{3.7}$$

さらに，$x_1 = x + L\cos\theta$，$y_1 = y + L\sin\theta$ の関係を用いると

$$\begin{aligned} &-(\dot{x} - L\dot{\theta}\sin\theta)\sin(\theta + \phi) + (\dot{y} + L\dot{\theta}\cos\theta\cos(\theta + \phi) \\ &\quad = -\dot{x}\cos(\theta + \phi) + \dot{y}\sin(\theta + \phi) + L\dot{\theta}\cos\phi = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

を得る．速度入力として $u_1 = V$，$u_2 = \dot{\phi}$ を選ぶと，運動学モデルは次のようにあらわされる．

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ \tan\phi/L & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

上記の例において，車輪の回転角を ψ とすると，車輪の回転速度は $\dot{\psi} = V/r$ と表せることから，運動学モデルにおいて陽に現れない．通常，車輪の回転角に関しては制御変数として扱わないため，ノンホロノミックシステムとして車両ロボットを扱う場合には無視できる．

運動学モデル (3.4) 及び (3.9) は対称アフィンシステムであり，Brockett の定理より，PID 制御などの連続状態フィードバック則によっては目標状態へ安定化させることができないことが示されている．一方で，Chained form 等の正準系への変換が可能であり，Khennouf らの擬似連続指数安定化制御 [4] や，Monaco らの Multirate デジタル制御 [55] による制御が可能である．また，幾何学的なアプローチによる軌道計画を行う研究もある．Bicchi ら [17] は，障害物中における二輪車両の軌道計画として，円と直線を組み合わせた軌道が最短になることを示している．また，前輪と後輪を持つ車両において，操舵角及び操舵角速度の制限を考慮し，平面上の軌道の曲率が連続となるように直線と円に加えて clothoid 曲線を導入した軌道計画も行われている [18]．Fig. 3.1，Fig. 3.2 に示した車両ロボットの運動方程式は，運動学モデルと動力学モデルに分離することができる．そのため，軌道計画問題を，運動学モデル上で行うものがほとんどである．

先に述べたように，車両ロボットをノンホロノミックシステムとして扱う場合は，特に軌道計画問題において，滑りは無いものとする．また，ノンホロノミックシステムとして軌道計画を行った上で，車両ロボットがその軌道に沿った運動を行うように軌道追従制御を行う場合には，滑りを外乱として考慮する場合がある．Wang ら [56] らは，滑りを外乱とした車両ロボットのモデル化を行い，軌道追従制御を行う際の可制御性について議論しており，滑りを測定できなければ，車両ロボットの軌道追従制御は困難になるとしている．金山ら [57] は，車両ロボットに対して，リ

アプノフ関数の設定により軌道追従制御を行っている．参照軌道が用意されており，参照軌道との誤差に関する状態方程式はドリフト項を含むノンホロノミック拘束を受けない非線形システムとして表されるため，連続状態フィードバック則による制御が可能となる．また，Fierro ら [14] は，back-stepping 法により，動力学の範囲に拡張した軌道追従制御を行っている．

(B) 滑りを考慮した車両ロボットの制御

一方で，自動車工学等の分野では，車両の運動においてタイヤの滑りと，滑りによって生じるタイヤ摩擦が大きな影響を与える要因であるとして，滑りを含めた車両のモデル化及び制御を行う．滑りを表す変数として，車輪の回転速度と車体の速度の関係を表すスリップ率，車体や車輪の進行方向と速度のなす角度を滑り角として，Fig. 3.3，Fig. 3.4 のように定義される．スリップ率は，車輪の並進速度を V，回転速度を $\dot{\psi}$ とすると次のように定義される．

$$\alpha = \frac{V - r\dot{\psi}}{V} \tag{3.10}$$

また，滑り角は進行方向の速度を v_1，横方向の速度を v_2 とすると，次のように定義される．

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \tag{3.11}$$

いずれも，ノンホロノミックシステムにおいては $\alpha = 0$，$\beta = 0$ となる．

また，滑りによって発生するタイヤ摩擦力については，その複雑な現象が知られており，車両の運動のシミュレーションや運動解析を目的として，様々なモデルが提案されている．車輪と地面は一点で接触するのではなく，タイヤが変形することにより面での接触となる．また，横滑りやキャンバー角によって，接触面の形状は非対称となる．

タイヤ摩擦モデルの一つとして，車両の走行実験から得られたデータをもとに，タイヤ摩擦力をスリップ率および滑り角の関数としてフィッティングした，実験同定モデルが提案されている．特に，Pacejka らによって提案された Magic formula モデル [58] は，車両のシミュレーションや制御において良く用いられている．しかし，

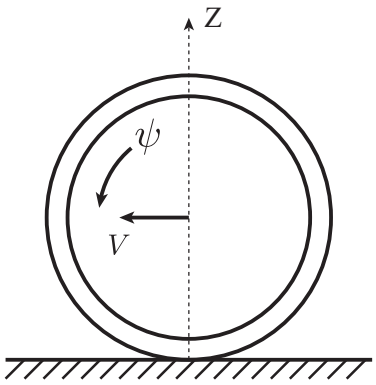

Fig. 3.3 Rotational and translational velocity.

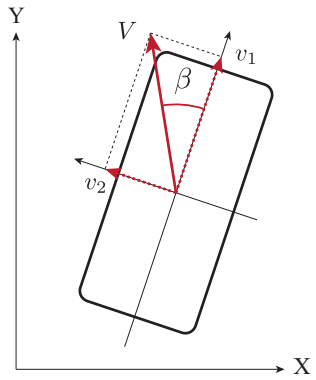

Fig. 3.4 Definition of slip angle.

Magic formula モデルは，車両が定常的な運動を行っている場合のみを考慮しており，急加速や急制動などの非定常な運動には対応していない．また，様々な走行状態に対応したタイヤ摩擦モデルとして，Velenis ら [59] は，タイヤの縦方向 (longitudinal) と横方向 (lateral) の摩擦力を，摩擦楕円によって組み合わせた LuGre モデルを提案している．

いずれのモデルも，多くのパラメータと複雑な関数によって表されることから，軌道計画問題または制御問題への適用には困難が生じる．多くの制御に関する研究では，上に挙げたモデルを簡単化して制御モデルに組み込むことが多い．また，摩擦モデルだけでなく，Fig. 3.5 に示すように，車体速度だけでなく各車輪の自由度まで考慮するのではなく，車体を一つの剛体とみなし，各タイヤに生じる摩擦力を外力として扱う場合が多い．

車両の制御における目的は，横滑りやスピンを防ぐことである．そこで車体横方向および旋回に関する運動に注目する．また，制御における平衡点で滑り角がゼロとなることから，滑り角は小さいものであるとすると，車両横方向の加速度は Fig. 3.6 より $V(\dot{\beta}+\omega)\cos\beta \approx V(\dot{\beta}+\omega)$ と計算できる．そこで，車体横方向と旋回運動に関

する力の釣り合いより，次のような運動方程式が得られる．

$$mV\left(\frac{d\beta}{dt}\right) = 2Y_f + 2Y_r \tag{3.12}$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = 2l_fY_f - 2l_rY_r \tag{3.13}$$

ここで，m は車両の慣性重量，Y_f 及び Y_r は，前輪と後輪のタイヤに生じる横力である．

小野ら [60] は，自動車の旋回時に発生するスピンの現象について，運動モデル (3.12)，(3.13) に対して微分幾何学的なアプローチについて解析を行い，スピン防止のための制御系の設計をおこなっている．また，自動車を目標とする軌道に対して追従させる，ロバストな制御系の設計も行われている [61]．これらの技術は，車両の滑り等の測定技術と合わせて，横滑り防止装置等のように既に実用化されている．

以上，既存の車両ロボットの制御に関する研究について述べた．ノンホロノミックシステムとしてモデル化された車両では，滑りは無いものとして扱われ，位置と姿勢を目標状態まで遷移させる軌道計画問題に関する研究がおこなわれている．一方で，滑りを状態変数として扱う場合は，車両速度の制御を目的としており，目標とする軌道への追従制御や，旋回時におけるスピンの防止といった目的で制御に関する研究が行われている．

3.1.3　ドリフト走行

先に述べた車両の制御に関する研究では，目標とする車両の運動から外れないために，車輪の滑りを防ぐような制御を行っていた．また，ノンホロノミックシステムとしてモデル化された車両モデルが可制御であるのに対して，車輪が滑っている状態の車両は位置と姿勢に関して可制御でなくなる．特に，大きな滑り角が発生している状態では，目標とする軌道への追従も困難となる．

一方で，滑りを防ぐのではなく活かす方向で行われている研究も存在する．ドリフト走行は，車両の運転において，タイヤが滑っている状態を積極的にコントロー

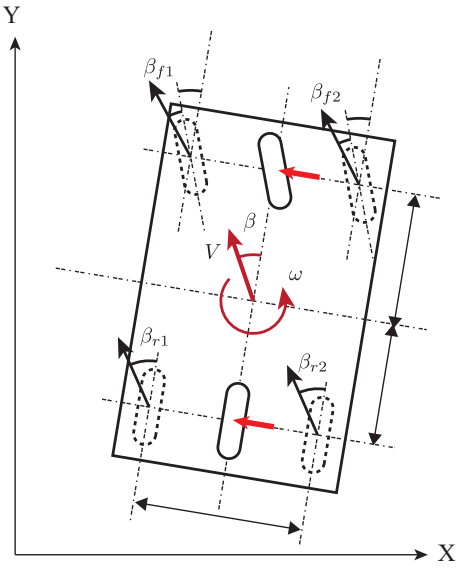

Fig. 3.5 Slip angles of body and wheels.

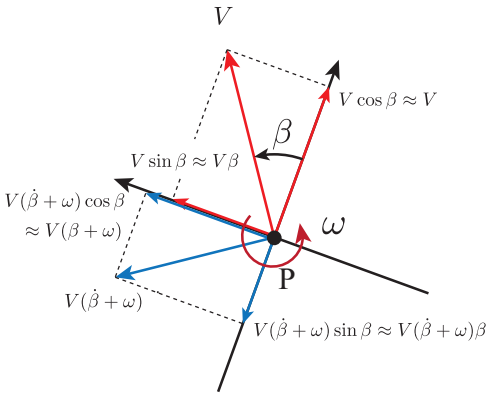

Fig. 3.6 Velocity（red） and acceleration (blue) at P with small slip angle β

ルする運転技術である．砂地や雪道，ダート等の未舗装路で，タイヤと路面の間の摩擦係数が小さい路面環境において，コーナーを速度を落とすことなく抜けることができ，ラリー競技等で用いられている．ドリフト走行で用いられている技術は比較的エンターテイメントのための運転技術ではあるが，普段の自動車の運転において，急にタイヤが滑った時の対応等でも同様の技術が用いられている．例えば，コーナーにおいて意図せず後輪が滑った場合，前輪をコーナーとは逆方向に，滑っている方向に向けることでスピンを防ぐことを目的としてカウンターステアを行う．

ドリフト走行という熟練ドライバーの技術の応用により，タイヤが意図せずに滑った時の対応や，自動運転車両等の車両ロボットのより高度な運動制御を行うことを目的として，車両の制御として体系化する研究が行われている．Velenis ら [62] は，一定の滑り角を維持したまま旋回する定常円旋回を制御により実現している．この場合も，制御の目標は車体の速度となっている．また，Zico ら [63] はドリフト車庫入れと呼ばれる，滑りを利用することで切り返しを用いずに車庫入れを行う操縦技術について，人間のドライバーの操縦を元にした制御側により実現している．元に

なる走行データが必要であり，汎用的でないが，滑りを積極的に用いた車両の位置と姿勢に関する制御を行っている．

3.1.4　本章の目的

従来の車両の運動制御に関する研究では，安全な走行の実現のためにタイヤの滑りを防ぐことを目的としたものが多い．しかし，雪道での走行や急な障害物の出現に対して完全にタイヤの滑りを防ぐことは困難である．そのような中で，タイヤの滑りが予測される場面においては，あらかじめ滑りを考慮した車両の軌道計画を行うことで，様々な路面環境に対応する安全な走行が実現できると期待される．そこで本章では，ラリー競技などで用いられるドリフト走行技術を車両の軌道計画に組み込むことにより，車両ロボットの運動性能を向上させることを目的とする．特に，車輪の滑りが必要となるドリフト車庫入れを軌道計画問題として解く．ドリフト車庫入れ問題は，目標状態における車両の 3 方が隙間なく障害物に囲まれており．切り返しによって目標状態へ到達することは不可能となる．そこで，車両を横滑りさせる必要があり，どのようにして軌道計画を行うかが問題となる．

本章では，初めに 3.2 節で車両モデルの導出を行う．特に，車両に対するノンホロノミック拘束と車輪の滑りを連続的に扱うことのできる，タイヤ摩擦モデルを構築する．次に，3.3 節では，ドリフト車庫入れについて問題設定を行い，ノンホロノミックシステムとしての軌道計画と滑りを伴う車両の制御を組み合わせた軌道計画手法について述べる．最後に，シミュレーションにより，本軌道計画手法の有効性を示す．

なお，本章の大部は文献 [64] にて公表済みである．

3.2　車両モデル

ドリフト車庫入れ問題を解くためには，ノンホロノミック拘束とタイヤの滑りの 2 つの要素を組み合わせる必要がある．ノンホロノミックシステムの場合，拘束条件により入力変数の数より多くの状態変数の制御を可能としている．しかし，滑らないことが拘束条件となっているため，軌道計画問題で滑りを考慮することができない．一方で，滑りを含めてモデル化された車両は，位置と姿勢に関して不可制御な劣駆動システムとなることから，軌道計画を行うことは困難となる．また，タイヤと路面の間に生じる摩擦力は，一般に複雑なモデルとして表されることも問題となる．

本研究では，ノンホロノミックシステムである車両と滑りを含めてモデル化された車両の 2 つを組み合わせることにより，滑りを含めた車両の軌道計画問題を解くことを考える．そこで，初めに 2 つのモデルを組み合わせるためのタイヤ摩擦モデルの構築を行う．初めに，既存のタイヤ摩擦モデルについてまとめ，タイヤ摩擦モデルが満たすべき性質について考察する．次に，摩擦モデルとして拡張クーロン摩擦モデルを提案し，本モデルを含めた車両モデルの導出を行う．

3.2.1　タイヤ摩擦モデルに関する関連研究

タイヤ摩擦モデルは，様々な分野において研究の対象とされており，これまでに多くのモデルが提案されている．摩擦本来の不連続性に加えて，粘弾性体であるタイヤの変形や 2 次元方向の滑りが発生することから，非常に複雑な現象となる．自動車の走行において，滑りという現象は路面環境や車両速度によって容易に発生するものである．また，ミクロ的観点からはタイヤと路面の間には常に滑りが生じている．自動車の開発における効率的な設計，安全のための運動解析及び制御系の設計のためには，コンピュータ上でタイヤ摩擦の挙動をモデル化することが重要になる．

走行中のタイヤに生じる力として，Fig. 3.7 に示すように，タイヤ進行方向に働く力 F_x，タイヤ横方向に働く力 (横力)F_y，タイヤ鉛直軸回りに生じるモーメント (セルフアライニングトルク)M_z，垂直荷重 F_n が挙げられる．セルフアライニングトル

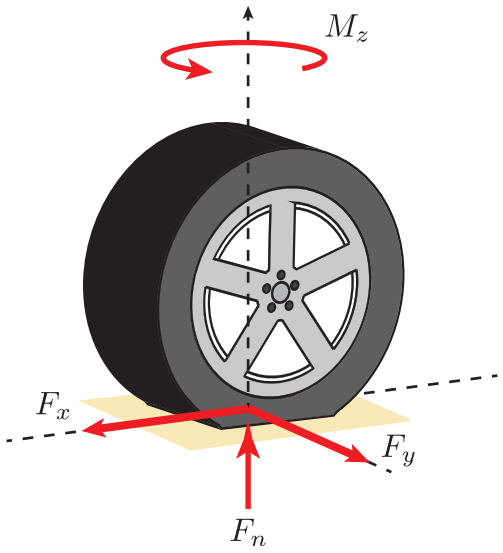

Fig. 3.7 Tire force

クは，タイヤが非対称に変形するためにタイヤ横力によって生じるモーメントである．また，自動車の走行において，ロール軸回りの運動を考慮した場合は垂直荷重は一定ではない．タイヤ摩擦に関する研究では，始めの 3 つの力を対象として，スリップ率やスリップ角等の車両の状態，物性パラメータを用いてモデル化を行っている．以下に，既存の摩擦モデル化手法について簡潔にまとめる．

(A) 実験同定モデル

本手法では，実験より得られたタイヤ摩擦力の測定データに対して，関数によるフィッティングを行い摩擦モデルを構築する．代表的なものとして，Magic formula モデルが挙げられる．Magic formula モデルは，一定の速度で走行する車両を対象としており，実験走行データに対してタイヤに働く力をスリップ率及び滑り角を入力とした関数でフィッティングしたものである．Magic formula タイヤモデルの一般的な形は次のような式で表される．

$$Y(X) = y(x) + S_V \tag{3.14}$$

$$x = X + S_H \tag{3.15}$$

上式において，Y がタイヤに生じる力，F_x，F_y または M_z となり，X はスリップ率または滑り角となる．また，S_H は関数 $y(x)$ における x 軸方向の平行移動，S_V は y 軸方向の平行移動を表す．関数 $y(x)$ は次のような三角関数の組み合わせによる関数である．

$$y(x) = D\sin\left[C\arctan\left[Bx - E(Bx - \arctan\left(Bx\right))\right]\right] \tag{3.16}$$

各パラメータはそれぞれ，B : stiffness factor，C : shape factor，D : peak value，E : curvature factor であり，フィッティングに用いられる．Magic formula は物理的な根拠に基づくものではないが，実際のタイヤに生じる力を良く再現しているため頻繁に用いられるだけでなく，他のモデル化手法における教師モデルともなっている．

(B) 準実験同定モデル

本手法は，実験同定モデルを拡張して，様々な走行状態へ適用可能なタイヤ摩擦モデルを構築するものである．全ての走行状況やタイヤに対して実験データを得ることは困難であり，実験データから補間してタイヤ摩擦モデルを計算する．最も簡単なモデルの例として，Wong ら [65] の摩擦楕円に基づくモデルが挙げられる．本モデルでは，タイタ縦方向と横方向の摩擦力が次のような関係を満たすと仮定している．

$$\left(\frac{F_x}{F_{0x}^*}\right)^2 + \left(\frac{F_y(\alpha,\lambda)}{F_{0y}(\alpha)}\right)^2 = 1 \tag{3.17}$$

ここで，F_{0x}^* は発生しうる最大縦力であり，$F_{0y}(\alpha)$ はタイヤが完全に滑っている時の横力である．式 (3.17) より，タイヤ横力は次のように求められる．

$$F_y(\alpha,\lambda) = F_{0y}(\alpha)\sqrt{1 - (\frac{F_x}{F_{0x}^*})^2} \tag{3.18}$$

本モデルは物理的に正確ではないが，限られたデータから様々な走行状態におけるタイヤ摩擦力を推定することが可能となる．

(C) 力学モデル

本手法では，タイヤ摩擦の動的な振る舞いを再現するために，摩擦の挙動を力学的にモデル化するものである．Velenis[59] らは，LuGre モデルを 2 次元に拡張し，タイヤの縦方向と横方向に働く力のモデル化を行っている．ここで，LuGre モデルは物体の接触面をバネ・ダンパ系としてモデル化することで，摩擦力のヒステリシス等の動的な特性を表現するモデルである．また，2 次元方向への拡張としては，次のような 2D Coulobmb 摩擦モデルに基づいている．

$$\mu^* = -\frac{M_k^2 v_r}{\|M_k v_r\|} \tag{3.19}$$

ここで v_r は滑り速度，$M_k = \mathrm{diag}(\mu_x, \mu_y)$ であり，μ_x 及び μ_y は 2 方向の Coulomb 摩擦係数を表す．式 (3.23) は最大消散の原理により導出されるものであり，μ^* は常に μ_x，μ_y を長軸，短軸とする楕円の外周上に存在する．

(D) 車両制御を目的としたモデル

上記の摩擦モデルは，主にシミュレーションや車両の運動解析を主な目的としており，再現性を高めるために複雑なモデルとなっている．車両の制御を行う上では，複雑なモデルは制御系設計を行う上で問題となる．そこで，Magic formula 等のモデルを簡略化したものが用いられている．Velenis ら [62] の定常円旋回を行う車両の制御を行う研究においては，次のようなタイヤ摩擦モデルを用いている．

$$\mu(s) = D \sin\left(C \mathrm{atan}(Bs)\right) \tag{3.20}$$

ここで，s はスリップ率である．本モデルは非常に簡単なモデルとなっているが，Fig. 3.8 に示すように，Magic formula モデルを簡略化したモデルとなっている．また，スリップ率の小さな範囲では，線形化により線形関数を用いてよく近似することができる．

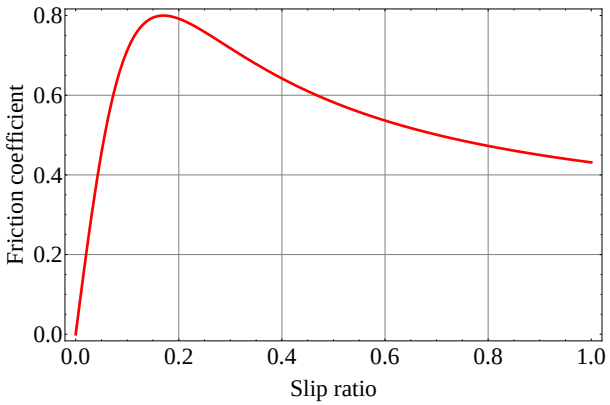

Fig. 3.8 Friction model

3.2.2　拡張クーロン摩擦モデル

本研究では，滑りを含む車両の軌道計画を行うために，ノンホロノミック拘束と滑りを組み合わせることのできる摩擦モデルを定義する．摩擦力と速度の不連続な関係を表すモデルとして，クーロン摩擦モデルがある．クーロン摩擦モデルでは，物体が静止している場合は静止摩擦力，物体が滑っている場合は動摩擦力が働く．また，物体が静止し続けることができる最大の静止摩擦力を最大静止摩擦力としている．そこで，タイヤが滑らずに転がっている状態を静止摩擦状態，タイヤが滑っている状態を動摩擦状態として置き替えることにより，ノンホロノミック拘束状態と滑り状態の切り替わりを表現する．

初めに，1 次元の拡張クーロン摩擦モデルを次のように定義する．

$$f = \begin{cases} \mathrm{sat}(\lambda, \mu_k F_n) & \text{if } V = 0 \\ -\mathrm{sign}(V)\mu_k F_n & \text{if } V \neq 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

ここで，λ はラグランジュ乗数であり，ノンホロノミック拘束 $A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = 0$ を満たすために発生されなければならない一般化力である．$V \triangleq A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$ は滑り速度，μ_k は最大静止摩擦係数である．滑り速度がゼロのとき，つまり剛体が静止または転がる場合には，路面との間に働く摩擦力はラグランジュ乗数として計算される．また，ラグランジュ乗数の値が最大静止摩擦力 $F_k = \mu_k F_n$ より大きくなったとき，摩擦力は飽和して一定の値をとる．この時，力の釣り合いが保たれなくなると滑り速度 V が生じ

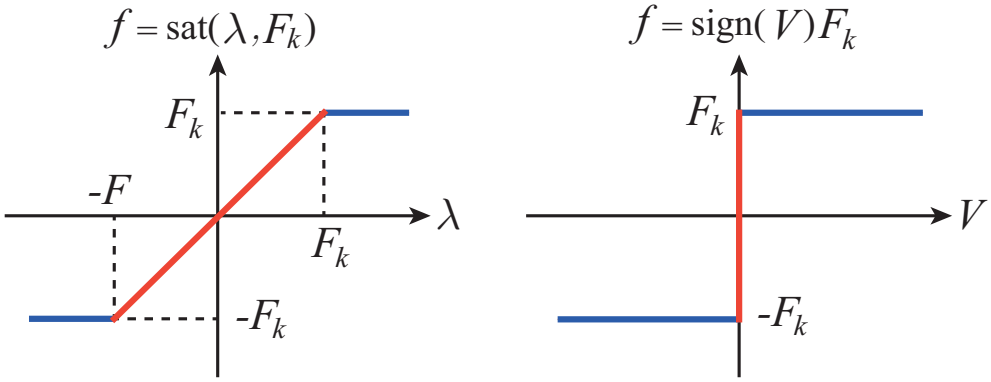

Fig. 3.9 Friction model

る．Fig. 3.9 はそれぞれ摩擦モデルの上式及び下式を表しており，横軸の変数が異なることに注意する．本摩擦モデルと同様の考え方として，Wei ら [66][67] は，拘束状態から滑り状態への切り替わりを考慮し，ハイブリッドシステムとしてモデル化を行っている．特に，切り替わり条件の内入力に依存するものを controlled switching，その他を autonomous switching として定義している．

車両が平面上を走行する場合，タイヤには縦方向及び横方向の 2 方向に対して働く摩擦力を考慮する必要がある．一軸方向の摩擦力を定義した式 (3.21) を 2 次元モデルへ拡張するために，2D-Coulobm 摩擦モデル [59] に基づいた拡張を行う．2D-Coulobm 摩擦モデルは，2 軸の Coulomb 摩擦力の合力が最大消散の原理によって決まるとしたものである．つまり，滑り速度 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ と各軸方向のクーロン摩擦係数 $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2]^T \in \mathbb{R}^2$ に対して，摩擦係数は次のように決定される

$$\mu^* = \mathrm{argmax}_{\mu \in C} \left(-F_n \boldsymbol{\mu}^T v(t) \right), \quad \forall \boldsymbol{v}, \forall t > 0 \tag{3.22}$$

ここで，C は admissible friction coefficient であり上式を解くと，

$$\mu^* = -\frac{\boldsymbol{M}_k^2 \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{M}_k \boldsymbol{v}\|} \tag{3.23}$$

2D-Coulobm 摩擦モデルでは，摩擦係数は Fig. 3.10 に示す μ_1 及び μ_2 を長軸及び短軸とする楕円上の値をとる．

次に，縦方向，横方向の 2 方向への滑りを考慮したタイヤ摩擦モデルを定義する．車輪の一般化座標として，平面位置 (x, y)，姿勢 θ，回転角 ψ をとる．車輪が滑らずに転がることは，次のような拘束条件として表される．

$$A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & r \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2 \tag{3.24}$$

さらに，タイヤの滑り速度を $\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$ と定義する．この時，タイヤ摩擦モデルは次のように表される．

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \mathrm{sat2}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} F_n) & \text{if } |\boldsymbol{v}| = 0 \\ -\dfrac{\boldsymbol{M}_k^2 \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{M}_k \boldsymbol{v}\|} F_n & \text{if } |\boldsymbol{v}| > 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

ここで，添字 1，2 はそれぞれ縦方向及び横方向を指す．また，$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2]^T \in \mathbb{R}^2$ 及び $\boldsymbol{M}_k = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ はそれぞれ摩擦係数ベクトル及び行列である．関数 sat2 は 2 次元に拡張された飽和関数であり，2 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2]^T$，$\boldsymbol{b} = [b_1, b_2]^T$ に対して次のように計算される．

$$\mathrm{sat2}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{cases} \boldsymbol{a} & \text{if } (\frac{a_1}{b_1})^2 + (\frac{a_2}{b_2})^2 \leq 1 \\ \begin{bmatrix} b_1 \cos\vartheta \\ b_2 \sin\vartheta \end{bmatrix} & \text{if } (\frac{a_1}{b_1})^2 + (\frac{a_2}{b_2})^2 > 1 \end{cases} \tag{3.26}$$

ここで，$\vartheta = \tan^{-1}(a_2/a_1)$ である．本モデルでは，タイヤが滑っておらずノンホロノミック拘束を受けている状態では，タイヤ摩擦力はラグランジュ乗数として計算される．もしラグランジュ乗数が Fig. 3.10 の摩擦楕円の外側に在る場合，摩擦力は飽和してしまい，ラグランジュ乗数と摩擦楕円の交点上の値をとる．この時，力の釣り合いが保たれなくなるため，滑り速度 $\boldsymbol{v}$ が発生する．また，タイヤが滑っている状態では，摩擦力は 2D-Coulombm モデル (3.23) と同様に，最大消散の原理によって摩擦力が決定し，その値は摩擦楕円上にある．滑っている状態から拘束状態へと遷移するのは，滑り速度がゼロとなった時である．タイヤが滑っている状態では，滑りを妨げるような方向に摩擦力が生じるため，外力を与えない場合は滑っている状態から自然と拘束状態へと遷移することになる．

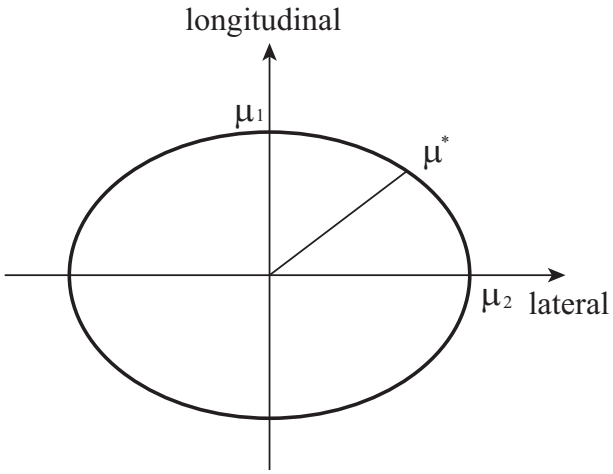

Fig. 3.10 Friction model

拡張クーロン摩擦モデル (3.21) 及びタイヤ摩擦モデル (3.25) を計算するためには，ラグランジュ乗数 λ の値が必要となる．ラグランジュ乗数は運動方程式より導出される．運動学的な拘束条件 $A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = 0$ を受ける機械システムの運動方程式は次のように表される．

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{F} \tag{3.27}$$

ここで，$\boldsymbol{F}$ は外力ベクトル，$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{q})$ は摩擦力や重力等の非保存力である．初めに，拘束条件 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = 0$ を時間微分すると

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0} \tag{3.28}$$

さらに，運動方程式 (3.27) を $\ddot{\boldsymbol{q}}$ について解き，式 (3.28) を代入すると

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{N}) + \dot{\boldsymbol{A}}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{3.29}$$

最後に $\boldsymbol{\lambda}$ について整理すると，次式が得られる．

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{N}) + \dot{\boldsymbol{A}}\dot{\boldsymbol{q}}\right] \tag{3.30}$$

上式より，ラグランジュ乗数は状態および速度，外力によって決定される．一般化座標 $\boldsymbol{q} = [x, y, \theta, \psi]^T$ で表される単一のタイヤの場合について例を示す．

3.2.3　車両モデル

前節で定義した摩擦モデルを適用した車両ロボットのモデルの導出を行う．

(A) 1 輪車両モデル

初めに，Fig. 3.11 に示す 1 輪車両のモデルの導出を行う．車両は車体と一つの車輪により構成されている．車両重心の平面位置を (x, y)，姿勢を θ，車輪の回転角を ψ とする．また，車体と車輪の質量を m_b，m_w，平面鉛直軸回りの慣性モーメントを J_w，J_w，車輪回転軸回りの慣性モーメントを I_w とする．この時，運動方程式は次のように記述される．

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\tau} \tag{3.31}$$

ここで，$\boldsymbol{q} = [x, y, \theta, \psi]^T$ は状態ベクトル，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) = \mathrm{diag}[m, m, J, I]$ は慣性行列，$\boldsymbol{f} = [f_1, f_2]^T$ はタイヤと路面の間に働く車輪縦方向と横方向の摩擦力，$\boldsymbol{\tau} = [0, 0, \tau_w, \tau_\psi]^T$ は入力トルクであり，τ_w，τ_ψ はそれぞれ旋回トルクと車輪駆動トルクである．また，行列 $\boldsymbol{A}$ は次式のような摩擦方向を表す行列である．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & -r \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

ここで，r は車輪半径である．運動方程式 (3.31) における摩擦力は，式 (3.25) より与えられる．滑り速度 $\boldsymbol{\nu}$ はノンホロノミック拘束より次のように定義される．

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta + r\dot{\psi} \\ -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

また，ラグランジュ乗数は，式 (3.30) より次式のように計算できる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\left\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\tau} + \dot{\boldsymbol{A}}\dot{\boldsymbol{q}}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} mr\tau_\psi/(I + mr^2) \\ m\dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.34}$$

ラグランジュ乗数のうち，タイヤ縦方向に関しては駆動トルク，タイヤ横方向に関しては遠心力と等価な値となっている．大きな駆動トルクを発生させた場合や大き

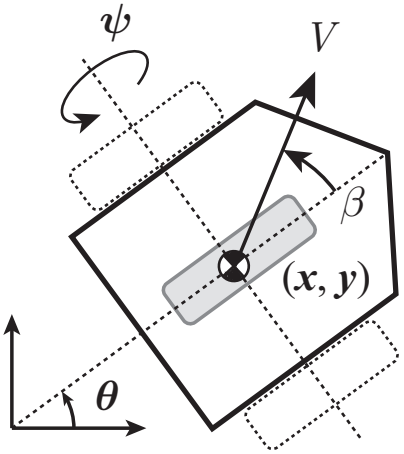

Fig. 3.11 1-wheeled vehicle model

な速度で旋回する場合に，ラグランジュ乗数の値は大きくなり，最大静止摩擦力よりも大きくなったとき，滑り速度 $\boldsymbol{v}$ が非零の値をとり，滑り状態に切り替わる．

滑り速度がゼロの時，つまりノンホロノミック拘束 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$ の時，$S^T A^T = 0$ を満たす行列 $S(\boldsymbol{q})$ を運動方程式 (3.31) の左から掛けることで，ラグランジュ乗数を消去し，次式のように運動学モデルと動力学モデルを分離して，式 (1.9)，(1.8) のように表すことができる．1 輪車両の場合は，速度入力は $\boldsymbol{\nu} = [\nu_1, \nu_2]^T = [r\dot{\psi}, \dot{\theta}]^T$ であり，行列 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})$ は次のように表されれる．

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

また，タイヤが滑っている時，車両の速度 V と滑り角 β を Fig. 3.11 のように設定し，次式によって定義する．

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{3.36}$$

$$\beta = \tan^{-1}(v_2/v_1) = \arctan\left(\frac{\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta}{\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta}\right) \tag{3.37}$$

この時，車両の運動学モデルは次のように表される．

$$\dot{x} = V\cos(\theta+\beta) \tag{3.38}$$

$$\dot{y} = V\sin(\theta+\beta) \tag{3.39}$$

$$\dot{\theta} = \omega \tag{3.40}$$

また，旋回速度を $\omega = \dot{\theta}$ とする．運動方程式 (3.31) は次のように表される．

$$\dot{V} = \frac{1}{m}(f_1\cos\beta + f_2\sin\beta) \tag{3.41}$$

$$\dot{\beta} = -\omega + \frac{1}{mV}(-f_1\sin\beta + f_2\cos\beta) \tag{3.42}$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}\tau_\omega \tag{3.43}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I}(\tau_\psi + f_1) \tag{3.44}$$

ここで，タイヤ縦方向と横方向の摩擦力 f_1，f_2 は式 (3.25) によって計算でき，次のようになる．

$$f_1 = -\frac{\mu_1(V\cos\beta - r\dot{\psi})}{\sqrt{(\mu_1(V\cos\beta - r\dot{\psi}))^2 + (\mu_2 V\sin\beta)^2}}\mu_1 F_n \tag{3.45}$$

$$f_2 = -\frac{\mu_2 V\sin\beta}{\sqrt{(\mu_1(V\cos\beta - r\dot{\psi}))^2 + (\mu_2 V\sin\beta)^2}}\mu_2 F_n \tag{3.46}$$

以上，タイヤが滑っている状態の車両の運動は，式 (3.41)-(3.44) によって表される．

(B) 前後 2 輪車両モデル

Fig. 3.12 に示す，ステアリング機構を有する前後 2 輪車両の動力学モデルを求める．本車両は，4 輪車両において左右タイヤの横滑りが等しいとして，前後の左右輪が等価的に車両の中心軸上の交点に集中しているとしてモデル化したものである．ぞれの車輪の質量を m_r，車体のヨー回転軸慣性モーメントを J_o，タイヤのヨー軸回りの慣性モーメントを J_r，ロール軸回りの慣性モーメントを I_w とする．ま

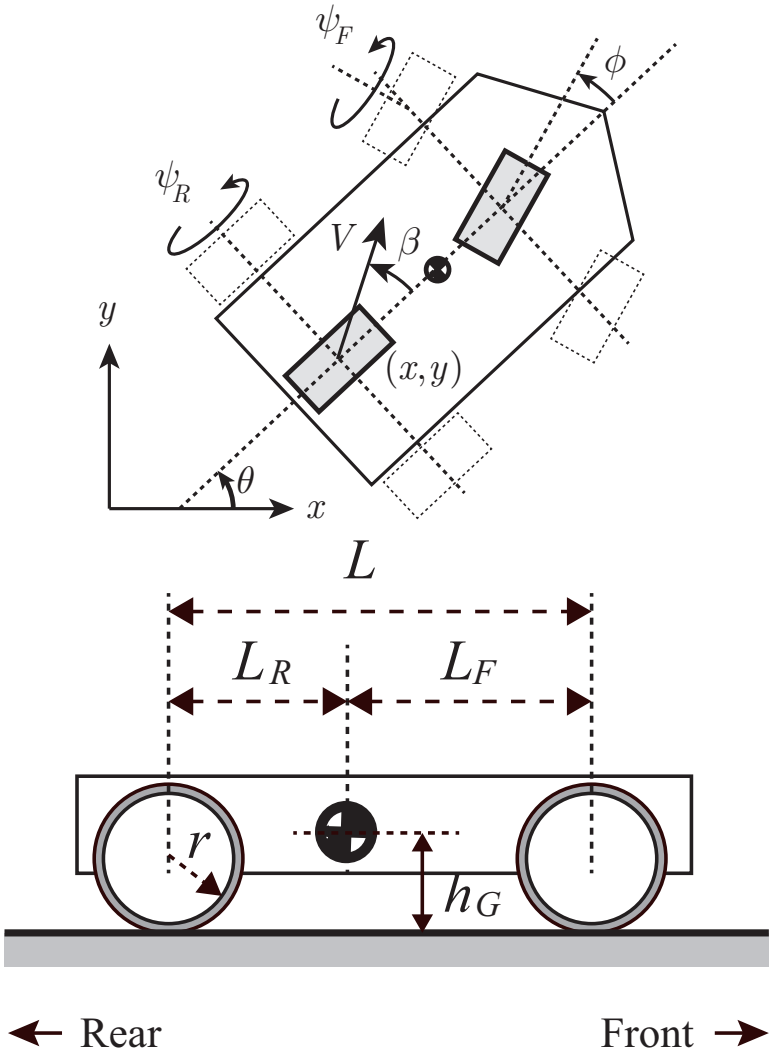

Fig. 3.12 2-wheeled vehicle model

た，後輪の回転角を ψ_R，前輪の回転角を ψ_F，操舵角を ϕ とする．状態ベクトルを $\boldsymbol{q} = [x, y, \theta, \psi_R, \psi_F, \phi]^T$ とすると，運動方程式は次のように表される．

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{A}_R^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f}_R + \boldsymbol{A}_F^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f}_F = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\tau} \tag{3.47}$$

ここで

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_o + 2m_r & 0 & -M_o \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_o + 2m_r & M_o \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ -M_o \sin\theta & M_o \cos\theta & J_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_F = \begin{bmatrix} -M_o \cos\theta\ \dot{\theta}^2 \\ -M_o \sin\theta\ \dot{\theta}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで，$M_o = m_o L_F + m_r L_G$, $J_o = J + 2J_w + m_o L_F^2 + m_r L_G^2$ であり，$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2]$ はそれぞれ入力ベクトルである．また，$\boldsymbol{A}_R(\boldsymbol{q})$ 及び $\boldsymbol{A}_F(\boldsymbol{q})$ は前輪及び後輪の摩擦力の方向行列となっており，次のように表される．

$$\boldsymbol{A}_R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & r & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

$$\boldsymbol{A}_F = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) & L_F \sin\phi & 0 & r & 0 \\ -\sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) & L_F \cos\phi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

2 輪車両モデルでは，前後にそれぞれ滑り速度と摩擦力が定義される．摩擦力は摩擦係数と垂直荷重によって決定されるが，垂直荷重に関して車体ロール軸回りのモーメントも考慮する．つまり，前後のタイヤに働く垂直荷重は次のように表される．

$$N_F = \frac{L_F mg + v\dot{V}_G h_G \cos\beta}{L} \tag{3.50}$$

$$N_R = \frac{L_R mg - v\dot{V}_G h_G \cos\beta}{L} \tag{3.51}$$

ここで，h_G は接地面から車体重心までの高さ，V_G は車体重心における速度であり，次のように計算できる．

$$V_G = \sqrt{\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2L_R\dot{\theta}(-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta)} \tag{3.52}$$

$$= \sqrt{V^2 + 2L_R V\omega\sin\beta} \tag{3.53}$$

車輪が滑っていない時は $V_G = V$ となる．また，一方のタイヤが滑っている場合には，もう一方の車輪の拘束に対応するラグランジュ乗数の計算の中に，摩擦力として加わることに注意する必要がある．

前後のタイヤに対して，拘束状態と滑り状態の 2 つの状態が存在するため，システム全体としては合計 4 つの状態が存在することになる．本研究では，(a) 前後輪が共に拘束状態，(b) 前輪が拘束状態，後輪が滑り状態 2 つの状態を扱う．以下に，それぞれの状態におけるモデルの詳細について述べる．

(a) 前後輪が共に拘束状態の場合

前後の車輪が滑らずに転がるとき，車両はノンホロノミックシステムとして扱うことができ，摩擦力はラグランジュ乗数として計算される．2 つの行列 $\boldsymbol{A}_R, \boldsymbol{A}_F$ を合わせて $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_R, \boldsymbol{A}_F]$ として，零空間行列を $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})$ とする．このときの車両の運動学モデルは仮想入力を $\boldsymbol{v} = [r\dot{\psi}_F, \dot{\phi}]^T$ とすると次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \frac{\tan\phi}{L_F} & \frac{1}{r} & \frac{1}{r\cos\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} r\dot{\psi}_R \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.54}$$

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})$ を運動方程式 (3.47) の左から乗じることによって次式のようにラグランジュ乗数を消去することができる．

$$\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}\,\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{S}}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau} \tag{3.55}$$

動力学モデル (3.55) は，入力変換によって $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}$ と簡単化することができる．従って，車両の位置と姿勢を制御変数とする場合は，運動学モデル (3.54) について軌道計画を行えばよい．運動学モデル (3.54) はホロノミックな拘束を含んでおり，実質的には前後の車輪の回転角を無視した 4 つの状態変数と 2 つの入力からなるシステムであり，可制御である．また，速度を含めた軌道計画が必要となる場合は，制御モデルは (3.54) と合わせてドリフトアフィンシステムとなるが，文献 [68] において研究されている．

(b) 前輪が拘束状態，後輪が滑り状態の場合

前輪が拘束状態で後輪が滑り状態，つまり $\boldsymbol{\nu}_R \neq 0$ 及び $\boldsymbol{\nu}_F = \mathbf{0}$ の場合について考える．この時，非ホロノミック拘束 $\boldsymbol{A}_F(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = 0$ が有効となる．行列 $\boldsymbol{A}_F$ の零空間を張るベクトルによって構成されるフルランクな行列を $\boldsymbol{S}_F(\boldsymbol{q})$ とすると，運動学モデルは次のように表される．

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{S}_F(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v}_F \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\phi+\theta) & \sin(\phi+\theta) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ L_F\sin\theta & -L_F\cos\theta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\psi}_F \\ \omega \\ \dot{\psi}_R \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.56}$$

運動方程式 (3.47) の左から $\boldsymbol{S}_F$ を乗じて整理する．

$$\boldsymbol{S}_F^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}_F\ \dot{\boldsymbol{v}}_F + \boldsymbol{S}_F^T\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{S}}_F\ \boldsymbol{v}_F + \boldsymbol{S}_F^T\boldsymbol{C} + \boldsymbol{S}_F^T\boldsymbol{A}_R^T\boldsymbol{f}_R = \boldsymbol{S}_F^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau} \tag{3.57}$$

後輪に働く摩擦力は次のように計算できる．

$$f_R^1 = -\frac{\mu_1(V\cos\beta - r\dot{\psi}_R)}{\sqrt{(\mu_1(V\cos\beta - r\dot{\psi}_R))^2 + (\mu_2 V\sin\beta)^2}}\mu_1 N_R \tag{3.58}$$

$$f_R^2 = -\frac{\mu_2 V\sin\beta}{\sqrt{(\mu_1(V\cos\beta - r\dot{\psi}_R))^2 + (\mu_2 V\sin\beta)^2}}\mu_2 N_R \tag{3.59}$$

運動学モデル (3.56) は，6 つの状態変数と 2 つの入力からなる対称アフィンシステムであり可制御となる．しかし，動力学モデル (3.57) は劣駆動システムであり，運動学モデルの入力を任意に選ぶことができない．よって，本状態において運動学モデルの範囲のみで軌道計画を行うことはできない．

3.2.4　旋回半径

ここでは，前輪が拘束状態で後輪が滑り状態の場合に，両輪拘束状態と比較して，より小さな旋回半径が得られることを示す．平面上の曲線 $\boldsymbol{c}(t) = (x(t), y(t))$ の曲率

半径は次のように求められる．

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \tag{3.60}$$

運動学モデル (3.54)，(3.56) より求められる曲率半径をそれぞれ ρ_c，ρ_s とする．式 (3.60) より

$$\rho_c = L_F / \tan\phi \tag{3.61}$$

$$\rho_s = \frac{1}{\omega}\sqrt{(r\dot{\psi}_F)^2 - 2L_F r\dot{\psi}_F \omega \sin\phi + L_F^2} \tag{3.62}$$

ここで，曲率半径の符号が正の時は時計回りを，負の時は反時計回りを示す．両輪拘束状態の場合の最小曲率半径は，ホイールベース長 L と最大操舵角 ϕ_{max} によって決まり，$L_F/\tan\phi_{max}$ となる．一方で，テールスライド状態の場合，旋回半径はホイールベース長だけでなく車体の速度 ω 及び $r\dot{\psi}_f$ も含む．$\gamma = r\dot{\psi}_F/\omega$ とすると次のように表される．

$$\begin{aligned} \rho_s &= \mathrm{sign}(\gamma)\sqrt{\gamma^2 - 2L_F\gamma\sin\phi + L_F^2} \\ &= \mathrm{sign}(\gamma)\sqrt{(\gamma - L_F\sin\phi)^2 + (L_F\cos\phi)^2} \end{aligned} \tag{3.63}$$

Fig. 3.13 に示すように，同じ操舵角度を与えた場合でも，車体速度によって旋回半径は異なる．また，ρ_s が最小となるのは，$\gamma = L_F\sin\phi_{max}$ の時であり，この時 $\rho_{s,\max} = L_F\cos\phi_{max}$ となる．3.14 に示すように，最大操舵角 $|\phi_{\max}| \leq \pi/2$ に対して，両輪拘束状態の場合の旋回半径よりも小さな値をとることが確認できる．

3.2.5　タイヤが滑り始める条件

タイヤが滑り始める条件は，ラグランジュ乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ と各車輪に働く垂直荷重によって決まる．軌道計画において意図せずにタイヤが滑り始めることを防ぐために，$\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1 F_n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2 F_n}\right)^2 \leq 1$ を拘束条件として加える必要がある．前後 2 輪車両モデルにおいて，両輪拘束状態において，ラグランジュ乗数は次のように計算できる．

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_R \\ \boldsymbol{\lambda}_F \end{bmatrix} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{C}) + \dot{\boldsymbol{A}}\dot{\boldsymbol{q}}\} \tag{3.64}$$

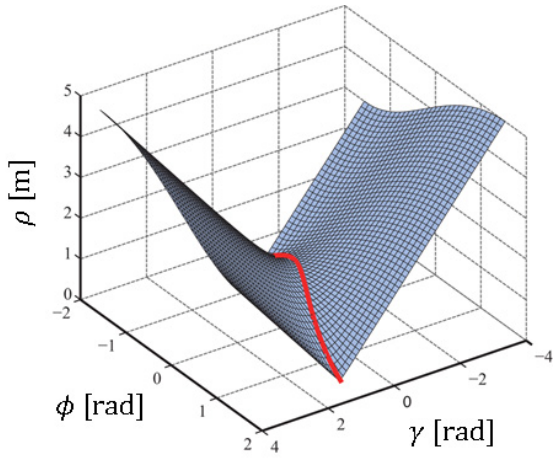

Fig. 3.13 Turning radius of tail-slide vehicle.

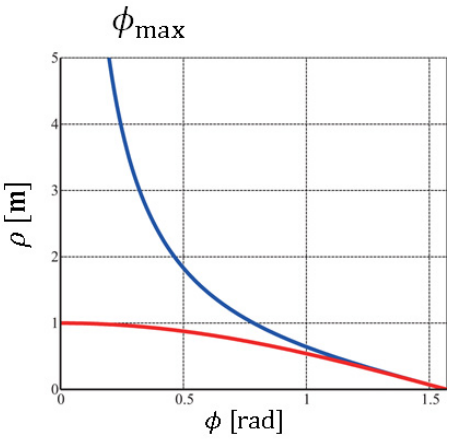

Fig. 3.14 Comparison between minimum turning radius of tali-slide and grip vehicle.

ここで，$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_R, \boldsymbol{A}_F] \in \boldsymbol{R}^{4\times 6}$ である．ラグランジュ乗数 (3.64) は $\dot{\psi}_r$，ϕ の関数となる．また，前後車輪に働く垂直荷重は (3.51) によって求められ，車体加速度によって変化する．Fig. 3.15 の左図は定常速度かつ入力トルクがゼロの時，つまり $\tau_1 = \tau_2 = 0$ となるときの $(\lambda_i^1/\mu_1 N_i)^2 + (\lambda_i^2/\mu_2 N_i)^2$ を示している．また，各軸はそれぞれ操舵角 ϕ と車体速度 V であり，赤色と青色の曲面が後輪と前輪を示している．また縦軸 $(\lambda_i^1/\mu_1 N_i)^2 + (\lambda_i^2/\mu_2 N_i)^2$ が 1 の時を太線で示しており，この時車輪が滑り始めることを意味する．どちらの場合も，操舵角が大きい時，また速度が大きい時に $(\lambda_i^1/\mu_1 N_i)^2 + (\lambda_i^2/\mu_2 N_i)^2$ の値が大きくなっている．また，Fig. 3.15 の右図は荷重の移動による車輪が滑り始める状態の変化を示している．車両が加速状態の時は前輪の荷重が小さくなり，後輪の荷重は大きくなるので，滑り始めの状態も合わせて変化している．また，減速時も同様である．両輪拘束状態からテールスライド状態へ状態を変化させたい場合，減速させながら旋回させることが望ましいと言える．

次に，テールスライド状態における前輪が滑り始める条件について考察する．テールスライド状態では，後輪は滑っており摩擦力が働くため，ラグランジュ乗数は次

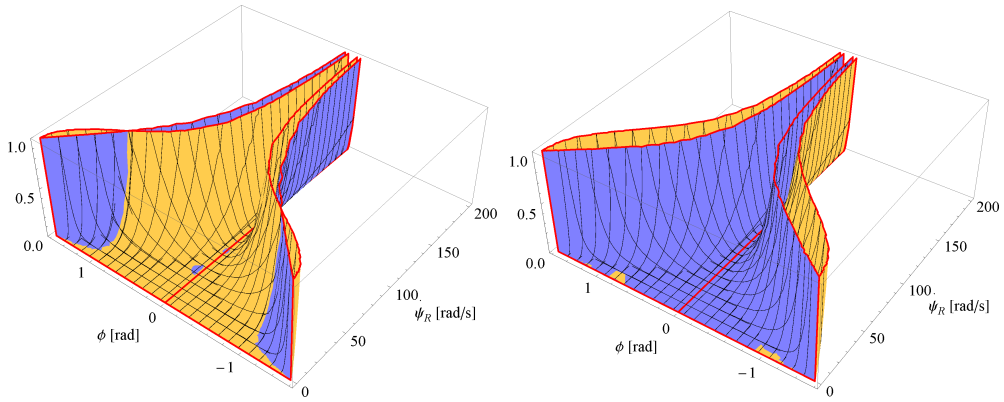

Fig. 3.15 The value of $(\lambda_i^1/\mu_1 N_i)^2+(\lambda_i^2/\mu_2 N_i)^2$ versus ϕ and $\dot{\psi}_R$ for the front wheel ($i=F$, blue) and the rear wheel ($i=R$, orange). $L_F=0.2$[m] and $L_G=0.02$[m] (left), $L_F=0.2$[m] and $L_G=0.18$[m] (left). The other parameters of vehicle is common and set as follows: $m_o=1.0$[kg], $m_r=0.1$[kg], $r=0.02$[m] and $J=0.02$[kg$\cdot$m^2].

のように計算できる．

$$\boldsymbol{\lambda}_F=(\boldsymbol{A}_F\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}_F^T)^{-1} \{\boldsymbol{A}_F\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}_R^T\boldsymbol{f}_R)+\dot{\boldsymbol{A}}_F\dot{\boldsymbol{q}}\} \tag{3.65}$$

(3.65) は入力トルクおよび運動学モデル (3.56) における速度入力 $\boldsymbol{v}_F$ の関数として表される．$\dot{\psi}_F>0$，$\omega<0$，$\beta<0$，$\dot{\psi}_R=0$ とする．Fig. 3.16 に $\dot{\psi}_F$，ϕ，γ を変化させた時の $(\lambda_F^1/\mu_1 N_F)^2+(\lambda_F^2/\mu_2 N_F)^2=1$ の値を示す．前輪が滑り始めるのは $(\lambda_F^1/\mu_1 N_F)^2+(\lambda_F^2/\mu_2 N_F)^2=1$ の時であり，太線で示している．前輪の回転速度 $\dot{\psi}_F$ 及び γ が大きくなる程に $(\lambda_F^1/\mu_1 N_F)^2+(\lambda_F^2/\mu_2 N_F)^2$ の値は大きくなっているが，操舵角 ϕ に関しては $\phi=0$ を中心に対称となっていないことに注意する．特に γ の値によって小さくなっているが，これは滑り角の方向に操舵角を合わせることにより旋回半径が小さくなっているためである．実際の運転技術におけるカウンターステアに当たる．

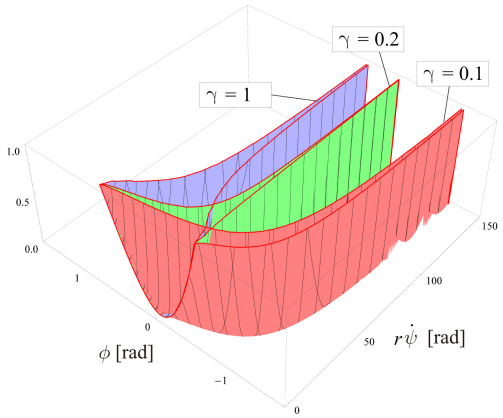

Fig. 3.16 The value of $(\lambda_i^1/\mu_1 N_i)^2+(\lambda_i^2/\mu_2 N_i)^2$ versus ϕ and $\dot{\psi}_R$ for the front wheel for different $\gamma = (r\dot{\psi}_R/\omega)$: γ=0.5 (red), γ=1.0 (green), γ=5.0 (blue).

3.3　ドリフト車庫入れ問題

3.3.1　問題設定

Fig. 3.17 に示すような一輪車両の軌道計画問題について考える．車体の大きさは，進行方向長さが L[m]，幅が b[m] であるとし，$L > b$ とする．初期状態を $\boldsymbol{q}_0$，目標状態を $\boldsymbol{q}_d$ とする．初期時刻を $t = 0$，終端時刻を $t = T$ とし，2 つの時刻において車両は静止しているものとする．つまり，$\dot{\boldsymbol{q}}(0) = 0$，$\dot{\boldsymbol{q}}(T) = 0$ とする．また，一般性を失うことなく，目標位置及び姿勢を原点とする．Fig. 3.17 のように，目標状態を障害物が囲んでいるとする．障害物は凹形状であり，車両の横一方向のみが開かれている．よって，車両が目標状態へ到達するためには，切り返しによっては不可能であり，横滑りさせる必要がある．この軌道計画問題をドリフト車庫入れ問題と呼ぶ．本問題は，従来のノンホロノミック拘束を持つ車両に対する軌道計画問題によっては解くことができない．また，車輪の滑りを考慮した，タイヤ摩擦力を伴うモデルの制御によっても，可制御性の観点から解くことは困難であると言える．そこで，前節で定義した車両モデルに対して，ノンホロノミックシステムに対する軌道計画と滑りを考慮した車両モデルの制御を組み合わせた軌道計画を行う．

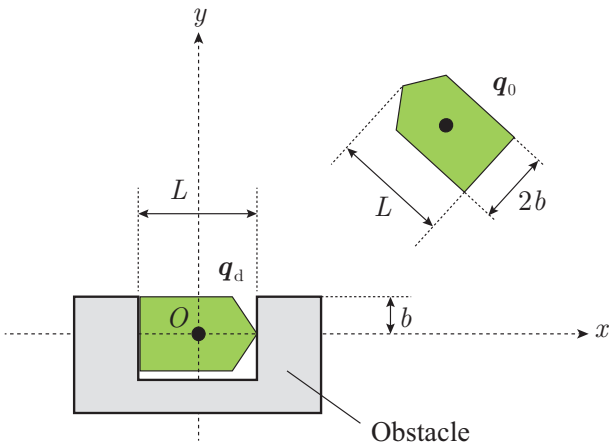

Fig. 3.17 Drift parking problem. The desired position and orientation are at the origin which is surrounded by an obstacle in three directions. The goal is to find a feasible trajectory and the control input steering the system to the desired configuration from any initial state.

3.3.2　軌道計画手法

ここで提案するドリフト車庫入れ問題を解くための軌道計画手法について，その概念を Fig. 3.18 に示す．ドリフト車庫入れ問題を解くためには，少なくとも一度の状態の切り替えが必要となる．そこで本軌道計画では，ノンホロノミック状態から滑り状態へ切り替わるような軌道計画を行う．そこで，(I) ノンホロノミック拘束を受ける車両の軌道計画，(II) 滑り状態の車両の軌道計画の 2 つをそれぞれ行い，(III) 状態の切り替わりの設定によって，2 つの軌道計画を組み合わせる．また，(II) の軌道計画はでは 3 つのステップに分けて行う．以下に，それぞれのステップについて詳細を記す．

(I) ノンホロノミック拘束を受ける車両の軌道計画

初めに，ノンホロノミック拘束を受ける車両の軌道計画について述べる．ここでは，初期状態 $\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{q}(0)$ から滑り始める切り替わりまで遷移させることが目的となる．滑り始めの時刻を $t = T_1$ とする．この軌道計画では，位置と姿勢のみではなく，

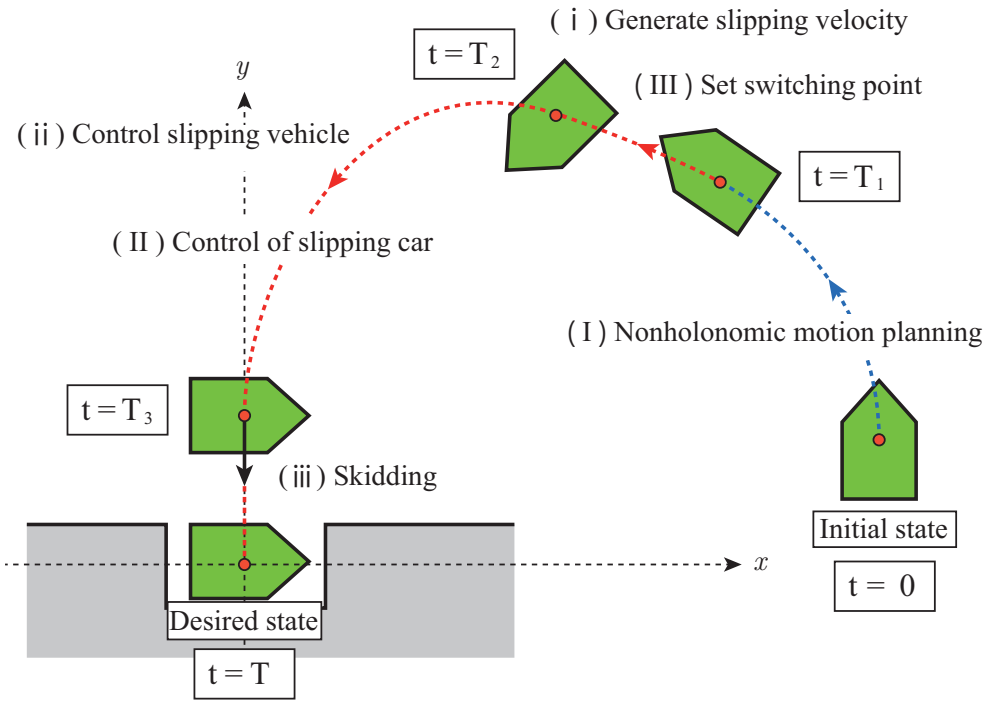

Fig. 3.18 Motion planning strategy for the drift parking problem.

速度に関しても制御する必要がある．制御変数ベクトルを $\boldsymbol{X} = [V, \omega, x, y, \theta]^T$ とし，初期状態を $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0$，切り替わりにおける状態を $\boldsymbol{X}(T_1) = \boldsymbol{X}_1$ とおく．制御モデルは，式 (3.54) 及び (3.55) をまとめて次のようになる．

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V\cos\theta \\ V\sin\theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

ここで，$u_1 = \tau_w / J$，$u_2 = r\tau_\psi / (I_w + mr^2)$ である．ここで，本軌道計画ではノンホロノミック拘束を維持する必要がある．つまり，ラグランジュ乗数の値が最大静止摩擦力よりも大きくなったとき車輪が滑り始める．しかし，初期状態から切り替わりの状態まではノンホロノミックシステムである必要があるため，ラグランジュ乗数が $\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1 F_n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2 F_n}\right)^2 \leq 1$ を満たすように軌道計画を行う．

(II) 滑り状態の車両の軌道計画

ここでは，滑り始めの状態 $\dot{\boldsymbol{q}}_1$ から目標状態 $\boldsymbol{q}_d$ までの軌道計画を行う．初めに，本ステップでは車体速度の制御を行う．つまり，動力学モデル (3.44) における車体速度 (V, β, ω) を目標値まで制御することを目的とする．

(i) 車輪が滑り始める条件

ここでは，ノンホロノミック拘束を受ける車両を滑らせるための条件及び方法について考察する．状態の切り替わりが発生するのは，$\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1 F_n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2 F_n}\right)^2 > 1$ の時である．ラグランジュ乗数は，式 (3.34) に示すように車輪への駆動トルクと遠心力の関数となっている．よって，大きな駆動トルクを与えるか大きな速度で旋回させたときに滑りを発生させることができる．ここでは，後の軌道計画において十分な滑り角と速度が必要であり，切り替わりタイミングを任意に設定可能なことから，大きな駆動トルクを与えて滑らせる．車輪が滑り始める駆動トルクは次のように表される．

$$\tau_\psi^2 > \left(\frac{2}{3\mu_1 F_n r}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{mV\omega}{\mu_2 F_n}\right)\right\} \tag{3.67}$$

上式は，滑り始めの条件 (3.25) にラグランジュ乗数 (3.34) を代入して得られる．最後に，本ステップの終端時刻を T_2 とし，終端時刻における車体速度をそれぞれ $V(T_2) = V_2$，$\beta(T_2) = \beta_2$，$\omega(T_2) = \omega_2$，$\dot{\psi}(T_2) = \dot{\psi}_2$ とする．

(ii) 車両速度の制御

本ステップでは，車体を横滑り状態へ制御する．つまり，目標状態を $\boldsymbol{v}_3$，終端時刻を $t = T_3$ として，$\boldsymbol{v}(T_3) = [V_3, -\pi/2, 0]^T$ となるような制御を行う．また，車輪速度については駆動トルクによって車輪の回転を停止する，つまりブレーキが可能であるとし，本ステップ開始時刻から終端時刻まで $\dot{\psi} = 0$ を満たすものとする．以下に，車体速度の制御手法について説明する．駆動トルクは常にブレーキトルクとして用いるため，入力は旋回トルク τ_w のみとなる．タイヤ縦方向と横方向の摩擦係数 μ_1 及び μ_2 について，$\mu_1 = \mu_2$ の場合と $\mu_1 \neq \mu_2$ の場合に分けて述べる．

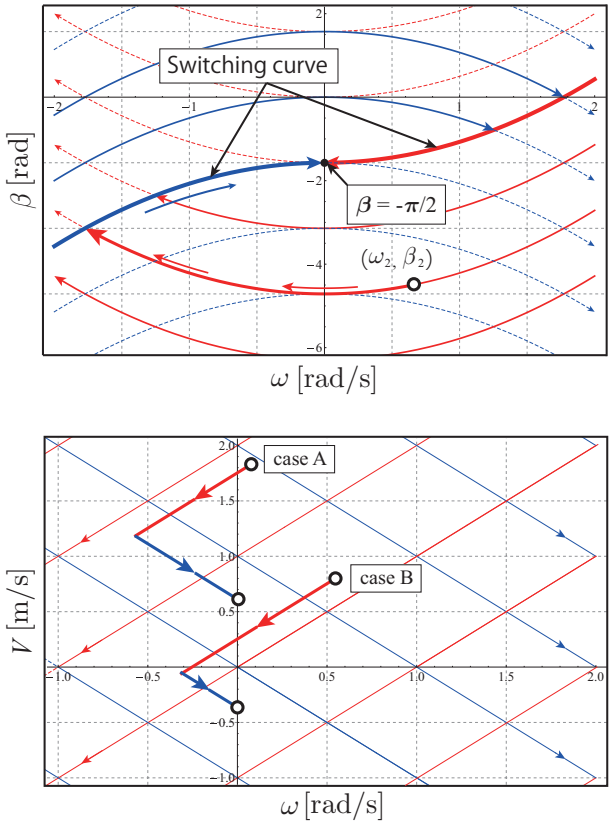

Fig. 3.19 Time optimal trajectory with the maximum torque $|\tau_m| = 1$ and the switching curve (top) and phase plot of ω versus V (bottom). Case A keeps $V \neq 0$ but V reaches zero in case B.

(A) $\mu_1 = \mu_2$ の場合

$\mu_1 = \mu_2 = \mu$ の場合，摩擦モデル (3.25) は $f_1 = -\mu F_n \cos\beta$，$f_2 = -\mu F_n \sin\beta$ と簡単化できる．この時，車両の動力学モデル (3.57) は次のように表される．

$$\dot{V} = -\mu F_n / m \tag{3.68}$$

$$\dot{\beta} = -\omega \tag{3.69}$$

$$\dot{\omega} = \tau_\omega / J \tag{3.70}$$

(3.70) に対する制御手法について述べる．旋回トルクの上限を $|\tau_w| \leq \tau_m$ を満たすとする．この時，最短時間最適制御により，制御入力を次のように設定

する．

$$\tau_\omega = \begin{cases} +\tau_m & \text{for } t < T_s \\ -\tau_m & \text{for } t \geq T_s \end{cases} \tag{3.71}$$

ここで，T_s は制御則が切り替わる時刻である．最短時間となる最適軌道は，制御則の切り替え曲線を Fig. 3.19 に示すように $\beta = \text{sign}(\beta_2 + \pi/2)\frac{1}{2\tau_m}\omega^2 - \pi/2$ とすると，$\beta = \pm\frac{1}{2\tau_m}(\omega^2 - \omega_2^2) + \beta_2$ と解くことができる．上記の制御において，制御対象は滑り角 β と回転速度 ω であるが，$V = 0$ となった場合，滑り状態からノンホロノミック拘束状態と切り替わる．Fig. 3.19 では，ω の変化に伴う V の変化を示している．case A の場合，旋回速度 ω が目標状態となったとき速度 $V > 0$ を満たしているが，case B の場合は $V < 0$ となっている．これらの違いは初期速度によって決まる．よって，滑り始めの初期速度を最大旋回トルク τ_m に合わせて適切に設定する必要がある．

(B) $\mu_1 \neq \mu_2$ の場合

$\mu_1 \neq \mu_2$ の場合，摩擦モデル及び式 (3.41)-(3.43) の簡単化ができず，解析的な制御入力の導出は困難となる．そこで，動力学モデルの線形化を適用する．また，線形化されたモデルに対してフィードフォーワード制御入力の計算と iterative steering の組み合わせる．$V = \bar{V}$ 及び $\beta = -\pi/2$ における線形化モデルは次のように表される．

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\mu_1^2+\mu_2^2}{\mu_2 m \bar{V}} F_n & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \beta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/J \end{bmatrix} \tau_\omega \tag{3.72}$$

上記のモデルは明らかに不可制御であるが，速度 V に関しては目標状態へ収束させる必要はなく，$V > 0$ を満たせばよい．よって，滑り角 β 及び ω を目標状態 $\beta_3 = -\pi/2$，$\omega_3 = 0$ となるような制御入力を求める．2 つの制御変数を 2 段階に分けて制御することを考え，初めに旋回速度 ω を目標状態へ収束させたのちに，旋回速度を変化させずに滑り角 β を目標状態へ収束さえる制御入力を求める．β_i を iterative steering の各ステップの開始時刻 t_i における滑り角とする．入力トルクを $\tau_\omega = k \sin 2\pi t/\Delta t$ とする．ここで，$\Delta t = t_{i+1} - t_i$ と

k は滑り角に関して $\beta(t_{i+1}) = -\pi/2$ となるように決定するとして，線形化されたモデルにおいて次のように求めることができる．

$$k = -\eta \ \mathrm{sign}(\bar{\beta}) \frac{2\pi J}{\Delta t^2} \left\| \bar{\beta} + \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_2 m \bar{V}} F_n \right\| \tag{3.73}$$

ここで，$\eta \in [0, 1]$ は定数であり，$\bar{\beta} = -\pi/2 - \beta_i$ である．上記入力の下では，各ステップにおいて $\omega(t_i) = 0$ であれば，$\omega(t_{i+1}) = 0$ を満たす．また，滑り角 β は本ステップにおける初期滑り角が十分に $-\pi/2$ に近ければ，漸近的に収束する．また，$\mu_1 = \mu_2$ の場合と同様に速度 V は摩擦力によって次第に減少するため，$t = T_3$ において $V > 0$ となるように，本ステップにおける初期速度 V_2 を設定する必要がある．

(iii) 横滑り状態

前ステップ (ii) の終端状態 $\boldsymbol{v}_3$ において，車両は横滑り状態，つまり $\boldsymbol{v}_3 = [V_3, -pi/2, 0]$ となっている．この状態で入力トルクを加えなければ摩擦力によって滑り速度は減少してゼロとなる．本ステップにおける初期速度 $V(T_3) = V_3$ がゼロとなるまでの平面上の移動距離 δ と時間 $\Delta T = T - T_3$ は次のように計算できる．

$$\Delta T = \frac{m V_3}{\mu_2 F_n} \tag{3.74}$$

$$\delta = \frac{m V_3^2}{2\mu_2 F_n} \tag{3.75}$$

障害物に囲まれる目標位置へ到達するための横滑り速度 V_3 を式 (3.74)-(3.75) より計算することになる．Fig. 3.17 のように，障害物に囲まれるスペースの大きさが丁度車体のサイズと同じであれば，少なくとも $\delta > b$ とすればよい．

(III) 2 つの軌道計画の組み合わせ

滑り始めの状態 $\boldsymbol{q}_1$ における車両の位置 (x_1, y_1) と姿勢 θ_1 は，初めのステップ (i) における目標状態であり，ステップ (ii) における初期状態となる．ステップ (i) のノ

ンホロノミック拘束を受ける車両の軌道計画と step2 の滑り状態の車両の制御を組み合わせるために，滑り始めの状態 $\boldsymbol{q}_1$ の決定方法について以下に示す．

(II) の軌道計画における位置と姿勢の変化量は，滑り状態の車両の運動学モデル (3.38)-(3.40) を積分することにより計算することができる．

$$\Delta x = \int_{T_1}^{T} V\cos(\theta+\beta)dt \tag{3.76}$$

$$\Delta y = \int_{T_1}^{T} V\sin(\theta+\beta)dt \tag{3.77}$$

$$\Delta\theta = \int_{T_1}^{T} \omega dt \tag{3.78}$$

この時，目標状態へ到達するため滑り始めの位置及び姿勢は次のように求められる．

$$x_1 = \Delta x\cos(\Delta\theta) - \Delta y\sin(\Delta\theta) \tag{3.79}$$

$$y_1 = \Delta x\sin(\Delta\theta) + \Delta y\cos(\Delta\theta) \tag{3.80}$$

$$\theta_1 = 2\pi - \Delta\theta \tag{3.81}$$

また，滑り始めの速度については，$\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1 F_n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2 F_n}\right)^2 \leq 1$ を満たすように設定することによって，(I) の軌道計画において，車両の運動をノンホロノミックシステムとして扱うことができる．

3.3.3　シミュレーション

本節で提案した軌道計画手法の有効性について，case A と case B の場合についてそれぞれシミュレーションにより確認する．車体と車輪の質量を $m = 1$[kg]，$m_w = 0.5$[kg]，慣性モーメントを $J = 5\times10^{-3}$[kg·m^2]，車輪の半径を $r = 0.02$ [m] とする．

(A) $\mu_1 = \mu_2$ の場合

摩擦モデル 1(3.25) における最大摩擦係数を $\mu_1 = \mu_2 = 0.8$，最大旋回トルクを $\tau_m = 0.02$[Nm] とする．まず，滑り始めの車体速度を $V_1 = 3$[m/s]，$\omega_1 = 2$[rad/s] とする．また，滑りを生じさせるために $\Delta T_2 \triangleq T_2 - T_1 = 0.6$[s] の間に駆

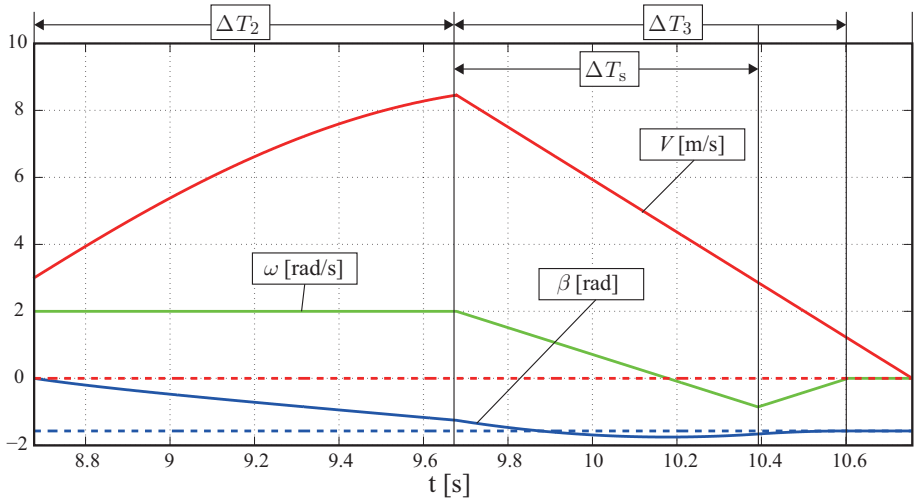

Fig. 3.20 Time histories of V, β, ω in Step 2 composed of 3 phases, generate slipping (from $t = 8.68$[s]), control slipping vehicle (from $t = 9.68$[s]) and skidding (from $t = 10.6$[s] to $t = 10.76$[s]).

動トルクを $\tau_m = 0.1$[Nm] として与える．次に，Fig. 3.19 に示す制御入力における符号の切り替え時刻を $\Delta T_s \triangleq T_s - T_2 = 0.71$[s] として $\Delta T_3 \triangleq T_3 - T_2 = 0.92$[s] と計算できる． 時刻 T_3 において，車両は横方向の速度のみを持つ状態であり，その後 $t = T_3 + 0.15$[s] で停止する．車両速度の時間変化を Fig. 3.20 に示す．この時の車両の位置と姿勢の変化量は，式 (3.76)-(3.78) より $\delta x = 8.98$[m] ,$\delta y = 5.39$[m],$\delta\theta = 2.32$[rad] と求められる．これらの変化量を式 (3.79)-(3.81) に代入して滑り始めの位置と姿勢 $\boldsymbol{q}_1$ を計算する．最後に，初期状態 $\boldsymbol{q}_0$ から滑り始めの状態 $\boldsymbol{q}_1$ までの軌道計画を行う．本シミュレーションでは，車輪が滑らない条件 $\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1 F_n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2 F_n}\right)^2 \leq 1$ を不等式拘束とした最適制御問題を解くことにより軌道計画を行った．車両の平面上の軌道を Fig. 3.21 に示す．また，縦方向及び横方向のタイヤ摩擦力とラグランジュ乗数を Fig. 3.22 に示す．また，Fig. 3.22 は $\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1 F_n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2 F_n}\right)^2$ の値を示したものであり，滑り始めの時刻まで 1 以下となっていることから車輪が滑らないための条件を満たしていることが確認できる．本シミュレーションにおいて得られた軌道は唯一となる解ではない．滑り始めの車体速度や，最大旋回トルクの値を変更することにより異なる

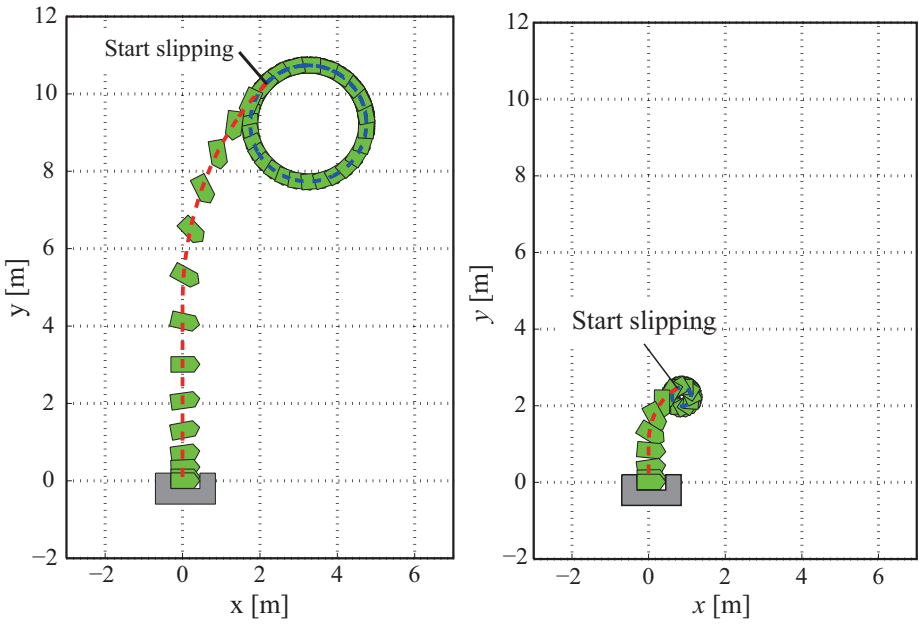

Fig. 3.21 The path of the vehicle designed by $V_1 = 3$[m/s], $\omega_1 = 2$[rad/s], $\tau_w = 0.02$[Nm], $\Delta T_2 = 0.6$[s] and $\tau_\psi = 0.1$[Nm] (left) and $V_1 = 1$[m/s], $\omega_1 = 4$[rad/s], $\tau_w = 0.1$[Nm], $\Delta T_2 = 0.6$[s] and $\tau_\psi = 0.1$[Nm] (right).

軌道が得られる．また，初期状態から滑り始めの状態までは車両はノンホロノミックシステムとしてモデル化されており，その運動学モデルは可制御性であることから，任意の初期状態からの軌道計画を行うことができる．よって，障害物が増えた場合でも滑り始めの位置を変更することによって軌道計画を行うことができる．

(B) $\mu_1 \neq \mu_2$ の場合

ここでは (II) 滑り状態の車両の軌道計画のステップ (ii) における制御入力の有効性についてのみ示す．ステップ (ii) の初期車体速度を $V_2 = 4$[m/s]，$\beta_2 = -\pi/2 + 0.5$[rad]，$\omega_2 = 0$ とする．Fig. 3.23 に示すように，制御入力 τ_ω のパラメータを $\eta = 0.1$，$\Delta t = 0.01[s]$ とした時，滑り角 β は 30 回の繰り返しにより $-\pi/2 + 1.0 \times 10^{-3}$ に収束している．また速度 V は滑り角が収束するまでに減少しているが $V > 0$ を満たしている．旋回速度は各繰り返しの終端時刻にお

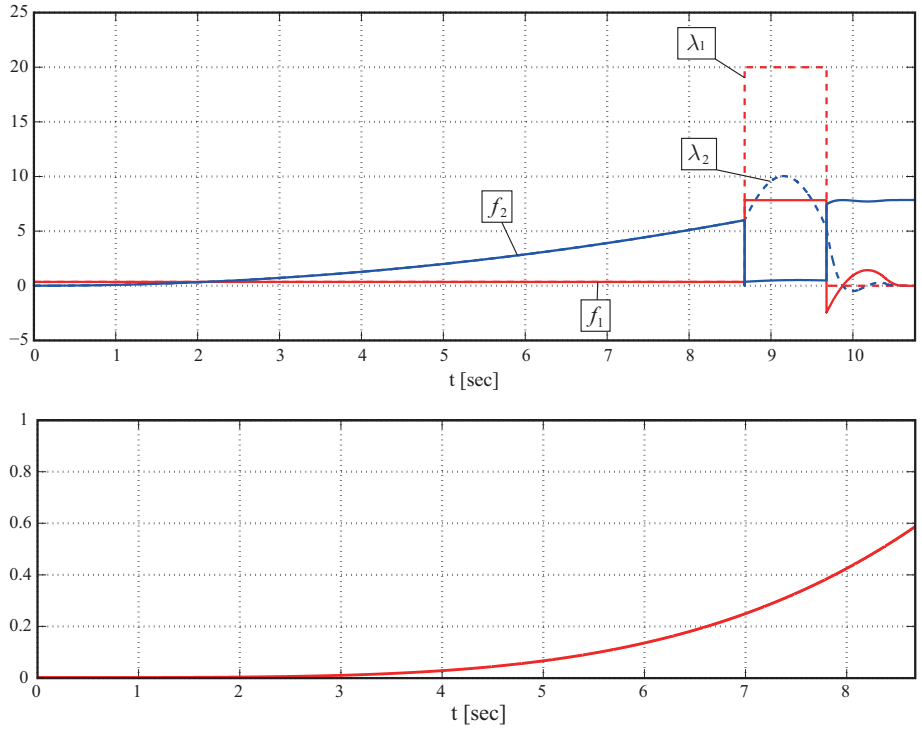

Fig. 3.22 Time history of the friction forces and Lagrange multipliers (top). Plot of $\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1 F_n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2 F_n}\right)^2$ to check whether the slipping occur or not in step 1(bottom).

いてゼロとなっていることが確認できる．よって，ステップ 1 とステップ 2 を組み合わせることにより $\mu_1 = \mu_2$ の場合と同様に軌道計画問題を解くことができる．

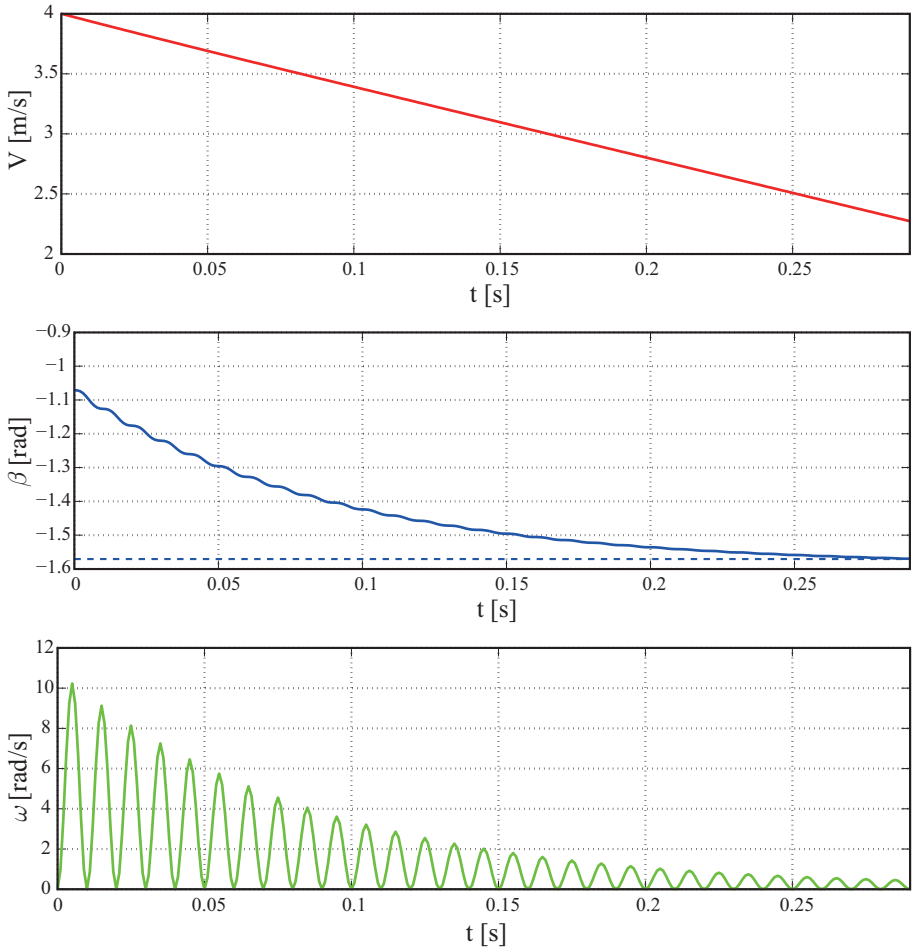

Fig. 3.23 Time histories of the translational velocity V (top), the slip angle β (middle) and the angular velocity ω (bottom). The time interval of each iteration is set to $\Delta t = 0.01$.

3.4　小括

本章では，車輪移動ロボットの滑りを利用した軌道計画を行った．本軌道計画では，目標状態において車両の周囲を障害物が囲むドリフト車庫入れ問題を対象とする．本軌道計画問題において目標状態へ到達するためには，切り返しによっては目標状態に到達できず，車体を横滑りさせる必要がある．また，車両の軌道計画において車輪が滑ると仮定した場合には，車両の位置と姿勢に関する軌道計画は困難で

ある．

初めに，ノンホロノミックシステムとしての車両の軌道計画に車輪の滑りを組み込むために，タイヤ摩擦モデルの提案を行った．本摩擦モデルは，ノンホロノミック拘束を満たすために発生するラグランジュ乗数と，タイヤが滑っている時に発生するクーロン摩擦力を含む．さらに，タイヤ縦方向と横方向に働く力を考慮した 2 次元モデルへ拡張した．次に，ドリフト車庫入れ問題を解くために，横滑りする車体の制御と，ノンホロノミックシステムとしてモデル化された車両の軌道計画を組み合わせた軌道計画手法を提案した．横滑りする車体の制御において，タイヤ縦方向と横方向の摩擦係数が同じ場合は，最短時間問題として解析的に制御入力を得ることが可能である．また，それぞれの摩擦係数が異なる場合は，制御モデルを線形近似して，フィードバック制御を行った．最後に，本軌道計画の有効性をシミュレーションにより確認した．

第4章　結言

本研究では，運動学的なノンホロノミック拘束を受ける移動ロボットにおいて，特にロボットの動力学と運動学を切り離すことができないシステムを対象とした軌道計画を行った．軌道計画問題は，初期状態と目標状態と結ぶ軌道と入力の設計を行うことを目的とする．ノンホロノミック拘束を受けるシステムの運動学モデルの多くは対称アフィンシステムとしてモデル化される．既存研究において，対称アフィンシステムの軌道計画手法は多く研究されており，体系化されている．一方で，ロボットの運動方程式を制御モデルとして軌道計画を行うことは，単純に状態変数の数が増加することによる制御入力の設計の複雑さだけでなく，可制御性を示すことが困難であり，解となる軌道の存在が保証できない．一部の運動学的な拘束条件を受ける移動ロボットでは，運動方程式から運動学モデルを分離することが可能となる．この場合，移動ロボットの軌道計画問題を，その運動学モデルを対象とした軌道計画問題として置き換えることができる．しかし，移動ロボットの動力学的な要素が本質的に運動に影響を及ぼす場合には，動力学を含めた軌道計画を行う必要がある．

本研究では，移動ロボットの軌道計画問題における動力学的な影響が無視できない場合として，2軸慣性ロータによって駆動される球型ロボットの軌道計画問題，滑りを伴う車両の軌道計画問題を挙げ，それぞれの軌道計画手法を提案した．

4.1　球型ロボット

第2章では，2軸の慣性ロータによって駆動される球型ロボットの軌道計画を行った．球型ロボットは，球殻と駆動機構によって構成され，その運動学はノンホロノミックシステムである球体の転がり接触としてモデル化される．球体の転がり接触

モデルは，球の位置と姿勢を状態変数に，角速度を入力変数とする対称アフィンシステムとなる．特に鉛直軸回りの角速度は発生しないと仮定した純転がり運動学モデルを対象として，既存研究においていくつかの軌道計画手法が提案されている．

慣性ロータが 3 軸に配置されている場合は，逆動力学計算を解くことによって，慣性ロータに働く入力トルクから任意の軸回りの角速度を発生させることができる．よって，球型ロボットの軌道計画問題は，球体の転がり接触モデルを対象とした軌道計画問題に置き換えることができる．しかし，球型ロボットに 2 軸のみ慣性ロータが配置されている場合は，システムの動力学部分が劣駆動となり，任意の角速度を発生させることができない．この時，軌道計画においてロボットの動力学について考慮する必要がある．

初めに，球型ロボットの運動方程式において，角運動量保存則に基づき，球殻に関する動力学モデルの積分によって慣性ロータの回転速度と球型ロボットの角速度に関する式をを導き，球の運動学モデルと合わせて 5 つの状態変数と 2 つの制御入力によって構成される制御モデルを導出した．本制御モデルは ball-plate システムと類似しているが，球の鉛直軸回りの角速度が拘束条件を伴って発生すること，可制御性を示す可到達 distribution を構成する Lie bracket の次数が大きくなるという点で異なる．また，nilpotent approximation を行う上で特異点が現れることから，全ての状態について有効な軌道計画手法が存在しない．

そこで，2 つの軌道計画を組み合わせることによって問題解決を行った．1 つ目は，慣性ロータが配置される大円 (球面上における赤道) に直交する測地線を構成的な軌道として，幾何学的なアプローチによって軌道計画を行う．本軌道に沿った球の運動では鉛直軸回りの角速度が発生しないため，解析的に軌道に沿った状態の変化量を計算することができる．

2 つ目は，nilpotent approximation と iterative steering を組み合わせることにより軌道計画を行った．nilpotent approximation において現れる特異点を回避するために，球面上の接触点座標系の原点に当たる南極点を原点とした近似モデルを構築し，南極点を含む半球面のみを通る軌道の設計を行う．また，球面上の接触点を変化させずに接触角と平面上の接触点位置を目標状態へ到達させるために，球面上の

閉軌道を構成的な軌道とした．

最後に，シミュレーションにより本軌道計画の有効性を確認した．特に，iterative steering における目標状態への収束性は，中間目標点を設定するパラメータと，球型ロボットの物理パラメータである慣性比率によることを確認した．目標状態へ収束するまでに要する繰り返しの回数と収束性はトレードオフの関係に在り，慣性比率や初期状態によって適切なパラメータが異なる．一方で，適応的にパラメータの値を変更させることにより，少なくとも収束性については保証できることを示した．

4.2　ドリフト車庫入れ

第 3 章では，タイヤの滑りを含めた車両の軌道計画として，ドリフト車庫入れを行った．ドリフト車庫入れ問題は，隙間なく障害物に囲まれた駐車スペースへの車庫入れを目的としており，切り返しによっては目標状態へ到達することができない．従って，滑りを含めた軌道計画を行う必要があり，滑りに伴って生じるタイヤ摩擦力という動力学的な要素を考慮しなければならない．

滑りを含めた車両の制御に関する研究では，車体速度を制御することを目的としており，位置や姿勢を目標状態に含まない．タイヤが滑っている状態では，ノンホロノミック拘束を受ける車両のように運動学モデルを分離して扱うことができないため．一方で車両の運動におけるノンホロノミック拘束とは，タイヤが滑らずに転がることを表す．よって，従来のノンホロノミックシステムの枠組みの中で，滑りを外乱としてではなく状態の一つとして扱うことは困難であった．

本研究では，ノンホロノミックシステムの軌道計画に滑りを連続的に接続するために，拡張クーロン摩擦モデルを定義した．本摩擦モデルは，ノンホロノミック拘束を発生させるための一般化力であるラグランジュ乗数と，動摩擦を表すクーロン摩擦力を組み合わせたモデルとなっている．タイヤの滑りに対応して 2 つの摩擦の状態が切り替わり，ノンホロノミックシステムとしての軌道とタイヤが滑る車両の軌道を組み合わせることが可能となる．また，タイヤの縦方向と横方向を摩擦楕円を元にして組み合わせることで拡張した．

また，ドリフト車庫入れに対する軌道計画として，初めにノンホロノミック拘束

を受ける車両の軌道計画と，タイヤが滑っている車両の制御を行った．ノンホロノミックシステムとしての車両は，既存研究において多くの軌道計画手法が提案されている．但し，意図しないタイヤの滑りが発生しないために，ラグランジュ乗数に関する拘束条件を考慮する必要がある．また，タイヤが滑っている車両については，車体の速度のみの制御を行う．この時，タイヤの縦方向と横方向の摩擦係数の関係によって制御の困難さが異なる．2 つの摩擦係数が等しい時は，最短時間制御として解析的に制御入力の設計が可能となる．一方で，摩擦係数が異なる場合は，モデルの近似が必要となり，iterative steering と組み合わせることによって制御を行った．最後に，滑り始めの状態を設定することによって，2 つの状態を組み合わせることを行い，ドリフト車庫入れ問題を解決した．

4.3　今後の課題

本論文の終わりに，本研究により得られた成果と今後の課題について述べる．

- 移動ロボットの軌道計画の中で動力学的な影響について考慮する必要があるのは，アクチュエータの数が少ない（必要最低限）場合，滑りが発生するような路面環境を高速で走行する場合等，特に困難な状況を想定した場合となっている．アクチュエータの数を増やしたり，滑りが発生しないように速度を小さくしたりすることによって，問題の簡単化を図ることができる．しかし，移動ロボットに高度なタスクを実現させるために，またアクチュエータの故障や意図しない滑りの発生等，想定しない事象が発生した時の対応のためには，本研究で行ったような，より困難な問題について取り組む必要がある．

- ノンホロノミックシステムは，状態変数や入力の数の違いによって様々な性質が現れ，それぞれに適用可能な軌道計画手法も異なる．本研究で対象とした，2 軸慣性ロータ駆動による球型ロボットの制御モデルは，ball-plate システムと同じ 5 つの状態変数と 2 つの入力によって構成される対称アフィンシステムであったが，ノンホロノミックシステムとして異なる性質を持ち，ball-plate システムに対する軌道計画手法は適用できない．特に，可到達 distribution を構

成する際に現れる特異点については，既存の文献では扱われていない．今後，同様の性質を持つシステムが見つかった場合，本研究で提案した軌道計画手法の適用が期待される．

- 滑りを伴う車両の軌道計画は，拡張クーロン摩擦モデルの導入を含めて，ノンホロノミックシステムの研究において新たな問題設定を行ったものと言える．これまでに，個別に扱われていたノンホロノミック拘束と滑りを連続的に扱うことを可能にした．特に，ドリフト走行のように，滑りを意図的に軌道計画に組み込むためには本モデルが有効である．事前に滑りの発生が予測されるような場面においては，滑った後の事後対応を行うよりも，事前に滑りを含めた軌道をプランニングすることが，より安全な移動ロボットの走行に結び付くと考える．また，車両ロボットに限らず，転がりと滑りが存在しうるシステムでは，ドリフト車庫入れ問題のような問題設定の下で，より高度な運動制御が行うことができる．

今後の課題として，軌道追従制御に関する研究が挙げられる．本研究では，特に移動ロボットの軌道を準備するための軌道計画問題を対象としているが，実際の移動ロボットの走行において発生する軌道からのずれについて，何らかのフィードバック制御測による修正が必要となる．本研究で対象としているシステムでは，動力学モデルにおける劣駆動性により単純に back-stepping 法を適用することが困難である．また，軌道計画問題と軌道追従問題を独立して考えることができないということも考えられる．この場合，例えばモデル予測制御によって，各ステップ時間ごとに軌道計画を行うことが考えられる．さらに，滑りを用いた軌道計画の場合，路面摩擦係数が軌道計画に大きな影響を与えるため，その推定方法と共に研究の課題となる．また，本研究のシミュレーションで示した軌道は唯一解ではないため，最適制御等によって，入力や軌道長さを最小化するような軌道を求めることが考えられる．滑りを含む車両の最適制御は，文献 [69][70] の中で行われているが，本研究の場合はハイブリッドシステムに対する最適化問題となる．

謝 辞

本研究の計画から論文の作成に至るまで御指導頂きました九州大学大学院工学研究院機械工学部門　山本元司教授に心より感謝いたします．また本論文をまとめるにあたり，有益な御助言を賜りました九州大学国際教育センター　Svinin Mikhail 教授，九州大学大学院工学研究院航空宇宙工学部門　外本伸治教授に深く感謝いたします．本研究を進めるにあたり九州大学大学院工学研究院機械工学部門　菊植亮准教授，田原健二准教授，中島康貴助教には多大な御指導を頂きました．新屋幸喜技術職員には実験機の製作に御協力頂きました．そして，秘書の立山みどりさん，永富瑞穂さんには様々なサポートをして頂きました．ここに深く感謝いたします．

山口東京理科大学　池田毅講師には様々な御助言を賜りました．ここに深く感謝いたします．また，既に御卒業された方々も含めて，様々な面で御協力頂きました研究室の先輩方，同輩，後輩の皆さんへ感謝いたします．

最後に経済的に支援して頂いた家族に心から感謝いたします．

成 28 年 3 月 盛永　明啓

参考文献

[1] 美多 勉, “非線形制御入門 -劣駆動ロボットの技能制御理論-,” 昭晃堂, 2000.

[2] R. W. Brockett, “Asmpototic stability and feedback stabilization, differential geometric control theory,” Birkhauser, pp181–184, 1983.

[3] R. Murray and S. Sastry, “Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 38, no. 5, pp700–716, 1993.

[4] H. Khennouf and C. C. de Wit, “On the Construction of Stabilizing Discontinuous Controllers for Nonholonomic Systems,” Proc. of IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium, pp747–752, 1995.

[5] J. Luo and P. Tsiotras, “Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems.” System and Control Letters, vol.35, pp87–95, 1988.

[6] M. Fliess, J. Levine and P. Rouchon, “Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples.” International Journal of Control, vol.61, pp1327–1361, 1995.

[7] P. Martin and P. Rouchon,“Any (controllable) driftless system with 3 inputs and 5 states is flat,” System and Control Letters, vol.25, pp167–173, 1995.

[8] Hussein. I.I, Worcester Polytech. Inst., Worcester, Bloch. A. M, “Optimal control of underactuated nonholonomic mechanical system,” IEEE Transaction on Automatic Control, vol.53, pp668–682, 2008.

[9] E. F. Sachkova, “Control Synthesis for a Three-Dimensional Nilpotent System,” Diffential Equations, vol.46, no.8, pp1191–1200, 2010.

[10] E. F. Sachkova, “Approximate Solution of a Control Problem on the Basis of the Nilpotent Approximation,” Differential Equations, vol.45, no.9, pp1386–1395, 2009.

[11] H. J. Sussmann, “A General Theorem on Local Controllability,” SIAM Journal of Control and Optimization, vol.25, no.1, pp158–194, 1987.

[12] J. M. Godhavn, A. Balluchi, L. S. Crawford and S. S. Sastry,“Steering of a class of nonholonomic systems with drift terms,” Automatica, vol.35, issue.5, pp837–847, 1983.

[13] H. Kiyota and M. Sampei,“On a Control for a Class of Nonholonomic Systems with Drift Using Time-state Control Form,” Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control, pp3134–3138, 1998.

[14] R. Fierro and F. L. Lewis, “Control of a Nonholonomic Mobile Robot: Backstepping Kinematics into Dynamics,” Journal of Robotic Systems, vol.14, issue.3, pp149–163, 1997.

[15] H. Date, M. Sampei, M. Ishikawa and M. Koga, “Simaltaneous Control of Position and Orientation for Ball-Plate Manipulation Problem Based on Time-State Control Form,” IEEE Transaction on Robotics and Automation, vol.20, no.3, pp465–479, 2004.

[16] G. Oriolo and M. Vendittelli, “A framework for the stabilization of general nonholonomic systems with an application to the plate-ball mechanism,” IEEE Transactions on Robotics, vol.21, no.2, pp162–175, 2005.

[17] A. Bicchi, G. Casalino, C. Santilli, “Planning shortest bounded-curvature paths for a class of nonholonomic vehicles among obstacles,” Journal of Intelligent and Robotic Systems, vol.16, issue.4, pp387–405, 1996.

[18] T. Fraichard and A. Scheuer, “From Reeds and Shepp’s to Continuous-Curvature Paths,” IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol.20, No.6, pp1025–1035, 2004.

[19] D.J. Montana, “The kinematics of contact and grasp,” The International Journal of Robotics Research, vol.7, no.3, pp17–32, 1988.

[20] N. Sarkar, V. Kumar and X. Yun, “Velocity and Acceleration Analysis of Contact Between Three-Dimensional Rigid Bodies,” Journal of Applied Mechanics, vol.63, no.4, pp974–984, 1996.

[21] N. Sarkar, X. Yun and V. Kumar, “Dynamic Control of 3-D Rolling Contacts in Two-Arm Manipulation,” IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol.13, no.3, pp364–376, 1997.

[22] Z. Li, J. Canny, “Motion of Two Rigid Bodies with Rolling Constraint,” IEEE Transaction on Robotics and Automation, vol.6, issue.1, pp62–72, 1990.

[23] R. M. Murray, A. Li and S. S. Sastry, “A Mathmatical introduction to Robotic Manipulation,” CRC Press, 1994.

[24] V. Joshi and R. Banavar, “Motion analysis of a spherical mobile robot,” Robotica, vol.27, no.3, pp343–353, 2009.

[25] T. Das, R. Mukherjee, “Reconfiguration of a rolling sphere: A problem in evolute-involute geometry,” Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME, vol.73, no.4, pp590–597, 2006.

[26] 原田 研介, 川嶋 大雅, 金子 真, “重力平衡する対象物の転がりによる操り,” 日本ロボット学会誌, vol.20, no.2, pp164-172, 2002.

[27] 鈴木 航大, “転がりに基づいた動作計画に関する研究,” 名古屋大学, 修士論文, 2004.

[28] 中島 明, 長瀬 賢二, 早川 義一, “単一の閉軌道の繰り返しを用いた平面を転がる球の接触点の制御,” 計測自動制御学会論文集, vol.40, no.4, pp434-441, 2004.

[29] V. Jurdjevic, “The geometry of the plate-ball problem,” Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol.124, no.4, pp305–328, 1993.

[30] A. Javadi and P. Mojabi, “Introducing glory: A novel strategy for an omni-directional spherical rolling robot,” ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.126, no.3, pp678–683, 2004.

[31] M. Ishikawa, Y. Kobayashi, R. Kitayoshi, and T. Sugie, “The surface walker: a hemispherical mobile robot with rolling contact constraints,” Proc. of IEEE/RSJ Int. Conference on Intelligent Robots and Systems, pp2446–2451, 2009.

[32] D. Liu, H. Sun, Q. Jia and L. Wang, “Motion Control of a Spherical Mobile Robot by Feedback Linearization,” Proc. of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation, pp965–970, 2008.

[33] J. Alves and J. Dias, “Design and Control of a Spherical Mobile Robot,” Proc. of the IMechE Pan I: Journal of System and Control Engineering, vol. 217, no. 6, pp457-467, 2003.

[34] A. Bicchi, A. Balluchi, D. Prattichizzo, and A. Gorelli, “Introducing the “Sphericle”: an experimental testbed for research and teaching in nonholonomy,” Proc. of IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, vol.3, pp 2620–2625, 1997.

[35] V. Joshi, R. Banavar, and R. Hippalgaonkar, “Design and analysis of a spherical mobile robot,” Mechanism and Machine Theory, vol.45, no.2, pp130–136, 2010.

[36] T. Otani, T. Urakubo, S. Maekawa, H. Tamaki and Y. Tada, “Position and Attitude Control of a Spherical Rolling Robot Equipped with a Gyro,” International Workshop on Advanced Motion Control. Istanbul, Turkey: IEEE, pp416-421, 2006.

[37] G. Oriolo and Y. Nakamura, “Control of Mechanical Systems with Second-Order Nonholonomic Constraints; Underactuated Manipulators,” Proc. of IEEE Conference on Decision and Control, pp2398–2403, 1991.

[38] S. Agrawal and S. Bhattacharya, “Optimal control of driftless nilpoten systems: Some new results,” Proc. of IEEE/RSJ Int. Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS’99, vol.1, pp 356–361, 1999.

[39] A. Morinaga, M. Svinin and M. Yamamoto, “A Motion Planning Strategy for a Rolling Robot Driven by Two Internal Rotors,” IEEE Transaction on Robotics, vol.30, no.4, pp993–1002, 2014.

[40] M. Svinin, A. Morinaga and M. Yamamoto, “On the Dynamic Model and Motion Planning for a Spherical Rolling Robot Actuated by Orthogonal Internal Rotors,” Regular and Chaotic Dynamics, vol.18, no.1-2, pp126–143, 2013.

[41] M. Vendittelli, G. Oriolo, F. Jean, and J.-P. Laumond, “Nonhomogeneous nilpotent approximations for nonholonomic systems with singularities,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol.49, no.2, pp261–266, 2004.

[42] A. Bellaiche, “The Tangent Space in Sub-Riemannian Geometry,” Journal of Mathematical Science, vol.83, no.4, pp461–476, 1997.

[43] H. Hermes, “On the Synthesis of a Stabilizing Feedback Control via Lie Algebraic Methods,” Journal of Control and Optimization, vol.18, no.4, pp352–361, 1980.

[44] M. K. Bennani and P. Rouchon, “Robust Stabilization of Flat and Chained Systems,” Proc. of the third European Control Conference, pp2642–2646, 1995.

[45] P. Lucibello, G. Oriolo, “Robust stabilization via iterative state steering with an application to chained-form systems,” Automatica, vol.37, issue.1, pp71–79, 2001.

[46] F. Jean, G. Oriolo, and M. Vendittelli, “A global convergent steering algorithm for regular nonholonomic systems,” Proc. of IEEE Int. Conference on Decision and Control, pp7514–7519, 2005.

[47] Y. Chitour, F. Jean, and R. Long, “A global steering method for nonholonomic systems,” Journal of Differential Equations, vol. 254, issue.4, pp1903–1956, 2013.

[48] G. Lafferriere and H. Sussmann, “A differential geometric approach to motion planning,” Kluwer, Nonholonomic Motion Planning, pp235–270, 1993.

[49] E. Sachkova, “Solution of a control problem for a nilpotent system,” Differential Equations, vol.44, no.12, pp1768–1772, 2008.

[50] 森田 龍, “2 軸ロータ駆動による球型転がりロボットの軌道計画,” 九州大学, 修士論文, 2014.

[51] V. Muralidharan and A. D. Muahindrakar, “Geometric Controllability and Stabilization of Spherical Robot Dynamics,” IEEE Transaction on Automatic Control, vol.60, no.10, pp2762–2767, 2015.

[52] R. Mukherjee, M. A. Minor and J. T. Pukrushpan, “Motion Planning for a Spherical Mobile Robot; Revisiting the Classical Ball-Plate Problem,” Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transaction of the ASME, vol.124, no.4, pp502–511, 2002.

[53] 浦久保 孝光, 前川 聡, 上田 哲也, 玉置 久, “球体ロボットの接地点軌跡を利用した最適軌道計画,” 計測自動制御学会論文集, vol.46, no.10, pp623–631, 2010.

[54] R. Balasubramanian, A. Rizzi, and M. Mason, “Legless locomotion: A novel locomotion technique for legged robots,” The International Journal of Robotics Research, vol.27, no.5, pp575–594, 2008.

[55] S. Monaco and D. N-Cyrot,“An Introduction to Motion Planning Using Multirate Digital Control,” Proc. of IEEE Conference on Decision and Control, pp1780–1785, 1992.

[56] D. Wang and C. B. Low, “Modeling and Analysis of Skidding and Slipping in Wheeled Mobile Robots: Control Design Perspective,” IEEE Transaction on Robotics, vol. 24, no. 3, pp676–687, 2008.

[57] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki and T. Noguchi, “A Stable Tracking Control Method for and Autonomous Mobile Robot,” Proc. of IEEE International conference on Robotics and Automation, pp384–389, 1990.

[58] H. B. Pacejka, “Tyre and Vehicle Dynamics,” ISBN : 978-0-7506-6918-4, 2006.

[59] E. Velenis, P. Tsiotras and C. Canudas de Wit, “Extension of the LuGre dynamic tire friction model to 2D motion,” Proc. of 10th Mediterranean Conf. Control Autom, 2002.

[60] E. Ono, S. Hosoe, and H. D. Tuan,“ Bifurcation in vehicle dynamics and robust front wheel steering control,” IEEE Transactions on Control System Technology, vol.6, no.3, pp412–420, 1998.

[61] J. Ackermann, “Robust Control Prevents Car Skidding,” Browse Journals and Magazines, vol. 17, issue. 3, pp23–31, 1997.

[62] E. Velenis, “FWD Vehicle Drifting Control: The Handbrake-Cornering Technique,” Proc. of IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, pp3258–3263, 2011.

[63] J. Zico Kolter, Christian Plagemann, David T. Jackson, and Y. Ng, Sebastian Thrun, “A Probablistic Approrach to Mixed Open-loop and Closed-loop Control, with Application to Extreme Autonomous Driving,” Proc. IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, pp 893–845, 2010.

[64] A. Morinaga, M. Svinin and M. Yamamoto, “Motion Planning of Drifting Vehicle with Friction Model Considering Nonholonomic Constraint,” Proc. of IEEE Conference on Robotics and Automation, pp650–655, 2015.

[65] J. Y. Wong, “Theory of Ground Vehicles,” 3rd edition. John Wiley and Sons, New York 2001.

[66] S, Wei, M. Zefran, K. Uthaichana, M. Zefran and R. DeCarlo, “Hybrid Model Predictive Control for Stabilization of Wheeled Mobile Robots Subject to Wheel Slippage,” Proc. of IEEE Conference on Robotics and Automation, pp2373–2378, 2007.

[67] S, Wei, K. Uthaichana, M. Zefran and R. DeCarlo, “Hybrid Model Predictive Control for the Stabilization of Wheeled Mobile Robots Subject to Wheel Slippage,” IEEE Transaction on Control System Technology, vol.21, no.6, pp2181–2193, 2013.

[68] F. Matsuo and K. Saito, “Control of a Nonholonomic System with a Drift Term,” Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp2952–2957, 2000.

[69] K. Berntorp, B. Olofsson, K. Lundahl and L. Nielsen, “Models and Methodology for Optimal Trajectory Generation in Safety-Critical Road-Vehicle Maneuvers,” Vehicle System Dynamics, vol.52, issue.10, pp1304–1332, 2014.

[70] A. Rucco, G. Notarstefano and J. Hauser, “Computing minimum lap-time trajectories for a single-track car with load transfer,” Proc. of IEEE Conference on Decision and Control, pp6321–6326, 2012.