

## 自励振動に対する動吸振器の動作原理の解明と最適設計法の開発

谷口, 智之

<https://doi.org/10.15017/1654874>

---

出版情報：九州大学, 2015, 博士（工学）, 課程博士  
バージョン：  
権利関係：全文ファイル公表済

**自励振動に対する動吸振器の動作原理の解明と  
最適設計法の開発**

**2016年1月**

**九州大学大学院 工学府 機械工学専攻**

**谷口 智之**

# 目次

<b>第1章 序論</b>	<b>1</b>
1.1 自励振動現象	1
1.2 動吸振器を用いた制振法	3
1.3 動吸振器の動作原理解明について	5
1.4 モード解析の適用	6
1.5 本研究の目的	7
1.6 本論文の構成	8
<b>第2章 新型複素モード解析法</b>	<b>10</b>
2.1 線形自励振動系の一般的な運動方程式	10
2.2 実モード解析法	10
2.3 複素モード解析法	11
2.4 新型複素モード解析法	12
2.5 2章のまとめ	14
<b>第3章 係数励振系に対する動吸振器に関する検討</b>	<b>15</b>
3.1 解析モデルおよび基礎式	15
3.2 新型複素モード解析に基づくモード方程式の導出	17
3.3 近似安定判別法	18
3.3.1 主共振領域に対するモード別近似安定判別法	18
3.3.2 結合共振領域に対する近似安定判別法	19
3.4 実モード解析に基づく近似安定判別法	21
3.5 数値的計算法	22
3.6 数値的検証	23
3.6.1 Model A の数値計算結果	23
3.6.2 Model B の数値計算結果	25
3.7 動吸振器の動作原理に関する検討	27
3.7.1 主共振領域に対する動吸振器の動作原理のエネルギー的検討	27
3.7.2 結合共振領域に対する動吸振器の動作原理のエネルギー的検討	29
3.7.3 エネルギーに関する数値計算例	31
3.8 動吸振器の最適設計法	33
3.9 3章のまとめ	35
<b>第4章 負性抵抗系に対する動吸振器に関する検討</b>	<b>37</b>
4.1 解析モデルおよび基礎式	37
4.2 新型複素モード解析に基づくモード方程式の導出	38

4.3	モード別近似安定判別法	39
4.4	実モード解析に基づくモード別近似安定判別法	40
4.5	数値的検証	41
4.6	動吸振器の動作原理に関する検討	44
4.6.1	動吸振器の動作原理のエネルギー的検討	44
4.6.2	エネルギーに関する数値計算例	46
4.7	動吸振器の最適設計法	47
4.8	4章のまとめ	48
<b>第5章</b>	<b>非対称行列系に対する動吸振器に関する検討</b>	<b>50</b>
5.1	解析モデルおよび基礎式	50
5.2	新型複素モード解析に基づくモード方程式の導出	52
5.3	近似安定判別法	52
5.4	実モード解析に基づく近似安定判別法	54
5.5	数値的検証	54
5.6	動吸振器の動作原理に関する検討	58
5.6.1	非対称行列系の不安定化メカニズム	58
5.6.2	動吸振器の動作原理のエネルギー的検討	59
5.6.3	エネルギーに関する数値計算例	63
5.7	動吸振器の最適設計法	65
5.8	他モードの影響	66
5.9	5章のまとめ	69
<b>第6章</b>	<b>自励振動に対する動吸振器の動作原理について</b>	<b>71</b>
<b>第7章</b>	<b>結論</b>	<b>74</b>
	<b>謝辞</b>	<b>77</b>
<b>付録 A1</b>	<b>係数励振系に関する補足</b>	<b>78</b>
A1.1	式 (3.15) の導出	78
A1.2	励振エネルギーの分散化 [式 (3.34)] の導出	79
A1.3	式 (3.38) の導出	80
<b>付録 A2</b>	<b>負性抵抗系に関する補足</b>	<b>82</b>
A2.1	励振エネルギーの分散化 [式 (4.18)] の導出	82
<b>付録 A3</b>	<b>非対称行列系に関する補足</b>	<b>83</b>
A3.1	非対称行列系に対するモード分離について	83

A3.1.1	摩擦力が作用しない安定系に基づくモード方程式の導出	83
A3.1.2	近似安定判別法	84
A3.1.3	数値計算例	85
A3.2	式 (5.20) の導出	86
A3.3	式 (5.24) の導出	87
A3.4	式 (5.27) の導出	88

<b>参考文献</b>	<b>89</b>
-------------	-----------

# 第1章 序論

## 1.1 自励振動現象

自励振動とは、系に内在する何らかのエネルギー変換機構が、非振動的なエネルギーを振動的なエネルギーに持続的に変換することによって発生・成長する振動の総称である<sup>(1)</sup>。この自励振動の有名な事例の一つに、タコマ・ナロウズ橋の崩落事故がある。アメリカ西部海岸のタコマにある橋が、1940年11月7日に秒速約19メートルの風速の下、上下に揺れ始め、最終的にはねじれ振動を生じて崩落に至った例である<sup>(2)</sup>。この他にも、ファン・デル・ポール型自励振動子<sup>(3)</sup>で表される電気回路内の発振現象やレイケ管<sup>(4)</sup>に代表される熱音響自励振動などがあり、我々の身の回りの至る所において自励振動現象が観測される。

このような自励振動が発生するためには、外乱によって不可避免的に発生する自由振動が、系に内在する何らかの要素によって励振エネルギーを生成するというエネルギー変換機構が形成される必要がある<sup>(5)</sup>。これが自励振動の基本的な発生メカニズムであるが、いったんエネルギー変換機構が形成されると、非常に大きな振動に成長することが多く、機械システムにとっては極めて有害である。逆に、エネルギー変換機構が形成されなければ、励振エネルギーは生成されず、自励振動は発生しない。つまり、自励振動を防止するためには、エネルギー変換機構の特性を明らかにし、それに応じた対策が必要となる。

工学的には、自励振動が発生するか否かの判別が重要な課題となる。そのため、エネルギー変換機構の特性を把握するには、平衡点近傍における微小振動が成長するか否かの安定性について考察すれば十分であることが多い。つまり、系が非線形性を有する場合には、平衡点近傍で線形化した近似線形系の運動方程式の特性を明らかにすればよいといえる。現在のところ、線形系における自励振動の発生メカニズムは、運動方程式の数学的な性質に即して分類すると、負性抵抗、係数励振、時間遅れ、非対称行列の4種類に大別される<sup>(5)</sup>。以下ではそれらの研究例について整理する。

まず、1つ目の負性抵抗に起因する自励振動は、流体力や摩擦力などの影響で運動方程式中の減衰係数が負となることにより発生する不安定振動であり、このような系を負性抵抗系と呼ぶ。例えば、流体力に起因する事例として、寒冷地域などの一様風速中の送電線に氷結が生じ、断面形状が変化することで発生するギャロッピング現象<sup>(6), (7)</sup>がある。一般的に一様流速中にある構造物には抗力および揚力が作用するが、これらの流体力は流速および断面形状により定まる流体力係数によって表すことができる<sup>(7)</sup>。流体力係数は迎角に依存し、平衡点近傍における流体力係数の勾配が負の特性を示すときに自励振動が発生しうる。送電線の例では、ケーブルの円形断面形状が氷結により負性抵抗を有する断面形状に変化することで発生する。この他、貯水槽などに設置されたポンプを含む管路系において、流量と揚程との間に負の勾配を有する関係がある場合には、流量および圧力が振動的になるサージ現象<sup>(8), (9), (10)</sup>が発生することがある。摩擦力に起因する負性抵抗系の研究例については、高野<sup>(11)</sup>や岡村ら<sup>(12)</sup>は、一定の速さで走行しているベルトの上を質点が摩擦力を受けながら運動するモデルを取り扱い、摩擦特性が自励振動に与える影響について考察している。末岡らは自転車用ディスクブレーキで

生じる鳴きおよびビビリ振動について実験と解析の両面から検討を行い、鳴きの振動が乾性摩擦の負性抵抗特性に起因する自励振動であることを示している<sup>(13)</sup>。

2つ目の自励振動の発生メカニズムとして係数励振がある。係数励振とは、機械システムの質量や減衰、剛性係数が時間に関して周期的に変動することにより発生する不安定振動のことであり、このような系を係数励振系と呼ぶ。係数励振系では、係数励振の振動数が自由振動系の固有振動数の2倍近傍にあるときに非常に大きな振幅を伴う極めて危険な振動が発生しうる<sup>(5)</sup>。この不安定振動を係数励振系の主共振と呼ぶ。係数励振の身近な例には、ブランコの励振がある<sup>(1)</sup>。ブランコに乗っている人の重心が上下に変動することにより、ブランコが前後に振動する現象であるが、この系の線形の運動方程式は、剛性係数が周期関数となるマシュー方程式<sup>(14)</sup>と呼ばれる方程式に一致する。マシュー方程式は係数励振系の代表的な方程式であり、係数励振系の多くの事例はこの方程式に集約される。機械システムにおいて問題となる係数励振系の例として、船用ディーゼルエンジンなどに用いられるチェーンの振動が確認されている<sup>(15)</sup>。スプロケットとチェーンのかみ合いやトルク変動などが原因でチェーンに張力変動が生じ、剛性行列が時間に関する周期関数となることが知られている。末岡らは、垂直に張られたローラチェーンに張力変動が作用するモデルに対して、実験と解析の両面からその振動特性について検討している<sup>(16)</sup>。また、鉄道車両の架線パンタグラフ系においても係数励振が発生することが知られている<sup>(17)</sup>、<sup>(18)</sup>、<sup>(19)</sup>、<sup>(20)</sup>。架線の支持点付近と中央付近での鉛直方向の反力が異なるため、鉄道車両の移動に伴い剛性行列は時間的に変動し、そのパンタグラフ系の運動方程式はマシュー方程式として表せることが確認されている。その他、多くの機械の動力伝達装置として使用される歯車系においても係数励振が発生しうる。これは、歯車の歯のかみ合い数が増減することによる剛性係数の時間変動が原因である。Ghoshらは、多自由度の平歯車系で発生する係数励振について解析的に検討している<sup>(21)</sup>。また、多自由度の係数励振系では、係数励振の振動数が2つの固有振動数の平均値近傍にある場合に、それら2つのモードの連成により不安定振動が発生しうる<sup>(22)</sup>。これは結合共振と呼ばれる。

3つ目の自励振動の発生原因として時間遅れがある。系に内在する何らかの時間遅れ要素によって不安定振動が発生することがあり、そのような系を時間遅れ系と呼ぶ。その具体例として工作機械の再生びびりがある<sup>(5)</sup>、<sup>(23)</sup>。これは、切削などの機械加工において加工面に残った振動痕が時間遅れを伴って次の切削時に影響を与えることで生じる自励振動である。このような現象は、自動車タイヤの多角形摩耗現象<sup>(24)</sup>や抄紙機のゴムロール<sup>(25)</sup>、製鉄機械の圧延ロール<sup>(26)</sup>や円筒研削などの回転体<sup>(27)</sup>においても発生し、接触面に周期的な変形パターンがしばしば生じる。時間遅れ系の自励振動は、接触部の粘弾性変形や塑性変形、切削量などの物理量が時間遅れを伴って系にフィードバックされることにより発生する。また、制御分野においても、フィードバック制御系の無駄時間に起因する発振現象が確認される<sup>(5)</sup>。

以上の3つの自励振動は、多自由度系においても1自由度系の場合と同様のメカニズムによって自励振動が発生する。一方、2自由度以上の多自由度系でのみ発生する自励振動として非対称行列に起因する自励振動がある。これは、主に摩擦力や流体力の影響によって多自由度系の質量、減衰および剛性行列が実対称正定行列ではなく非対称行列となることで発生する不安定振動であり、このような系を非対称行列系と呼ぶ。その例として、自動車用ディスクブレーキの鳴きが挙げられる<sup>(28)</sup>、<sup>(29)</sup>。これは、クーロン摩擦の影響によって減衰行列および剛

性行列が非対称性を有することにより発生する不安定振動であることが確認されている。他にもすべり軸受を有する回転体の自励振動がある<sup>(30), (31), (32)</sup>。軸受けの潤滑油の油圧に基づく反力の影響によって減衰および剛性行列に非対称性が生じ、短時間で非常に大きな振幅に成長する不安定振動が発生する。回転軸が非対称な回転体<sup>(33)</sup>や内部減衰を有する回転体<sup>(34)</sup>なども非対称行列系となることが知られている。また、高速飛行する航空機などでは、翼の曲げとねじりが連成した非常に大きな振動が発生するフラッタ現象<sup>(7)</sup>が観測されており、このような自励振動は航空機の大事故につながりかねない。この現象は負性抵抗系で見られるギャロッピングによる不安定振動とは発生メカニズムが異なり、流体力によって減衰および剛性行列が非対称行列となることが原因である。高速走行時の鉄道車両においては、車輪とレール間のクリープ力が原因で発生する蛇行動が確認されている<sup>(35)</sup>。蛇行動が発生するとレールの損傷や脱線の危険が生じる。他にも、磁気ダンパによる回転体の不安定振動などが非対称行列系の例として挙げられる<sup>(6)</sup>。

以上が線形形で発生する自励振動の4種類の発生メカニズムである。この他にも非線形性が本質的な原因で発生する自励振動があるが、ここでは簡単な紹介に留める。例えば、摩擦力の不連続性に基づくスティック・スリップ振動<sup>(36)</sup>がある。これは、最大静止摩擦力と動摩擦力が作用する状態が切り替わることで発生する非線形自励振動である。この他、ばね振り子のようなオートパラメトリック系<sup>(37)</sup>が挙げられる。

本研究では、上記で述べた非線形性が原因で発生する自励振動は特別な事例であるとし、線形形で発生する自励振動のみを取り扱う。

## 1.2 動吸振器を用いた制振法

動吸振器とは小さな質量をばねと減衰を介して本体に取り付けることで本体の制振を図る受動型の制振装置のことである。動吸振器は、古くは1883年にWattおよび1909年にFrahmによって船体の振動低減のために用いられたと報告されている<sup>(38), (39)</sup>。その一方、動吸振器の数学的な取り扱いについては、OrmondroydとDen Hartogによってその基礎理論が確立した<sup>(40)</sup>。動吸振器の設計法については、Den Hartogは主系に減衰がない場合の動吸振器について<sup>(6)</sup>、RandallとPennestriは主系に減衰がある場合の動吸振器についてその最適設計法を提案している<sup>(41), (42)</sup>。このような受動型の制振器機である動吸振器の他に、制御および駆動装置を用いてより効果的な制振を図る能動型の動吸振器や、受動型の動吸振器のばねや減衰を可変にすることで振動低減を図るセミアクティブ型の動吸振器も存在するが<sup>(1)</sup>、本研究では受動型の動吸振器のみを取り扱う。

これまでに、動吸振器は主に強制振動系に対して用いられてきた。その一方で、既述の4種類の自励振動系に対しても動吸振器を適用し、自励振動の抑制を図る研究が行われている。以下では受動型の動吸振器による自励振動の抑制効果について研究した例を挙げる。

まず、負性抵抗系に対する動吸振器については、MansourやTondlはギャロッピングが発生する送電線に対して動吸振器を取り付けた最も基本的な2自由度系のモデルを対象に、その制振効果を解析的に検討している<sup>(43), (44)</sup>。また、RowbottomはTondlのモデル<sup>(44)</sup>に対してモード減衰の最大化が動吸振器の最適化の指標になり得ることを示している<sup>(45), (46)</sup>。Abdel-rohmanは片持ち梁のギャロッピングに対する動吸振器の制振効果を確認し<sup>(47)</sup>、ModiとSetoはギャロ



ッピングに対するスロッシングダンパーの有効性について実験と解析の両面から検証している<sup>(48)</sup>。また、中江らは、ギャロッピングに対する動吸振器の制振効果を簡易的な実験装置に基づく実験結果から確認しており、最も基礎的なレイリーの式を用いて解析的な検討を行っている<sup>(49)</sup>。五藤らはギャロッピングが発生する送電線に動吸振器を取り付けたモデルに対して、動吸振器の取り付け位置の影響について数値的に検討している<sup>(50)</sup>。

次に、係数励振系に対する動吸振器についても同様に制振効果が確認されている。例えば、Yabunoらは軸方向に加振される梁の先端に動吸振器とみなし得る振り子を付加することによって、係数励振に起因する自励振動が抑制可能であることを確認している<sup>(51)</sup>。また、三船は架線パンタグラフ系におけるダイナミックダンパの効果について、2自由度解析モデルを対象とした検討を行い、動吸振器によって不安定領域が分割すること、および減衰要素によって安定化するという動吸振器の効果について確認している<sup>(52)</sup>。古厩らはレシプロコンプレッサのピストンロッドで発生し得る係数励振に対する動吸振器について検討している<sup>(53)</sup>。レシプロコンプレッサはクランクの回転によりピストンロッドの曲げ剛性が周期的に変動する係数励振系として考えることができ、ピストンにばね質点型の動吸振器を付加した解析モデルに対して、具体的な数値計算結果からその有効性と最適値について検討している。この他、線形系の自励振動ではないが、超電導磁気浮上系では、電磁力の持つ非線形性によりオートパラメトリック励振が発生することが確認されている。高櫻らは、その磁気浮上系に対して線形の振り子型の動吸振器を取り付けることで、不安定振動の発生を防止することが可能であることを確認している<sup>(54)</sup>。宗らや岩田ら、および趙らや Warminskiらはオートパラメトリック励振を利用した動吸振器について検討し、その有効性を確認している<sup>(55), (56), (57), (58)</sup>。

時間遅れ系に対する動吸振器については、例えば、近藤らは接触回転系のパターン形成現象に対して動吸振器を適用し、解析モデルを対象に動吸振器が時間遅れ系の安定性に与える影響について詳しく検討している<sup>(59)</sup>。宗和らは、解析と実験の両面から動吸振器によるパターン形成現象の防止効果を確認している<sup>(60), (61)</sup>。また、ロールの段数が増加した多自由度系に対しては複数の動吸振器を設置することで、時間遅れ系の自励振動が抑制可能であることを確認している<sup>(62)</sup>。松崎らは製鉄機械のワークロールに発生する多角形摩耗について、動吸振器による防止対策および2自由度系に対する動吸振器の最適なパラメータについて検討しており、解析と実験の両面からその有効性を検証している<sup>(63), (64)</sup>。中野らは、エンドミル加工時において発生する再生びびり振動に対して動吸振器の効果を検討し<sup>(65)</sup>、解析と切削実験結果からその有効性を検証している<sup>(66)</sup>。さらに、多重動吸振器を用いることで、エンドミル加工時の強制びびりと再生びびりの振動抑制効果を確認している<sup>(67)</sup>。平面切削に対しても同様に動吸振器による抑制効果が中野らによって確認されている<sup>(68)</sup>。

また、多自由度系でのみ発生する非対称行列に起因する自励振動に対しても動吸振器による制振効果が確認されている。具体例として、末岡らは自動車用ディスクブレーキの低周波鳴きに対して動吸振器を適用し、その防止対策としての有効性を確認している<sup>(69)</sup>。また、航空機のフラッタ現象に対しては、川島らが曲げとねじりの連成振動が生じる2次元翼の弾性軸に回転振動する動吸振器を取り付けた3自由度解析モデルを取扱い、動吸振器によるフラッタ防止効果およびその最適設計法について検討している<sup>(70)</sup>。吊り橋の連成フラッタに対しては、岡田らが動吸振器の適用を試みている<sup>(71)</sup>。橋桁内部に半円弧の軌道上を台車が走行するタイプ

の動吸振器を設置するモデルであるが、これは力学的に振り子型動吸振器と等価であるとみなすことができる。橋梁のたわみとねじれの連成により発生するフラッタ現象を対象として動吸振器の効果を解析的に検証し、簡易的な実験装置に基づく検討結果からフラッタが発生する限界流速を増大する効果が確認されている。さらに、振り子型動吸振器の最適なパラメータおよび多重振り子型動吸振器についても検討している<sup>(72)</sup>。ばね質点型の動吸振器についても同様に、Pourzeynali らが吊り橋のフラッタモデルに対して適用し、数値的にその有効性を確認している<sup>(73)</sup>。鉄道車両の蛇行動に対しては、受動型の動吸振器ではないがジャイロダンパによる制振効果が確認されている<sup>(74)</sup>。

これらの事例に共通して確認されることは、適切に設計された動吸振器を付加することによって系が完全に安定化され、主系だけでなく動吸振器自体も振動しなくなるということである。その一方で、係数励振系、負性抵抗系、時間遅れ系に対しては、系の安定化に減衰を必要とするが、非対称行列系に対しては、不減衰の動吸振器によって系の安定化が実現されるなど動吸振器が安定性に及ぼす影響に違いがある。

### 1.3 動吸振器の動作原理解明について

既述の通り、自励振動に対する動吸振器の制振効果やその影響についてはこれまでに多くの研究がなされており、動吸振器が自励振動に対しても受動型の制振器機として非常に有効であることが確認されている。しかしながら、動吸振器の動作原理についてはほとんど考察されておらず、自励振動が動吸振器によって安定化するメカニズムの解明には至っていない。これは学術上の大きな問題点である。また、動吸振器の最適設計法についても十分な検討は行われていない。

強制振動系に対する動吸振器の場合には、主系に作用する励振力を打ち消すように動吸振器が振動することで本体の制振を図る。一方、自励振動に対する動吸振器は、系が完全に安定化された場合、主系だけでなく動吸振器自体も振動しなくなるため、強制振動系に対する動吸振器とは動作原理が大きく異なる。このような特徴は、1.2 節で述べた 4 種類の自励振動系に対する動吸振器の先行研究からも確認されており、動吸振器によって自励振動が安定化するメカニズムは自励振動全般に共通する可能性があると考えられる。

一般的に自励振動は、エネルギー変換機構によって生成される励振エネルギー量が減衰要素によって消費される散逸エネルギー量よりも大きい場合に発生し、成長すると考えられる。励振エネルギーが散逸エネルギーよりも大きいときには振動は時間経過とともに成長し続け、逆に励振エネルギーが散逸エネルギーよりも小さい場合には振動は減衰する。したがって、動吸振器が励振エネルギーおよび散逸エネルギーに及ぼす影響を詳細に検討すれば、自励振動が動吸振器によって安定化するメカニズムを解明できる可能性が高い。その一方で、動吸振器を主系に取り付けると全系は必然的に多自由度系となるため、動吸振器の動作原理の解明にはモード別の検討が必要である。

以上のことから、本研究では、動吸振器の動作原理を解明するため、モード別の励振エネルギーおよび散逸エネルギーに及ぼす動吸振器の影響について検討するが、そのためにはエネルギー的な検討に適したモード解析法の開発が課題であるといえる。

## 1.4 モード解析の適用

線形の多自由度系に対する従来のモード解析には実モード解析と複素モード解析の大きく2つがある<sup>(75)</sup>。実モード解析は不減衰自由振動系の質量行列と剛性行列の一般固有値問題から導出される実固有値および実固有モードを用いて、物理座標および元の運動方程式をそれぞれ実モード座標および実モード方程式に変換する手法である。実モード解析によれば、質量および剛性行列は対角化されるものの、比例減衰のような特別な場合を除き一般的には減衰行列は対角化されない。以下では、この実モード解析を自励振動系に対して適用した解析例をいくつか紹介する。

負性抵抗系にモード解析を適用した例として、松宮らはギャロッピングが発生する送電線のモデルに実モード解析を適用している。無風時の実固有モードに基づくモード別の運動方程式から近似的な特性根を求め、モード別の安定判別法を提案している<sup>(76)</sup>。ここでは、減衰行列を比例減衰で近似する方法およびモード減衰をモード別に任意に定める方法について検討している。

係数励振系に対するモード解析法の適用例として、Dohnal は係数励振を利用した自励振動の振動抑制法を提案する過程において、実モード解析に基づくモード別の近似解を導出しており、比例減衰系の場合にはそのような取り扱いが有効であることを確認している<sup>(77)</sup>。Mailybaev らは、剛性行列が周期関数となる係数励振系に対して実モード解析を適用し、安定判別法を定式化している<sup>(78)</sup>。具体的に、軸方向に加振された2自由度連結振り子の係数励振系に対して適用し、減衰が小さい場合にはその有効性を確認している。また、Lin らや吉武らは、歯車軸系の係数励振に対して実モード解析に基づく安定判別法を提案しており、Lin らは比例減衰系に対して、吉武らは減衰比が小さい場合に対してその有効性を確認している<sup>(79)</sup>、<sup>(80)</sup>。

時間遅れ系に対しては、松崎らが製鉄機械のホットレベラにおけるパターン形成現象に対して実モード解析法を適用した例がある<sup>(81)</sup>。モード別の近似解と数値計算による厳密解との比較からその精度を検証している。さらに、近藤らは、抄紙機の多段スーパーカレンダールールなどで見られる接触回転系で生じるパターン形成現象を対象に、実モード解析に基づく簡易安定判別法および簡易設計法を提案している<sup>(82)</sup>。減衰および時間遅れ項を除いた不減衰自由振動系から導出される実モードを用いてモード別の運動方程式を導出し、簡易的に安定判別を行う手法である。また、この手法を動吸振器の設計に用いることで効率的な最適設計法を開発している。

非対称行列系に対しては、系全体に対して複素固有値解析を適用する例が多いが、Mailybaev らは非対称軸の回転体の不安定振動に対して対称軸系の固有モードに基づく検討を行っている<sup>(33)</sup>。これは、軸対称のロータ系に対して実回転変換行列によりジャイロ項を除く質量および剛性行列を対角化した方程式を導出し、その後、複素固有値解析を適用する方法である。非対称回転軸系の非対称性を微小と仮定した近似的な安定判別法を提案している。

以上、自励振動系に対して実モード解析を適用した解析例について述べたが、減衰行列の取り扱いについては特別な場合を除き、モード間の連成を無視するか、比例減衰系を用いるといった近似が必要となる。しかしながら、動吸振器を付加した系や実際の系では比例減衰の仮定が成立しないことが多く、その場合には実モード解析では減衰行列は対角化されないため、減衰の影響をモード別に高精度で評価することはできない。

この問題に対する対策として減衰行列をも同時に対角化できる複素モード解析の適用が考えられる。従来の複素モード解析は、減衰自由振動系から誘導される一般固有値問題の複素固有値および複素固有ベクトルを用いて、物理座標および元の運動方程式をそれぞれ複素モード座標および複素数のモード方程式に変換する解析法である。この手法によれば、質量、減衰および剛性行列を対角化することが可能となる。しかしながら、導出されるモード方程式は1階の複素常微分方程式となるため、物理的な見通しが悪く、本研究のエネルギー的な検討には不向きである。そのため、エネルギー的な取扱いには実モード解析の場合と同様に、モード方程式が2階の実常微分方程式となることが望ましい。この点について、藤川らは、得られた1階の複素常微分方程式を再び微分することによって2階の複素常微分方程式に変換する方法を提案しているが<sup>(83)</sup>、変換手続きがやや技巧的である上にモード座標および外力項が複素数となるなど、自励振動系や非線形系に適用するには少々面倒な取り扱いが必要である。

## 1.5 本研究の目的

本研究の目的は、自励振動に対する動吸振器の動作原理を統一的に解明し、効率的な動吸振器の最適設計法を開発することである。上記のとおり、線形系で発生する自励振動に対する動吸振器の有効性は多くの研究において確認されており、系が安定化されれば主系だけでなく動吸振器自体も振動しなくなるなど、受動型の制振器機として非常に大きな可能性を有している。動吸振器の動作原理が解明されれば、その学術的な意義は高く、動作原理に基づく効率的な最適設計法が開発されれば、実用的な価値も高い。また、受動型の制振器機としての動吸振器の新たな可能性が理論的に切り開かれるものと考えられる。

動作原理の統一的な解明のため、様々なタイプのエネルギー変換機構によって生成される励振エネルギーと減衰要素で消費される散逸エネルギーをモード別に高精度で評価し、動吸振器がエネルギーに及ぼす影響を検討する。また、これらの動作原理に関する検討結果から効率的な最適設計法の開発も可能になる。そこで、本研究では上記の研究目的に従い、次の3つの課題について取り組む。

- (1) 一般的な線形自励振動系の運動方程式に対して質量、減衰および剛性行列を同時に対角化した上で、モード方程式を2階の実常微分方程式として導出する新しいタイプのモード解析法を開発する。
- (2) モード別にエネルギーを導出するため、時間遅れ系を除く3種類の自励振動系に対して(1)のモード解析法を用いたモード別の安定判別法を開発する。これにより、動吸振器が励振エネルギーおよび散逸エネルギーに及ぼす影響を詳しく検討し、動吸振器の動作原理をエネルギー的な観点から解明する。
- (3) 上記(2)の動吸振器の動作原理に関する検討結果を踏まえ、動吸振器の効率的な最適設計法を開発する。

このうち、(1)の課題については、従来の複素モード解析を参考にしつつ、質量、減衰および剛性行列を同時に対角化できる実相似変換行列を見出す。この行列により物理座標を実モード座標に変換すれば、減衰自由振動系の運動方程式が完全にモード分離され、モード方程式を2階の実常微分方程式として導出することが可能になる。本研究では、このモード解析法を新型複素モード解析法と呼ぶ。また、この手法は藤川らの手法をよりシステムティックに拡張したも

のとみなすこともできるが、実モード解析との関連をも考慮した新しい相似変換を見出す点に特長があり、その汎用性と取り扱いの利便性は格段に向上する。

上記(2)の課題については、本研究では係数励振系、負性抵抗系および非対称行列系の3種類の自励振動系に対して検討を行う。まず、自励振動系に動吸振器を取り付けた基本的かつ本質的な解析モデルを構築する。係数励振系では、ばね質点型の動吸振器および振り子型の動吸振器を1自由度係数励振系に取り付けたタイプの異なる2種類の2自由度解析モデルを定式化し、負性抵抗系ではギャロッピングが発生する系に動吸振器を取り付けた2自由度解析モデルを、非対称行列系ではディスクブレーキの鳴きのモデルを参考にした3自由度解析モデルをそれぞれ取り扱う。動吸振器が系の不安定化および安定化に及ぼす影響を明確に分けて検討するため、物理座標の運動方程式を不安定化の要因となる励振項とそれ以外の安定な系とに分離する。モード別の高精度なエネルギーを導出するため、安定系の固有モードに基づいた上記(1)の新型複素モード解析を適用し、モード別の近似安定判別法を定式化する。この近似安定判別法の精度についてはそれぞれ具体的なモデルを対象とした数値計算結果から検証する。この近似安定判別法を用いて、モード別の励振エネルギーおよび散逸エネルギーを導出し、それぞれに対して動吸振器が及ぼす影響を詳しく検討する。これらの結果から、3種類の自励振動系に共通する動作原理と相違点について考察する。

上記(3)の課題に対しては、上記(2)の動吸振器の動作原理に関する検討結果を踏まえ、3種類の自励振動系に対して動吸振器の最適値を探索する具体的な最適設計手順を示し、数値計算結果からその有効性を検証する。

## 1.6 本論文の構成

本論文は次の7つの章から構成される。

第1章では、自励振動に関する基礎的事項を整理するとともに、自励振動に対する動吸振器を取り扱った先行研究についてまとめた。また、動吸振器の動作原理を解明する上での課題点および本研究の目的を示した。

第2章では、線形自励振動系の一般的な運動方程式を対象に新型複素モード解析法を提案する。まず、従来の実モード解析法および複素モード解析法によるモード方程式の導出手順とそれぞれの課題点について述べる。次に、それらを踏まえ、質量、減衰および剛性行列を同時に対角化した上で、モード方程式を2階の実常微分方程式として導出する具体的な手順を示す。

第3章では、係数励振系に対する動吸振器について検討する。振り子型の動吸振器およびばね質点型の動吸振器を取り付けたタイプの異なる2つの解析モデルを構築し、第2章で提案した新型複素モード解析法を適用する。得られるモード別の運動方程式から係数励振系で発生し得る主共振および結合共振に対する近似安定判別法を定式化し、具体的な数値計算結果からその精度を検証する。これにより、散逸エネルギーおよび励振エネルギーが高精度に導出され、動吸振器が励振エネルギーおよび散逸エネルギーに及ぼす影響をそれぞれ解析と数値計算の両面から検討し、係数励振系が動吸振器によって安定化するメカニズムを明らかにする。また、系全体の安定化とロバスト性の観点から特性指数の最小化が動吸振器の設計目標であることを述べ、動吸振器の最適な振動数比と減衰比をそれぞれ探索する最適設計手順を解析モデル別に検討する。

第4章では、第3章での検討と同様に、負性抵抗系に対する動吸振器の動作原理について検討する。ここでは、ギャロッピングが発生する1自由度負性抵抗系に対して動吸振器を取り付けた2自由度解析モデルを構築し、新型複素モード解析法を適用する。負性抵抗に基づく励振項のモード間の連成を無視したモード別の近似安定判別法を定式化し、数値的な厳密解との比較から、その精度を検証する。第3章と同様に、動吸振器が励振エネルギーおよび散逸エネルギーに及ぼす影響について検討し、負性抵抗系の安定化に果たす動吸振器の役割を明らかにする。また、動吸振器の最適設計法についても第3章と同様に検討する。

第5章では、非対称行列系に対する動吸振器の動作原理について検討する。ディスクブレイクの鳴きのモデルを参考にした基本的かつ本質的な非対称行列系の3自由度解析モデルを構築し、新型複素モード解析法を適用する。非対称行列系で発生する不安定振動を2つのモード間の連成振動で仮定した近似安定判別法を定式化し、具体的な数値計算結果からその妥当性を確認する。第3章および第4章と同様に、近似安定判別法に基づく高精度なエネルギーから、動吸振器がそれらに及ぼす影響を解析的に詳しく調べ、非対称行列系が動吸振器によって安定化するメカニズムを明らかにする。また、動吸振器の最適設計法についても検討する。

第6章では、第3章から第5章までの検討結果を整理し、3種類の自励振動系に共通する動吸振器の動作原理および相違点について検討する。

第7章では、第6章までの内容を踏まえ、本論文を総括する。

以上が本論文の本編であるが、本編の補足に関する内容を付録に示す。

付録A1では、第3章で述べる係数励振系に対して、式の導出が煩雑となるため本編では省略した導出過程を詳しく示し、不減衰系における励振エネルギーの分散化についてもその詳細を述べる。

付録A2では、第4章で述べる負性抵抗系に対して、付録A1と同様に、不減衰系における励振エネルギーの分散化について述べる。

付録A3では、第5章で述べる非対称行列系に対して、摩擦力が作用しない系の固有モードを用いたモード方程式の導出法について説明し、それに基づく近似安定判別法の精度について検討する。また、本編で省略した式の導出過程について示す。

## 第2章 新型複素モード解析法

第1章では、散逸および励振エネルギーに対して動吸振器が及ぼす影響をモード別に検討すれば、動作原理を解明できる可能性が高いことについて述べた。そのためには、質量、減衰および剛性行列を同時に対角化し、モード方程式をエネルギー的な検討に適した2階の実常微分方程式として導出するモード解析法の開発が必要となる。しかしながら、従来の実モード解析では、一般的に減衰行列は対角化されず、モード別の減衰の影響を正確に評価することはできない。これに対して減衰行列をも同時に対角化できる複素モード解析の適用が考えられるが、モード方程式が1階の複素常微分方程式となるため、物理的な見通しが悪く、エネルギー的な検討には向かない。そこで、本章では、質量および剛性行列だけでなく減衰行列をも同時に対角化した上で、モード方程式を実モード解析に対応するような2階の実常微分方程式として導出する新型複素モード解析法を開発する。

本章では、一般的な線形自励振動系の運動方程式を散逸エネルギーが生じる安定な系と励振エネルギーの生成源となる励振項とに分離し、この安定な系に基づくモード方程式を導出する。従来の複素モード解析では、物理座標の変位  $\boldsymbol{x}$  と速度  $\dot{\boldsymbol{x}}$  の状態ベクトルは複素モード行列を介して共役な複素数のモード座標  ${}^c\xi, {}^c\bar{\xi}$  に変換されるため、モード方程式が1階の複素常微分方程式となる。このことから、物理座標  $\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}$  を実相似変換行列を介して適切な実数のモード座標  $\boldsymbol{\xi}$  とその常微分  $\dot{\boldsymbol{\xi}}$  とに変換できれば、モード方程式を2階の実常微分方程式として導出できるはずである。そこで、本章では、新たな実相似変換行列を定義し、エネルギー的な検討に適したモード方程式を導出する手順について述べる。また、比較のため従来の実モード解析および複素モード解析の概要とその課題についても簡単に説明する。

### 2.1 線形自励振動系の一般的な運動方程式

$n$  自由度線形自励振動系の運動方程式を安定系と不安定化の要因となる励振項とに分離して次のように表す。

$$M\ddot{\boldsymbol{x}} + C\dot{\boldsymbol{x}} + K\boldsymbol{x} = -\varepsilon\boldsymbol{f}_s \quad (2.1)$$

$M, C, K$  は安定系の質量、減衰および剛性行列であり、本章では  $n \times n$  の実正定行列と仮定する。 $\varepsilon\boldsymbol{f}_s$  は自励振動を引き起こす励振力の  $n$  次元ベクトルを示す。式 (2.1) で  $\varepsilon = 0$  と置いた系が安定系であり、 $\varepsilon\boldsymbol{f}_s$  が不安定化の要因を表す励振項である。 $\varepsilon\boldsymbol{f}_s$  の関数形は自励振動の励振形態によって異なるが、いずれも  $\varepsilon$  は正の微小量と仮定する。以下では、この物理座標の運動方程式の安定系から求められる固有モードに基づくモード解析法について説明する。

### 2.2 実モード解析法

本節では、2.4 節で後述する新型複素モード解析法との比較のため、実モード解析法によるモード方程式の導出手順について簡単に述べる。なお、以下では、複素モード解析により得られるモーダルパラメータとの違いを表すため、実モード解析により求められるモーダルパラメ

ータは“ $\hat{\phantom{x}}$ ”で表す. まず, 式 (2.1) で  $\varepsilon=0$ ,  $\mathbf{C}=\mathbf{0}$  と置いた不減衰自由振動系から誘導される一般固有値問題  $(\mathbf{K}-\hat{\omega}^2\mathbf{M})\hat{\phi}=\mathbf{0}$  の固有値および対応する固有ベクトルは全て実数であり, それぞれ  $\hat{\omega}_p^2$  および  $\hat{\phi}_p$  ( $p=1, \dots, n$ ) と置く. ここで, 実モード行列  $\hat{\Phi}=[\hat{\phi}_1 \ \dots \ \hat{\phi}_n]$  は  $n \times n$  の行列であり, 次式を満足するように正規化されているものとする.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} &= \mathbf{I}_n \\ \hat{\Phi}^T \mathbf{K} \hat{\Phi} &= \hat{\Omega}^2 = \text{diag}[\hat{\omega}_1^2 \ \dots \ \hat{\omega}_n^2] \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

ここに,  $\mathbf{I}_n$  は  $n \times n$  の単位行列,  $\text{diag}[\dots]$  は対角行列を表す. 次に,  $\mathbf{x}=\hat{\Phi}\xi$  で定義される実モード座標  $\xi$  を導入すると, 式 (2.1) は次のようなモード方程式に変換される.

$$\ddot{\xi} + \hat{\Phi}^T \mathbf{C} \hat{\Phi} \dot{\xi} + \hat{\Omega}^2 \xi = -\varepsilon \hat{\Phi}^T \mathbf{f}_S \quad (2.3)$$

このように, 実モード解析によれば, 質量行列と剛性行列は同時に対角化されるが, 減衰行列は比例減衰系のような特別な場合を除いて一般的には対角化されず, モード別の減衰の影響を正確に評価することはできない.

### 2.3 複素モード解析法

2.2 節で述べたように, 実モード解析法では一般的に減衰行列を対角化することはできないため, モード別の減衰の影響を高精度に評価することができない. そこで, 次に, 質量および剛性行列に加え, 減衰行列をも同時に対角化できる従来の複素モード解析法について簡単に説明する. なお, 以下では, 実モード解析により得られるモーダルパラメータとの違いを表すため, 複素モード解析により求められるモーダルパラメータは“ $\tilde{\phantom{x}}$ ”で表し, 左上添え字  $C, R, I$  はそれぞれ変数が複素数およびその実部と虚部であることを示す.

複素モード解析を適用するため,  $\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}$  という自明な式と式 (2.1) を組み合わせて, 元の運動方程式を次のような1階の常微分方程式に変換する.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{B}\mathbf{y} + \varepsilon\mathbf{g} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_S \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

ここに,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  は  $2n \times 2n$  の実対称行列である. 式 (2.4) で  $\varepsilon=0$  と置いた減衰自由振動系から誘導される一般固有値問題  $(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{A})\tilde{\phi}=\mathbf{0}$  の固有値および固有ベクトルは  $n$  組の互いに共役な複素数であるものとし, 固有値を  ${}^C\lambda_p = {}^R\lambda_p + i{}^I\lambda_p$  (ただし,  ${}^R\lambda_p = -\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p \leq 0$ ,  ${}^I\lambda_p = \sqrt{1-\tilde{\zeta}_p^2}\tilde{\omega}_p \geq 0$ ,  $\tilde{\zeta}_p, \tilde{\omega}_p \geq 0$ ,  $i=\sqrt{-1}$ ,  $p=1, \dots, n$ ), 対応する固有ベクトルを  ${}^C\tilde{\phi}_p = [{}^C\phi_p^T \ {}^C\lambda_p \ {}^C\phi_p^T]^T$  ( ${}^C\phi_p = {}^R\phi_p + i{}^I\phi_p$ ) と表す. これらの複素共役も固有値および固有ベクトルとなる. 本章では,  $\tilde{\zeta}_p$  をモード減衰比,  $\tilde{\omega}_p$  を固有角振動数と呼ぶ. また, 式 (2.4) の系では,  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$  および  $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$  であるため, 右複素モード行列および左複素モード行列は等しい. そこで, 左右の複素モード行列を  ${}^C\hat{\Phi}$  と置くと, これは次のように表される.



$$\left. \begin{aligned}
{}^C\tilde{\Phi} &= \begin{bmatrix} {}^C\Phi & {}^C\bar{\Phi} \\ {}^C\Phi {}^C\Lambda & {}^C\bar{\Phi} {}^C\bar{\Lambda} \end{bmatrix} \\
{}^C\Phi &= {}^R\Phi + i {}^I\Phi = [{}^C\phi_1 \ \cdots \ {}^C\phi_n] \\
{}^R\Phi &= [{}^R\phi_1 \ \cdots \ {}^R\phi_n], \quad {}^I\Phi = [{}^I\phi_1 \ \cdots \ {}^I\phi_n] \\
{}^C\Lambda &= {}^R\Lambda + i {}^I\Lambda, \quad {}^R\Lambda = -\tilde{Z}\tilde{\Omega}, \quad {}^I\Lambda = \sqrt{I_n - \tilde{Z}^2\tilde{\Omega}} \\
\tilde{\Omega} &= \text{diag}[\tilde{\omega}_1 \ \cdots \ \tilde{\omega}_n], \quad \tilde{Z} = \text{diag}[\tilde{\zeta}_1 \ \cdots \ \tilde{\zeta}_n]
\end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ここに、 ${}^C\tilde{\Phi}$ および ${}^C\Phi$ は $2n \times 2n$ および $n \times n$ の複素行列、 ${}^R\Phi$ と ${}^I\Phi$ は $n \times n$ の実数行列であり、“ $-$ ”は複素共役を表す。ここで、複素モード行列 ${}^C\tilde{\Phi}$ は比例減衰時には実モード解析の $M$ —正規化と対応するように、次式のように正規化されているものとする。

$$\left. \begin{aligned}
{}^C\tilde{\Phi}^T A {}^C\tilde{\Phi} &= \begin{bmatrix} {}^C\Lambda {}^C\bar{\Lambda} - {}^C\Lambda^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^C\Lambda {}^C\bar{\Lambda} - {}^C\bar{\Lambda}^2 \end{bmatrix} \\
{}^C\tilde{\Phi}^T B {}^C\tilde{\Phi} &= \begin{bmatrix} {}^C\Lambda {}^C\bar{\Lambda} - {}^C\Lambda^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^C\Lambda {}^C\bar{\Lambda} - {}^C\bar{\Lambda}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^C\Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^C\bar{\Lambda} \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

比例減衰系の場合には、この正規化によって得られる ${}^C\Phi$ は式(2.2)で示す $M$ で正規化された実モード行列に一致する。

式(2.5)の複素モード行列 ${}^C\tilde{\Phi}$ に対応する複素モード座標 ${}^C\xi$ ,  ${}^C\bar{\xi}$ を次のように導入する。

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = {}^C\tilde{\Phi} \begin{bmatrix} {}^C\xi \\ {}^C\bar{\xi} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

式(2.7)を式(2.4)に代入したのち、左から ${}^C\tilde{\Phi}^T$ を乗じて、式(2.6)の関係を考慮すると、式(2.4)は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} {}^C\dot{\xi} \\ {}^C\dot{\bar{\xi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^C\Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^C\bar{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^C\xi \\ {}^C\bar{\xi} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} ({}^C\bar{\Lambda} - {}^C\Lambda)^{-1} {}^C\tilde{\Phi}^T \mathbf{f}_S \\ ({}^C\Lambda - {}^C\bar{\Lambda})^{-1} {}^C\tilde{\Phi}^T \mathbf{f}_S \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

このように、従来の複素モード解析法によれば、質量、減衰および剛性行列を同時に対角化することが可能となるが、モード方程式が1階の複素常微分方程式に変換される。なお、係数行列が非対称な系に対しても左右の複素モード行列を求めることにより、同様にモード方程式が導出される。本研究では、モード別に高精度なエネルギーを導出し、動吸振器が及ぼす影響を検討することによって動作原理の解明を試みるが、式(2.8)で表されるモード方程式は1階の常微分方程式であり、モード座標や励振項が複素数となるため、物理的な見通しが悪く、エネルギー的な検討には向かない。

## 2.4 新型複素モード解析法

2.3節で述べた従来の複素モード解析法は、質量、減衰および剛性行列を同時対角化できるものの、モード方程式が1階の複素常微分方程式となるため、エネルギー的な検討には向かな

い手法であった。そこで、本節では、質量、減衰および剛性行列を同時に対角化しつつ、モード方程式を2階の実常微分方程式に変換する新型複素モード解析法を提案する。

2.3 節で述べた複素モード解析法では、物理座標の変位  $\boldsymbol{x}$  と速度  $\dot{\boldsymbol{x}}$  は複素モード座標  ${}^c\xi, {}^c\bar{\xi}$  に変換されるため、モード方程式が1階の複素常微分方程式となる。一方、物理座標  $\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}$  を実相変換行列を介して適切な実数のモード座標  $\xi$  とその常微分  $\dot{\xi}$  とに変換できれば、モード方程式を2階の実常微分方程式として導出できるはずである。そこで、複素モード座標  ${}^c\xi, {}^c\bar{\xi}$  と実数のモード座標  $\xi, \dot{\xi}$  との関係式を導出する。実数のモード座標  $\xi$  は  $\xi = {}^c\xi + {}^c\bar{\xi}$  のように  ${}^c\xi, {}^c\bar{\xi}$  の実部として定義できる。その常微分  $\dot{\xi} = {}^c\dot{\xi} + {}^c\dot{\bar{\xi}}$  は式 (2.8) より  $\dot{\xi} = {}^c\Lambda {}^c\xi + {}^c\bar{\Lambda} {}^c\bar{\xi} - \varepsilon {}^I\Lambda^{-1} {}^I\Phi^T f_S$  と表すことができる。よって、複素モード座標  ${}^c\xi, {}^c\bar{\xi}$  と実数のモード座標  $\xi, \dot{\xi}$  との間に次のような関係が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} {}^c\xi \\ {}^c\bar{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ {}^c\Lambda & {}^c\bar{\Lambda} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ {}^I\Lambda^{-1} {}^I\Phi^T f_S \end{bmatrix} \right\} \quad (2.9)$$

式 (2.9) と式 (2.7) を考慮すると、実数のモード座標  $\xi, \dot{\xi}$  を物理座標  $\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}$  に変換する実相変換行列  ${}^R\tilde{\Phi}$  は次のように表される。

$${}^R\tilde{\Phi} = {}^c\tilde{\Phi} \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ {}^c\Lambda & {}^c\bar{\Lambda} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} {}^R\Phi - {}^I\Phi {}^I\Lambda^{-1} {}^R\Lambda & {}^I\Phi {}^I\Lambda^{-1} \\ -{}^I\Phi {}^I\Lambda^{-1} \tilde{\Omega}^2 & {}^R\Phi + {}^I\Phi {}^I\Lambda^{-1} {}^R\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^R\Phi_{11} & {}^R\Phi_{12} \\ -{}^R\Phi_{12} \tilde{\Omega}^2 & {}^R\Phi_{22} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

本章ではこの実相変換行列  ${}^R\tilde{\Phi}$  を右実モード行列と呼ぶ。次に、行列  $\boldsymbol{A}$  を  ${}^R\tilde{\Phi}$  を用いて単位行列  $I_{2n}$  に正規化するような行列  ${}^R\tilde{\Psi}$  は、式 (2.6) の正規化を考慮すると次のように表される。

$$\begin{aligned} {}^R\tilde{\Psi} &= {}^c\tilde{\Phi} \left[ \begin{array}{cc} {}^c\Lambda {}^c\bar{\Lambda} - {}^c\Lambda^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^c\Lambda {}^c\bar{\Lambda} - {}^c\bar{\Lambda}^2 \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ {}^c\Lambda & {}^c\bar{\Lambda} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} ({}^R\Phi - {}^I\Phi {}^I\Lambda^{-1} {}^R\Lambda) \tilde{\Omega}^{-2} & -{}^I\Phi {}^I\Lambda^{-1} \\ -{}^I\Phi {}^I\Lambda^{-1} & -({}^R\Phi + {}^I\Phi {}^I\Lambda^{-1} {}^R\Lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^R\Phi_{11} \tilde{\Omega}^{-2} & -{}^R\Phi_{12} \\ -{}^R\Phi_{12} & -{}^R\Phi_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

本章ではこの行列  ${}^R\tilde{\Psi}$  を左実モード行列と呼ぶ。  ${}^R\tilde{\Phi}$  および  ${}^R\tilde{\Psi}$  は  $2n \times 2n$  の左右で異なる実モード行列であり、行列  $\boldsymbol{A}$  を介して  ${}^R\tilde{\Psi}^T \boldsymbol{A} {}^R\tilde{\Phi} = I_{2n}$  のように正規化される。このとき、右および左実モード行列  ${}^R\tilde{\Phi}, {}^R\tilde{\Psi}$  は式 (2.6) の正規化を考慮すると行列  $\boldsymbol{B}$  に関して次の関係が成立する。

$${}^R\tilde{\Psi}^T \boldsymbol{B} {}^R\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_n \\ -{}^c\Lambda {}^c\bar{\Lambda} & {}^c\Lambda + {}^c\bar{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_n \\ -\tilde{\Omega}^2 & -2\tilde{Z}\tilde{\Omega} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ここで、改めて、式 (2.10) の右実モード行列  ${}^R\tilde{\Phi}$  に対応する実数のモード座標  $\xi, \dot{\xi}$  を用いると物理座標  $\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}$  は次のように表される。

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = {}^R\tilde{\Phi} \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ {}^R\Phi_{12}^T f_S \end{bmatrix} \right\} \quad (2.13)$$

式 (2.13) を式 (2.4) に代入したのち、両辺に左から式 (2.12) の左実モード行列の転置行列  ${}^R\tilde{\Psi}^T$  を乗じ、式 (2.12) の関係を考慮して整理すると、次式が導出される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\tilde{\Omega}^2 & -2\tilde{Z}\tilde{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} - \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ {}^R\Phi_{11}^T \mathbf{f}_S + {}^R\Phi_{12}^T \dot{\mathbf{f}}_S \end{bmatrix} \\ \therefore \ddot{\xi} + 2\tilde{Z}\tilde{\Omega}\dot{\xi} + \tilde{\Omega}^2\xi &= -\varepsilon({}^R\Phi_{11}^T \mathbf{f}_S + {}^R\Phi_{12}^T \dot{\mathbf{f}}_S) \end{aligned} \quad (2.14)$$

なお、上記のようなモード座標への変換過程から、式 (2.13) 右辺の括弧内の第 2 項 ( $\mathbf{f}_S$  に関する項) は、モード座標への変換後に  $\dot{\xi} = \dot{\xi}$  の自明な式が成立するために必要な補正項であることがわかる。

このように、上記の変換法によれば、式 (2.14) の第 2 式の左辺のように、質量行列と剛性行列だけでなく減衰行列をも同時に対角化した上で、2 階の実常微分方程式としてモード方程式を導出することが可能となる。また、ここまでの変換過程において近似を用いていないため、式 (2.14) と式 (2.1) の元の運動方程式は力学的に等価な運動方程式である。なお、提案手法は、非比例減衰系というまでもなく、係数行列が非対称である系やより一般的な自励振動系、非線形系にも適用可能である。

## 2.5 2 章のまとめ

本章では、線形自励振動系の一般的な運動方程式を対象に、従来の実モード解析および複素モード解析の概要と本研究における課題点について説明し、エネルギー的な検討に適した新型複素モード解析法を提案した。以下に、本章で得られた知見をまとめる。

- (1) 従来の実モード解析法では、質量と剛性行列が対角化された 2 階の実常微分方程式としてモード方程式を導出することが可能であるが、一般的には減衰行列は対角化されないため、モード別の減衰の影響を正確に評価することができないことを示した。
- (2) 従来の複素モード解析法では、質量、減衰および剛性行列を同時に対角化することが可能であるが、モード方程式が 1 階の複素常微分方程式に変換されるため、物理的な見通しが悪く、エネルギー的な検討には向かないことを示した。
- (3) 複素モード座標  ${}^c\xi$ ,  ${}^c\bar{\xi}$  と実数のモード座標  $\xi$ ,  $\dot{\xi}$  との関係式を導出し、新たに右および左の実モード行列  ${}^R\tilde{\Phi}$ ,  ${}^R\tilde{\Psi}$  を定義した。右実モード行列に対応する実数のモード座標  $\xi$ ,  $\dot{\xi}$  への変換により、質量、減衰および剛性行列を同時に対角化した上で、2 階の実常微分方程式としてモード方程式を導出することが可能となった。このような新型複素モード解析法は近似を含まず、非比例減衰系や非対称行列系、より一般的な自励振動系や非線形系に対しても適用可能である。

以上より、新型複素モード解析法によれば、エネルギー的な議論に適したモード方程式を導出することが可能となる。そこで、次章からはこの新型複素モード解析法を係数励振系、負性抵抗系、非対称行列系の 3 つの自励振動系に対してそれぞれ適用し、エネルギー的な観点から動吸振器の動作原理について詳しく検討する。

### 第3章 係数励振系に対する動吸振器に関する検討

本章では、自励振動に対する動吸振器の動作原理の解明に向けた第一歩として、係数励振系に対する動吸振器について検討する。

まず、解析モデルおよび基礎式を定式化する。第1章で述べた係数励振系に対する動吸振器の解析モデルの多くは、本質的には藪野らを取り扱った振り子型の動吸振器<sup>(50)</sup>と三船らを取り扱ったばね質点型の動吸振器<sup>(51)</sup>の2つに集約される。このような点を鑑み、本章では、振り子の支持部が鉛直方向に変動する係数励振系に対して振り子型の動吸振器を取り付けたモデルと、質点の両端に取付けたばねの支持部が上下に変動する係数励振系に対してばね質点型の動吸振器を取り付けたモデルのタイプの異なる2種類の基本的かつ本質的な2自由度解析モデルを構築する。これらのモデルは互いに異なる性質を有し、ばね質点型の動吸振器を付加したモデルでは、主共振に加え、2つのモード間の連成により発生する結合共振が現れる。

次に、動吸振器が系の安定化に作用する影響と不安定化に作用する影響とに明確に分けて検討するため、解析モデルの運動方程式を安定な系と励振項とに分離する。本章で取り扱う解析モデルの場合、励振項は剛性行列の変動成分、安定系はそれ以外の減衰を含む系と見なすことができる。この励振項を外力とみなし、安定系の固有モードを用いて第2章で述べた新型複素モード解析に基づくモード方程式を導出する。

動吸振器がエネルギーに及ぼす影響を解析的に検討するため、主共振領域および結合共振領域における近似安定判別法を定式化する。比較のため、実モード解析に基づく近似安定判別法の概要についても示し、具体的なモデルを対象とした数値解に基づく非常に高精度な結果と近似安定判別法の結果とを比較する。提案した解析手法と得られる解析結果の妥当性および実モード解析法に対する優位性について数値的に検証する。

この近似安定判別法に基づき、主共振領域および結合共振領域において係数励振によって生成される励振エネルギーと減衰要素によって消費される散逸エネルギーをモード別に導出する。これらのエネルギーは具体的にモーダルパラメータを用いて表されるため、動吸振器が散逸エネルギーおよび励振エネルギーに及ぼす影響を解析的に検討することが可能である。これにより、係数励振系が動吸振器によって安定化するメカニズムを解明する。

以上が動吸振器の動作原理に関する検討であるが、最後に、本章では動吸振器の最適設計法についても検討する。エネルギー的な検討結果からモデル別に動吸振器が系の安定性に及ぼす影響が異なることが確認されるため、最適設計手順をモデル別に示す。

#### 3.1 解析モデルおよび基礎式

動吸振器を付加した係数励振系の典型例として、藪野らの振り子型動吸振器<sup>(50)</sup>および三船らのばね質点型動吸振器<sup>(51)</sup>を参考に、本節では図3.1に示すような基本的な2種類の解析モデル(Model AおよびModel B)を取り扱う。図3.1(a)に示すModel Aは、質量 $m$ 、長さ $l$ の主系振り子の支持部が鉛直方向に $a \cos 2\Omega t$ で周期振動する係数励振系であり、主系振り子の先端部に質量 $m_a$ 、長さ $l_a$ の振り子型動吸振器が取り付けられている。各振り子は質点と質量の

無視できる剛体棒から構成されており、動吸振器の振り子の支持部には相対角速度に比例する減衰トルク  $c_a(\dot{\theta} - \dot{\theta}_a)$  が作用している。

一方、図 3.1(b) に示す Model B は、滑らかな水平面内において質量  $m$  の質点がばね定数  $k/2$ 、自然長  $l_0$ 、静的平衡状態における長さ  $l (l > l_0)$  の 2 つのばねによって支持され、両ばねの支持部がそれぞれ逆位相で長手方向に  $a \cos 2\Omega t$  で周期振動する係数励振系であり、主系の質点には、質量  $m_a$ 、ばね定数  $k_a$  および減衰係数  $c_a$  の動吸振器が取り付けられている。

Model A および Model B とともに、線形化された運動方程式は次のように表される。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{f}_p = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}_p = \cos 2\Omega t \mathbf{K}_p \mathbf{x} \quad (3.1)$$

$\varepsilon \mathbf{f}_p$  は係数励振項、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{K}_p$  はいずれも  $2 \times 2$  の実対称正定行列であり、 $\mathbf{K}_p$  を係数励振行列と呼ぶ。本章では、動作原理の解明のため、動吸振器が安定系と不安定化の要因となる励振項とに及ぼす影響を分けて検討するが、式 (3.1) で  $\varepsilon = 0$  と置いた系が安定系であり、 $\varepsilon \mathbf{f}_p$  が不安定化の要因となる係数励振項である。

ここに、Model A では  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{K}_p$  は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \theta \\ \theta_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma/\alpha^2 \\ \gamma/\alpha^2 & \gamma/\alpha^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = 2\omega_n \begin{bmatrix} \gamma\zeta_a/\alpha^3 & -\gamma\zeta_a/\alpha^3 \\ -\gamma\zeta_a/\alpha^3 & \gamma\zeta_a/\alpha^3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K} &= \omega_n^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma/\alpha^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_p = \frac{4\Omega^2}{\omega_n^2} \mathbf{K} \\ \gamma &= \frac{\kappa}{1+\kappa}, \quad \kappa = \frac{m_a}{m}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{g}{l_a}}, \quad \alpha = \frac{\omega_a}{\omega_n}, \quad \zeta_a = \frac{c_a}{2m_a l_a^2 \omega_a}, \quad \varepsilon = \frac{a}{l} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

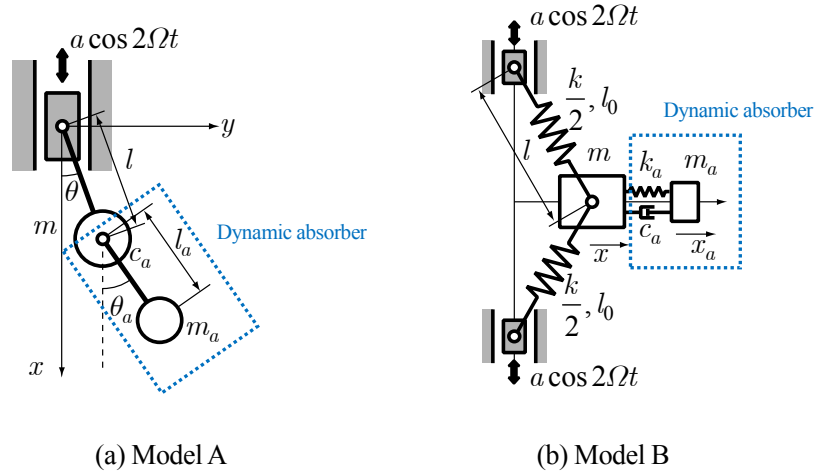


Fig. 3.1 Analytical models of a parametric excitation system with a dynamic absorber, Model A (a) and Model B (b).

このように、Model A では、質量行列に連成項（非対角成分）が現れるのに対して剛性行列には連成項が現れない。また、係数励振行列は剛性行列の定数倍であるため、モード間の連成項は現れず、結合共振は発生しない。

一方、Model B の  $M$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $K_P$  は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = 2\omega_n \begin{bmatrix} \alpha\kappa\zeta_a & -\alpha\kappa\zeta_a \\ -\alpha\kappa\zeta_a & \alpha\kappa\zeta_a \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K} &= \omega_n^2 \begin{bmatrix} 1+\alpha^2\kappa & -\alpha^2\kappa \\ -\alpha^2\kappa & \alpha^2\kappa \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_P = \omega_n^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \kappa &= \frac{m_a}{m}, \quad K = \frac{l-l_0}{l}k, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}, \\ \alpha &= \frac{\omega_a}{\omega_n}, \quad \zeta_a = \frac{c_a}{2\sqrt{m_a k_a}}, \quad \varepsilon = \frac{al_0}{l(l-l_0)} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

このように、Model B の特徴は、質量行列に連成項はなく剛性行列に連成項が現れること、および係数励振の影響が主系にのみ現れることである。Model B では係数励振行列にモード間の連成項が現れるため、結合共振が発生し得る。

また、係数励振系に関する多くの先行研究において、係数励振項の大きさを表す  $\varepsilon$  は微小量として取り扱われている。そのため、系の安定化に必要な減衰も  $\varepsilon$  と同様に微小量と考えることができる。このことから、以下では、両モデルともに係数励振項の大きさを表す  $\varepsilon$  および減衰行列  $C$  は微小量であると仮定する。

### 3.2 新型複素モード解析に基づくモード方程式の導出

本節では、第2章で述べた新型複素モード解析法を Model A および Model B の係数励振系に対して適用し、安定系に基づくモード方程式を導出する。まず、式 (2.1) の励振力  $\varepsilon \mathbf{f}_g$  が本節では  $\varepsilon \mathbf{f}_p$  であること、および式 (2.13) を用いると、 $\varepsilon \mathbf{f}_p$  および  $\varepsilon \dot{\mathbf{f}}_p$  について  $\varepsilon$  の1次のオーダーの近似は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \mathbf{f}_p &= \varepsilon \cos 2\Omega t \mathbf{K}_P \mathbf{x} \approx \varepsilon \cos 2\Omega t \mathbf{K}_P (\mathbf{R} \Phi_{11} \xi + \mathbf{R} \Phi_{12} \dot{\xi}) \\ \varepsilon \dot{\mathbf{f}}_p &= \varepsilon \cos 2\Omega t \mathbf{K}_P \dot{\mathbf{x}} - 2\Omega \varepsilon \sin 2\Omega t \mathbf{K}_P \mathbf{x} \\ &\approx \varepsilon \cos 2\Omega t \mathbf{K}_P (-\mathbf{R} \Phi_{12} \Omega^2 \xi + \mathbf{R} \Phi_{22} \dot{\xi}) - 2\Omega \varepsilon \sin 2\Omega t \mathbf{K}_P (\mathbf{R} \Phi_{11} \xi + \mathbf{R} \Phi_{12} \dot{\xi}) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

第2章で導出した式 (2.14) のモード方程式に、式 (3.4) を代入し、モード減衰を含む微小量の1次のオーダーで近似すると、係数励振系に対するモード方程式は次のように導出される。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\tilde{Z}\tilde{\Omega}\dot{\xi} + \tilde{\Omega}^2 \xi &= -\varepsilon \left\{ (\tilde{\Delta}_3 + \tilde{\Delta}_3^T) \cos 2\Omega t - 2\Omega \tilde{\Delta}_2 \sin 2\Omega t \right\} \dot{\xi} \\ &\quad - \varepsilon \left\{ (\tilde{\Delta}_1 - \tilde{\Delta}_2 \tilde{\Omega}^2) \cos 2\Omega t - 2\Omega \tilde{\Delta}_3^T \sin 2\Omega t \right\} \xi \\ \tilde{\Delta}_1 &= \mathbf{R} \Phi^T \mathbf{K}_P \mathbf{R} \Phi, \quad \tilde{\Delta}_2 = (\tilde{\Omega}^{-1} \mathbf{I} \Phi^T) \mathbf{K}_P (\mathbf{I} \Phi \tilde{\Omega}^{-1}), \quad \tilde{\Delta}_3 = \mathbf{R} \Phi^T \mathbf{K}_P (\mathbf{I} \Phi \tilde{\Omega}^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

このように、新型複素モード解析法によれば、係数励振系に対しても式 (3.5) の左辺のように質量、減衰および剛性行列を同時に対角化した上で、モード方程式を 2 階の実常微分方程式として導出することが可能である。その一方で、右辺の係数励振項  $\tilde{\Delta}_j$ ,  $j=1\sim 3$  は対角化されず、 $\sin 2\Omega t$  や  $\dot{\xi}$  に関する項が新たに現れる。

### 3.3 近似安定判別法

#### 3.3.1 主共振領域に対するモード別近似安定判別法

モード別の励振エネルギーおよび散逸エネルギーを高精度で導出するため、まず、本項では主共振領域に対する近似的な特性指数（以下では近似特性指数と呼ぶ）を導出し、近似安定判別法を定式化する。一般的に係数励振の角振動数が系の  $p$  次の固有角振動数の 2 倍近傍 ( $2\Omega \approx 2\tilde{\omega}_p$ ) にあるとき、 $p$  次モードの主共振が発生する<sup>(22)</sup>。主共振に対しては、他のモードの影響は小さいと考えられるので、式 (3.5) の  $\tilde{\Delta}_j$ ,  $j=1\sim 3$  の非対角項（モード間の連成項）を無視し、 $\tilde{\Delta}_j = \text{diag}[\tilde{\delta}_{j,1}, \tilde{\delta}_{j,2}]$  のような対角行列で近似すると、次のようなモード別の方程式が導出される。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_p + 2\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p\dot{\xi}_p + \tilde{\omega}_p^2\xi_p &= -2\varepsilon\left(\tilde{\delta}_{3,p}\cos 2\Omega t - \tilde{\delta}_{2,p}\Omega\sin 2\Omega t\right)\dot{\xi}_p \\ &\quad - \varepsilon\left\{\left(\tilde{\delta}_{1,p} - \tilde{\delta}_{2,p}\tilde{\omega}_p^2\right)\cos 2\Omega t - 2\tilde{\delta}_{3,p}\Omega\sin 2\Omega t\right\}\xi_p \end{aligned} \right\} (p=1, 2) \quad (3.6)$$

$$\tilde{\delta}_{1,p} = {}^R\phi_p^T \mathbf{K}_P {}^R\phi_p, \quad \tilde{\delta}_{2,p} = \frac{{}^I\phi_p^T \mathbf{K}_P {}^I\phi_p}{\tilde{\omega}_p^2}, \quad \tilde{\delta}_{3,p} = \frac{{}^R\phi_p^T \mathbf{K}_P {}^I\phi_p}{\tilde{\omega}_p}$$

${}^R\phi_p$ ,  ${}^I\phi_p$  は複素モード  ${}^C\phi_p$  の実部と虚部である。ここで、フロークの定理に基づき、式 (3.6) の主共振領域における  $p$  次モードの近似解を次のように仮定する。

$$\xi_p = e^{\sigma_p \Omega t} (A_p \cos \Omega t + B_p \sin \Omega t) \quad (3.7)$$

ここに、 $\sigma_p$  は特性指数を表す。1 自由度係数励振系の場合、主共振領域近傍（不減衰系の場合には主共振の発生領域内）で  $\sigma_p$  は実数となる。また、3.1 節で述べたように、両モデルともに係数励振項が小さい場合を取り扱っているので、主共振領域近傍において  $\sigma_p$  は微小量の 1 次のオーダーであると仮定できる。式 (3.7) を式 (3.6) に代入して微小量の 1 次のオーダーで近似し、調和バランスの原理を適用すると次式が導出される。

$$\begin{bmatrix} 4\Omega\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p + 4\Omega^2\sigma_p & \varepsilon\{\tilde{\delta}_{1,p} + \tilde{\delta}_{2,p}(2\Omega^2 - \tilde{\omega}_p^2)\} + 2(\Omega^2 - \tilde{\omega}_p^2) \\ \varepsilon\{\tilde{\delta}_{1,p} + \tilde{\delta}_{2,p}(2\Omega^2 - \tilde{\omega}_p^2)\} - 2(\Omega^2 - \tilde{\omega}_p^2) & 4\Omega\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p + 4\Omega^2\sigma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_p \\ B_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

式 (3.8) から  $A_p \neq 0$ ,  $B_p \neq 0$  となる条件より  $\sigma_p$  が求められる。その計算過程において、主共振は  $\Omega = \tilde{\omega}_p$  近傍で発生することから  $\Omega = \tilde{\omega}_p(1 + \varepsilon\mu)$  と置くと、微小量の 1 次のオーダーの近似特性指数  $\sigma_p$  は次のように求められる。

$$\sigma_p = -\tilde{\zeta}_p \pm \frac{\varepsilon}{4\tilde{\omega}_p^2} \sqrt{(\tilde{\delta}_{1,p} + \tilde{\delta}_{2,p}\tilde{\omega}_p^2)^2 - (4\mu\tilde{\omega}_p^2)^2} \quad (3.9)$$

式 (3.9) より,  $\sigma_p$  が負であれば  $p$  次モードの主共振領域の近似解は安定, 正であれば不安定と判別できる. また, 近似解が係数励振の全角振動数領域において完全に安定化する条件は,  $\sigma_p$  の最大値  $\sigma_{p,\max}$  が負となることである. 式 (3.9) より,  $\sigma_p$  を  $\mu$  の関数とみなすと  $d\sigma_p/d\mu = 0$  となる  $\mu = 0$  ( $\Omega = \tilde{\omega}_p$ ) のとき  $\sigma_{p,\max}$  となることから, 完全安定化条件は次のように求められる.

$$\sigma_{p,\max} = -\tilde{\zeta}_p + \frac{\varepsilon}{4\tilde{\omega}_p^2} (\tilde{\delta}_{1,p} + \tilde{\delta}_{2,p}\tilde{\omega}_p^2) < 0 \quad (3.10)$$

### 3.3.2 結合共振領域に対する近似安定判別法

3.3.1 項と同様に, 本項では, 結合共振領域に対する近似安定判別法を定式化する.  $p$  次モードと  $q$  次モードの相互作用に基づく結合共振は, 係数励振の角振動数が  $p$  次と  $q$  次の固有角振動数の和の近傍 ( $\Omega \approx (\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q)/2$ ) のとき発生することが知られている<sup>(22)</sup>. 結合共振の発生には2つのモード間の連成の影響が支配的であると考えられるため, 次のように式 (3.5) のモード方程式から  $p$  次と  $q$  次に関する項のみを取り出し,  $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \tilde{\mathbf{A}}_3$  の対角項を無視して非対角項のみで近似した方程式を取り扱う. なお, この近似の妥当性については3.6節で検証する.

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_p \\ \ddot{\xi}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p & 0 \\ 0 & 2\tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_p \\ \dot{\xi}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_p^2 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_q \end{bmatrix} = \\ & -\varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\delta}_{3pq} + \tilde{\delta}_{3qp} \\ \tilde{\delta}_{3pq} + \tilde{\delta}_{3qp} & 0 \end{bmatrix} \cos 2\Omega t - 2\Omega \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\delta}_{2pq} \\ \tilde{\delta}_{2pq} & 0 \end{bmatrix} \sin 2\Omega t \right\} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_p \\ \dot{\xi}_q \end{bmatrix} \\ & -\varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{2pq}\tilde{\omega}_q^2 \\ \tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{2pq}\tilde{\omega}_p^2 & 0 \end{bmatrix} \cos 2\Omega t - 2\Omega \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\delta}_{3qp} \\ \tilde{\delta}_{3pq} & 0 \end{bmatrix} \sin 2\Omega t \right\} \begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_q \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (p, q = 1, 2) \quad (3.11)$$

$$\tilde{\delta}_{1,pq} = {}^R\phi_p^T \mathbf{K}_P {}^R\phi_q, \quad \tilde{\delta}_{2,pq} = {}^I\phi_p^T \mathbf{K}_P {}^I\phi_q / \tilde{\omega}_p \tilde{\omega}_q$$

$$\tilde{\delta}_{3,pq} = {}^R\phi_p^T \mathbf{K}_P {}^I\phi_q / \tilde{\omega}_q, \quad \tilde{\delta}_{3,qp} = {}^R\phi_q^T \mathbf{K}_P {}^I\phi_p / \tilde{\omega}_p$$

フロークの定理に基づき, 式 (3.11) の近似解を一般的に  $\xi_j = e^{\sigma_{pq}\Omega t} (\Xi_{1,j} e^{i\Omega t} + \Xi_{2,j} e^{-i\Omega t}) + \text{cc}$ , ( $j = p, q$ ) と仮定する. ここに,  $\sigma_{pq}$  は特性指数,  $\text{cc}$  は複素共役を表す. ここで, 式 (3.1) に対する数値的な検討結果から, 結合共振領域において  $\sigma_{pq}$  は一般的に複素数となることが確認される. そこで, 近似特性指数を  $\sigma_{pq} = {}^R\sigma_{pq} + i {}^I\sigma_{pq}$  と置くと, 近似解は次のように表される.

$$\left. \begin{aligned} & \xi_j = e^{{}^R\sigma_{pq}\Omega t} (A_j \cos \omega_I t + B_j \sin \omega_I t + C_j \cos \omega_{II} t + D_j \sin \omega_{II} t), \quad j = p, q \\ & \omega_I = (1 + {}^I\sigma_{pq})\Omega, \quad \omega_{II} = (1 - {}^I\sigma_{pq})\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

式 (3.12) を式 (3.11) に代入し, 3.3.1 項の式 (3.8) の導出と同様の手続きを適用すると次式が導出される.



$$\left. \begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{E}_{pq}({}^I\sigma_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{pq}(-{}^I\sigma_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{pq} \\ \mathbf{h}_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ & \mathbf{g}_{pq} = [A_p \ B_p \ C_q \ D_q]^T, \ \mathbf{h}_{pq} = [C_p \ D_p \ A_q \ B_q]^T \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{pq}({}^I\sigma_{pq}) &= \frac{1}{4\Omega} \left[ \begin{array}{cccc} -4\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p & -2(\omega_1^2 - \tilde{\omega}_p^2)/\omega_1 & -\varepsilon\tilde{\Delta}_{33pq}/\omega_1 & -\varepsilon\tilde{\Delta}_{12pq}/\omega_1 \\ 2(\omega_1^2 - \tilde{\omega}_p^2)/\omega_1 & -4\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p & -\varepsilon\tilde{\Delta}_{12pq}/\omega_1 & \varepsilon\tilde{\Delta}_{33pq}/\omega_1 \\ \varepsilon\tilde{\Delta}_{33pq}/\omega_{II} & -\varepsilon\tilde{\Delta}_{21pq}/\omega_{II} & -4\tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q & -2(\omega_{II}^2 - \tilde{\omega}_q^2)/\omega_{II} \\ -\varepsilon\tilde{\Delta}_{21pq}/\omega_{II} & -\varepsilon\tilde{\Delta}_{33pq}/\omega_{II} & 2(\omega_{II}^2 - \tilde{\omega}_q^2)/\omega_{II} & -4\tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q \end{array} \right] \\ \tilde{\Delta}_{12pq} &= \tilde{\delta}_{1,pq} + \tilde{\delta}_{2,pq}(2\omega_{II}\Omega - \tilde{\omega}_q^2), \ \tilde{\Delta}_{21pq} = \tilde{\delta}_{1,pq} + \tilde{\delta}_{2,pq}(2\omega_1\Omega - \tilde{\omega}_p^2) \\ \tilde{\Delta}_{33pq} &= (\tilde{\delta}_{3,qp}\omega_1 - \tilde{\delta}_{3,pq}\omega_{II}) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

したがって,  ${}^R\sigma_{pq}$  および  ${}^I\sigma_{pq}$  が実数である条件と  $\det[\mathbf{E}_{pq}({}^I\sigma_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4] = 0$  または  $\det[\mathbf{E}_{pq}(-{}^I\sigma_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4] = 0$  から  ${}^R\sigma_{pq}$  および  ${}^I\sigma_{pq}$  が求められる. ただし, 両者の解は互いに  ${}^I\sigma_{pq}$  の符号が異なるだけなので, どちらか一方だけを対象にすれば良い. 以下では,  $\det[\mathbf{E}_{pq}({}^I\sigma_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4] = 0$  の場合について説明する.

まず, 結合共振は  $\Omega = (\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q)/2$  近傍で発生することから, 係数励振の角振動数を  $\Omega = \{(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q)/2\} \cdot (1 + \varepsilon\mu)$  と置く. 次に, 詳細な計算過程は付録 A1.1 で述べるが, 不減衰系の場合には  $\Omega = (\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q)/2$  のとき  $\det[\mathbf{E}_{pq}({}^I\sigma_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4] = 0$  を解くと,  ${}^I\sigma_{pq} = (\tilde{\omega}_p - \tilde{\omega}_q)/(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q)$  を得る. このことから, 減衰系の場合には  ${}^I\sigma_{pq} = (\tilde{\omega}_p - \tilde{\omega}_q)/(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q) + \varepsilon\mu_{pq}$  と仮定すると,  ${}^R\sigma_{pq}$ ,  $\varepsilon\mu_{pq}$  の微小量の 1 次のオーダーの近似はそれぞれ次のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} {}^R\sigma_{pq} &= -\frac{\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p + \tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q}{\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q} \pm \frac{1}{\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q} \operatorname{Re} \left[ \sqrt{{}^c\tilde{D}_{pq}} \right] \\ \varepsilon\mu_{pq} &= -\varepsilon\mu \frac{\tilde{\omega}_p - \tilde{\omega}_q}{\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q} \pm \frac{1}{\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{{}^c\tilde{D}_{pq}} \right] \\ {}^c\tilde{D}_{pq} &= \left\{ \tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q + i\varepsilon\mu(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q) \right\}^2 + \frac{\varepsilon^2(\tilde{\Delta}_{12pq0} + i\tilde{\Delta}_{33pq0})^2}{4\tilde{\omega}_p\tilde{\omega}_q} \\ \tilde{\Delta}_{12pq0} &= (\delta_{1pq} + \delta_{2pq}\tilde{\omega}_p\tilde{\omega}_q), \ \tilde{\Delta}_{33pq0} = (\delta_{3qp}\tilde{\omega}_p - \delta_{3pq}\tilde{\omega}_q) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

式 (3.15) より,  ${}^R\sigma_{pq}$  が負であれば結合共振領域の近似解は安定であり, 正であれば不安定と判別できる. また, この近似解が完全に安定化する条件は,  ${}^R\sigma_{pq}$  の最大値  ${}^R\sigma_{pq,\max}$  が負となることである. 式 (3.15) より,  ${}^R\sigma_{pq}$  を  $\mu$  の関数とみなすと,  $\partial {}^R\sigma_{pq} / \partial \mu = 0$  となるときの  $\mu$  から  ${}^R\sigma_{pq,\max}$  が求められ, そのときの  $\mu$  および完全安定化条件は次のように表される.

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{\tilde{\Delta}_{33pq0}(\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q)}{\varepsilon\tilde{\Delta}_{12pq0}(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q)} \\ R_{\sigma_{pq,\max}} &= \frac{1}{\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q} \left\{ -(\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p + \tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q) + \sqrt{(\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q)^2 + \frac{\varepsilon^2\tilde{\Delta}_{12pq0}^2}{4\tilde{\omega}_p\tilde{\omega}_q}} \right\} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

ところで、 $\det[\mathbf{E}_{pq}(-{}^I\sigma_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4] = 0$ からは ${}^I\sigma_{pq}$ の符号が逆の解が得られることを考慮すると、式(3.12)の近似解は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \xi_j &= \tilde{A}_j e^{R_{\sigma_{pq}}\Omega t} \cos\{(\tilde{\omega}_j + \varepsilon\tilde{\mu}_j)t - \psi_j\}, \quad j = p, q \\ \tilde{A}_j \cos \psi_j &= A_j + C_j, \quad \tilde{A}_j \sin \psi_j = B_j + D_j \\ \tilde{\mu}_p &= \mu\tilde{\omega}_p + \frac{\mu_{pq}(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q)}{2}, \quad \tilde{\mu}_q = \mu\tilde{\omega}_q - \frac{\mu_{pq}(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

つまり、結合共振領域では、 $p$ 次モードの近似解の角振動数は $\tilde{\omega}_p$ 、 $q$ 次モードの近似解の角振動数は $\tilde{\omega}_q$ に近い成分を持つことがわかる。

### 3.4 実モード解析に基づく近似安定判別法

3.3節で述べた手法との比較のため、本節では実モード解析に基づく近似安定判別法の概要について述べる。まず、第2章の2.2節で述べた実モード解析法に基づくモード方程式から、式(2.1)の励振力 $\varepsilon\mathbf{f}_S$ が本節では $\varepsilon\mathbf{f}_p$ であることおよび実モード座標への変換式 $\mathbf{x} = \hat{\Phi}\boldsymbol{\xi}$ を考慮すると、モード方程式は次のように導出される。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\Phi}^T \mathbf{C} \hat{\Phi} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\Omega}^2 \boldsymbol{\xi} &= -\varepsilon \hat{\Delta}_0 \cos 2\Omega t \boldsymbol{\xi} \\ \hat{\Delta}_0 &= \hat{\Phi}^T \mathbf{K}_p \hat{\Phi} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

このように、実モード解析では、質量行列と剛性行列は同時に対角化されるが、減衰行列と係数励振行列は一般的には対角化されない。

次に、モード別の主共振領域における近似解を導出する。3.3.1項と同様に、式(3.18)の減衰行列 $\hat{\Phi}^T \mathbf{C} \hat{\Phi}$ および係数励振行列 $\hat{\Delta}_0$ の非対角項の影響は小さいとみなして無視し、 $\hat{\Phi}^T \mathbf{C} \hat{\Phi} = \text{diag}[2\hat{\zeta}_1\hat{\omega}_1, 2\hat{\zeta}_2\hat{\omega}_2]$ および $\hat{\Delta}_0 = \text{diag}[\hat{\delta}_{0,1}, \hat{\delta}_{0,2}]$ のような対角行列で近似すると、次のようなモード別の運動方程式が導出される。

$$\ddot{\xi}_p + 2\hat{\zeta}_p\hat{\omega}_p\dot{\xi}_p + \hat{\omega}_p^2\xi_p = -(\varepsilon\hat{\delta}_{0,p} \cos 2\Omega t)\xi_p \quad (3.19)$$

式(3.19)に対して3.3.1項の式(3.7)以下と同様の手続きを適用すると、主共振領域における近似特性指数は次のように求められる。

$$\sigma_p = -\hat{\zeta}_p \pm \frac{\varepsilon}{4\hat{\omega}_p^2} \sqrt{\hat{\delta}_{0,p}^2 - (4\mu\hat{\omega}_p^2)^2} \quad (3.20)$$

式 (3.20) より,  $\sigma_p$  が負であれば  $p$  次モードの主共振領域の近似解は安定, 正であれば不安定と判別できる. また, この近似解が係数励振の全角振動数領域において完全に安定化する条件は, 式 (3.10) の導出と同様に次式として求められる.

$$\sigma_p = -\hat{\zeta}_p \pm \frac{\varepsilon}{4\hat{\omega}_p^2} \hat{\delta}_{0,p} < 0 \quad (3.21)$$

次に, 結合共振領域における近似解を導出する. 3.3.2 項と同様に,  $\hat{\Delta}_0$  の非対角項 (連成項) の影響が支配的であるとみなして  $\hat{\Delta}_0$  を非対角要素のみの行列で近似し,  $p$  次モードと  $q$  次モードに関する項のみを取り出すと, 次のような連成系の運動方程式が導出される. ただし, ここでは減衰行列  $\hat{\Phi}^T \mathbf{C} \hat{\Phi}$  の非対角項の影響を無視しているが, 非対角項を考慮した場合の近似解析結果と比較して大きな差はないことが数値的に確認されている.

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_p \\ \ddot{\xi}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\hat{\zeta}_p \hat{\omega}_p & 0 \\ 0 & 2\hat{\zeta}_q \hat{\omega}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_p \\ \dot{\xi}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\omega}_p^2 & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_q \end{bmatrix} = -\varepsilon \cos 2\Omega t \begin{bmatrix} 0 & \hat{\delta}_{0,pq} \\ \hat{\delta}_{0,pq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_q \end{bmatrix} \\ \hat{\delta}_{0,pq} = \hat{\phi}_p^T \mathbf{K}_P \hat{\phi}_q, \quad (p, q = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

式 (3.22) に対して 3.3.2 項の式 (3.12) 以下と同様の手続きを適用すると, 結合共振領域における近似特性指数が次のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} R\sigma_{pq} &= -\frac{\hat{\zeta}_p \hat{\omega}_p + \hat{\zeta}_q \hat{\omega}_q}{\hat{\omega}_p + \hat{\omega}_q} \pm \frac{1}{\hat{\omega}_p + \hat{\omega}_q} \operatorname{Re} \left[ \sqrt{{}^c \hat{D}_{pq}} \right] \\ \varepsilon \mu_{pq} &= -\varepsilon \mu \frac{\hat{\omega}_p - \hat{\omega}_q}{\hat{\omega}_p + \hat{\omega}_q} \pm \frac{1}{\hat{\omega}_p + \hat{\omega}_q} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{{}^c \hat{D}_{pq}} \right] \\ {}^c \hat{D}_{pq} &= \left\{ \hat{\zeta}_p \hat{\omega}_p - \hat{\zeta}_q \hat{\omega}_q + i\varepsilon \mu (\hat{\omega}_p + \hat{\omega}_q) \right\}^2 + \frac{\varepsilon^2 \hat{\delta}_{0,pq}^2}{4\hat{\omega}_p \hat{\omega}_q} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

式 (3.23) より,  $R\sigma_{pq}$  が負であれば  $p$  次モードと  $q$  次モードの結合共振領域の近似解は安定であり, 正であれば不安定と判別できる. また, 特性指数が最大となるときの  $\mu$ , および近似解の完全安定化条件は式 (3.16) の導出と同様の手続きにより, 次のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} \mu &= 0 \\ R\sigma_{pq, \max} &= \frac{1}{\hat{\omega}_p + \hat{\omega}_q} \left\{ -(\hat{\zeta}_p \hat{\omega}_p + \hat{\zeta}_q \hat{\omega}_q) + \sqrt{(\hat{\zeta}_p \hat{\omega}_p - \hat{\zeta}_q \hat{\omega}_q)^2 + \frac{\varepsilon^2 \hat{\delta}_{0,pq}^2}{4\hat{\omega}_p \hat{\omega}_q}} \right\} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

### 3.5 数値的計算法

上記手法の妥当性を検証するため, 数値的計算法によって求められる非常に高精度な特性指数との比較を行う. 本節では, その数値的な求め方について説明する. まず, 式 (3.1) の基礎式に対して, 無次元時間  $\tau = \Omega t$  を導入し, 次のような連立 1 階常微分方程式に変換する.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}' &= \tilde{\mathbf{A}}(\tau)\mathbf{y} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \varepsilon \cos 2\tau \mathbf{K}_p) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

ここに、" $'$ " =  $d/d\tau$  を表す。式 (3.25) の  $\tilde{\mathbf{A}}(\tau)$  は基本周期  $T = \pi$  の周期係数型常微分方程式となっているため、式 (3.25) に基づいて状態遷移行列  $\Psi(\tau)$  を求め、その  $\Psi(\tau)$  の固有値から安定判別が可能である。いま、基本周期  $T$  の状態遷移行列  $\Psi(\tau)$  は、初期値が単位行列  $\mathbf{I}_4$  であるような式 (3.25) の基本解行列でもあるため、次式を満足する。

$$\Psi'(T) = \tilde{\mathbf{A}}(T)\Psi(T), \quad \Psi(0) = \mathbf{I}_4 \quad (3.26)$$

式 (3.26) に対して、1 周期後の状態遷移行列  $\Psi(T)$  を求めるには、0 から基本周期  $T$  まで数値積分を実施すればよい。この状態遷移行列の固有値を  $\tilde{\mu}_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ) とすると、 $\tilde{\mu}_j$  は特性乗数を表し、特性乗数の絶対値が 1 よりも小さければ漸近安定、そうでなければ一般に不安定である。また、特性乗数  $\tilde{\mu}_j$  と特性指数  $\sigma_j$  との間には一般的に次の関係が成り立つ。

$$\sigma_j = \ln \tilde{\mu}_j / T \quad (3.27)$$

式 (3.27) より、特性指数の値を数値的に求めることが可能である。これにより求められる特性指数は厳密解と見なせるほど非常に高精度であり、以下では単に数値解と呼ぶ。

### 3.6 数値的検証

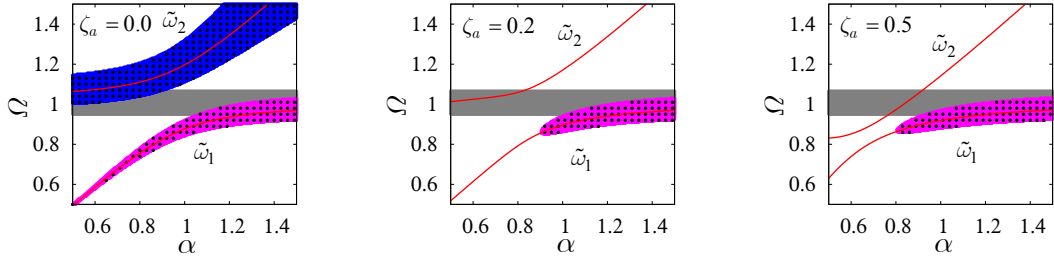
本節では、3.3 節で示した新型複素モード解析に基づく近似安定判別法の有効性を検証するため、主共振領域および結合共振領域に対する新型複素モード解析に基づく近似安定判別法の精度を、数値解および実モード解析に基づく近似安定判別法と比較する。表 3.1 に数値計算に用いた Model A および Model B のパラメータを示す。なお、これらのパラメータ値は特徴的な結果が得られるように調整した値であり、実際例に基づくものではない。また、これ以外のパラメータに対しても同様の結果を示すことを数値的に確認している。

#### 3.6.1 Model A の数値計算結果

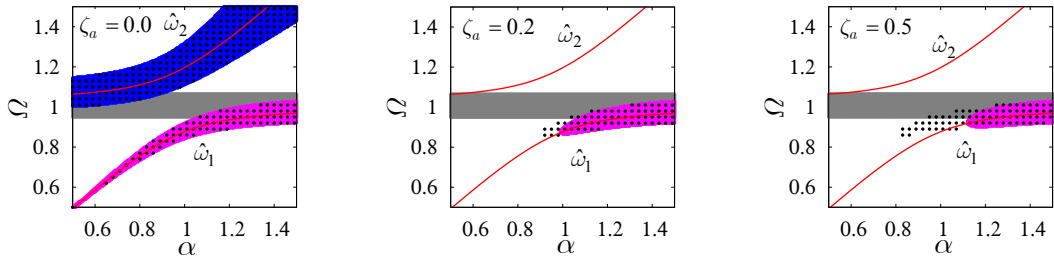
図 3.2 に主系と動吸振器との振動数比  $\alpha$  および減衰比  $\zeta_a$  を変化させた場合に各手法で求められた Model A の不安定領域を示す。図の横軸および縦軸はそれぞれ主系に対する動吸振器の振動数比  $\alpha$  および係数励振の角振動数 (の 2 分の 1)  $\Omega$  であり、紫色と青色の領域および黒色の点はそれぞれ近似安定判別法および数値解により求められた主共振領域の不安定領域を表す。また、近似安定判別法の結果における紫色と青色はそれぞれ 1 次モードと 2 次モードの不安定領域を示す。

Table 3.1 Parameter values of Model A and Model B used in numerical computation.

$\omega_n$ [rad/s]	$\kappa$	$\Omega$ [rad/s]	$\zeta_a$ (Model A)	$\zeta_a$ (Model B)	$\varepsilon$ (Model A)	$\varepsilon$ (Model B)
1.0	0.1	0.5~1.5	0.0, 0.2, 0.5	0.0, 0.1, 0.6	0.06	0.2

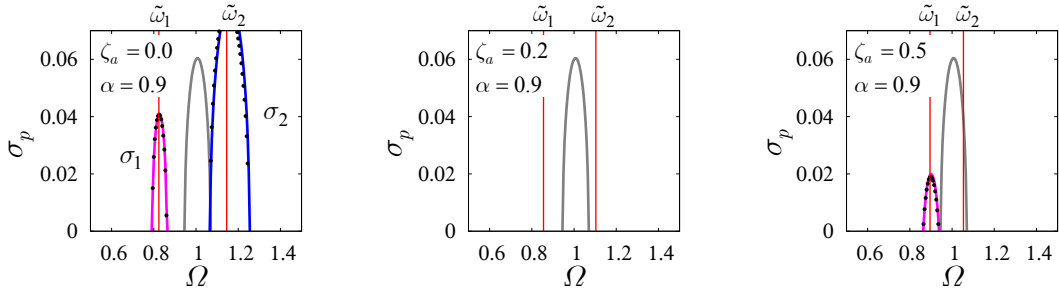


(a) Complex modal analysis

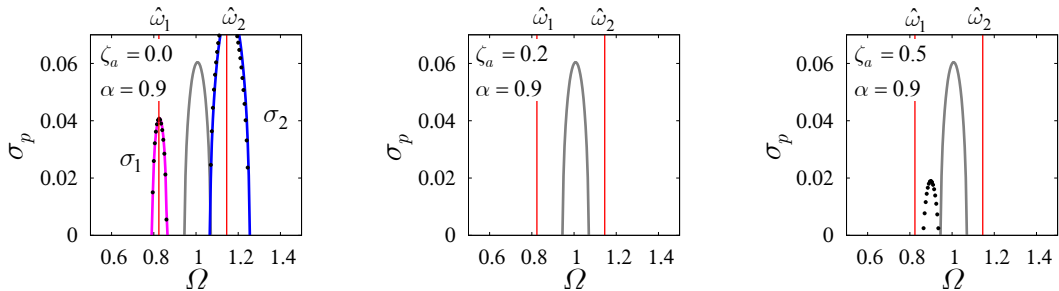


(b) Real modal analysis

Fig. 3.2 Model A : The unstable regions obtained by the approximate solutions (purple and blue areas) and the numerical method (black dots)



(a) Complex modal analysis



(b) Real modal analysis

Fig. 3.3 Model A : The characteristic exponents obtained by the approximate solutions (purple and blue lines), the numerical method (black dots)

一方、数値解では、与えられた系パラメータに対して状態遷移行列から固有値として 2 個 2 組の特性指数が同時に求められるが、これらと安定系のモードとの間の対応関係は直接的には求められないので、数値解ではモード別の区別はしていない。灰色の領域は主系単体時の主共振の不安定領域を、赤色の実線は複素モード解析と実モード解析により求められた固有角振動数  $\tilde{\omega}_p, \hat{\omega}_p$  を表す。なお、Model A では係数励振行列と剛性行列とが定数倍の関係であるため、励振項についてモード間の連成項は存在せず、結果として結合共振領域は発生しない。

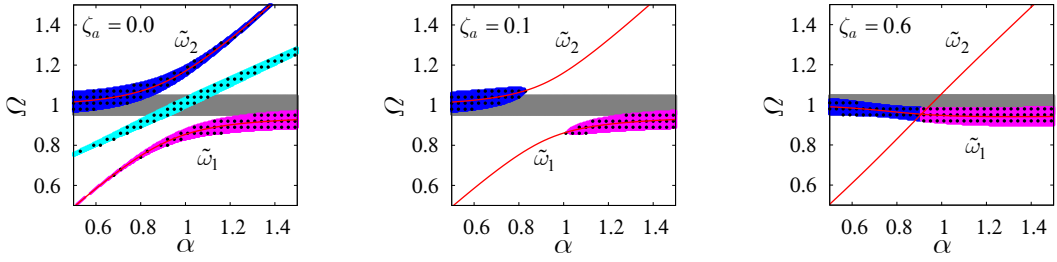
図 3.2(a) は新型複素モード解析に基づく近似安定判別法の結果である。 $\zeta_a = 0.0, 0.2, 0.5$  のいずれの場合も近似安定判別法の結果と数値解の結果がよく一致しており、新型複素モード解析に基づく近似安定判別法は非常に高精度であることが確認できる。一方、実モード解析に基づく近似安定判別法の結果は、動吸振器の減衰比  $\zeta_a$  が比較的小さい  $0.0, 0.2$  のときには数値解による結果とほぼ一致し、高精度であることが確認できる。しかしながら、 $\zeta_a = 0.5$  になると図 3.2(b) に示すように不安定領域が数値解の不安定領域よりも小さくなる。このように、実モード解析では減衰行列の非対角項を無視しているため、 $\zeta_a$  が大きくなるにつれて精度が低下する。

図 3.3 は、 $\alpha = 0.9$  における  $\Omega$  と特性指数の実部  $\sigma_p$  との関係を示したものである。紫色と青色の実線は近似特性指数、黒色の点は数値解であり、灰色の実線は主系単体時の特性指数  $\sigma_0$  を表す。また、図中の赤線は各手法で得られた固有角振動数である。図 3.3(a) は新型複素モード解析に基づく近似安定判別法の結果であるが、 $\zeta_a = 0.0, 0.2, 0.5$  のいずれの減衰比に対しても数値解とよく一致しており、非常に高精度であることが確認できる。一方、図 3.3(b) に示すように、実モード解析に基づく近似安定判別法の結果では  $\zeta_a = 0.5, \alpha = 0.9$  のときに発生する不安定領域を求めることができていない。このように、 $\zeta_a$  が大きくなるにつれて図 3.2 と同様に実モード解析に基づく近似安定判別法の精度は低下する。

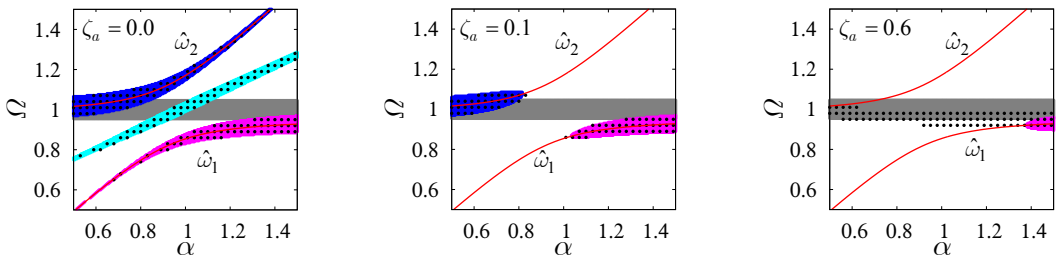
次に、動吸振器が主共振の不安定領域に対して及ぼす影響に関しては、図 3.2(a) および図 3.3(a) から、次のことがわかる。すなわち、動吸振器の付加によって系の固有角振動数が 2 個に分離することに伴って、主系単体時には  $\Omega \approx 1.0$  付近に存在していた不安定領域が新たな固有角振動数  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$  付近の 2 つの不安定領域に分離する。これらの不安定領域は、動吸振器の減衰比  $\zeta_a$  が比較的小さいとき  $\zeta_a$  の増大に伴ってともに縮小し、結果として  $\zeta_a = 0.2$  の場合には  $\alpha$  が約 0.9 以下のとき完全な安定化を実現することができる。ところが、減衰比がある値を超えてさらに大きくなると 1 次の不安定領域が徐々に拡大する。これは、動吸振器の減衰が大きくなるにつれて主系と動吸振器が一体となって振動する 1 自由度振動系に近くなり、相対速度に比例する減衰の効果が小さくなることが原因と考えられる（上記のように、実モード解析ではこの性質を精度よく考慮することができない）。このことから動吸振器には適切な振動数比  $\alpha$  と減衰比  $\zeta_a$  が存在することがわかる。この点に関しては 3.8 節で改めて検討する。

### 3.6.2 Model B の数値計算結果

次に Model B に対する近似安定判別法の結果について検討する。図 3.4 および図 3.5 に、Model B で発生する不安定領域および特性指数の計算結果を示す。これら両図の表示法はそれぞれ図 3.2 および図 3.3 と同様であるが、Model B では、図 3.4 および図 3.5 に示すように、 $\zeta_a = 0.0$  のとき  $\Omega = (\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/2$  付近に 1 次モードと 2 次モードの連成による結合共振の不安定領域が現れる。このような結合共振領域について、近似安定判別法の結果を水色で表す。

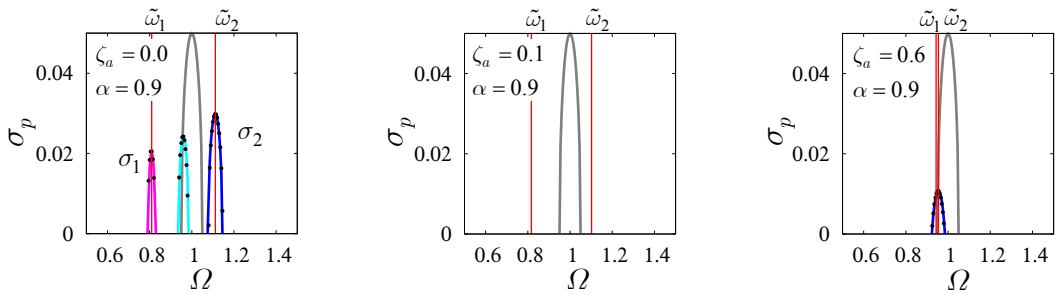


(a) Complex modal analysis

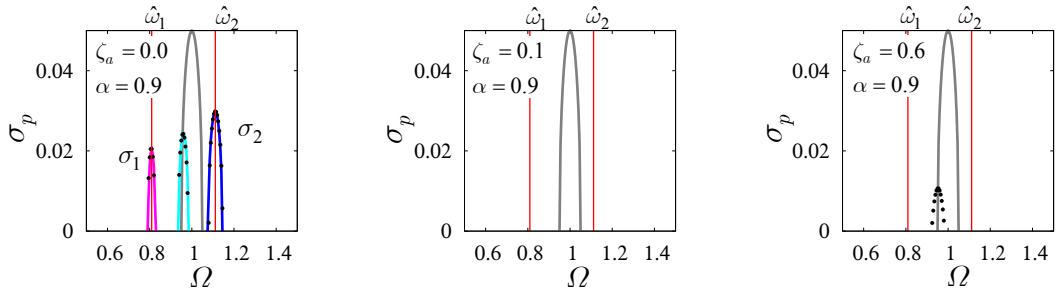


(b) Real modal analysis

Fig. 3.4 Model B : The unstable regions obtained by the approximate solutions (purple, blue and light blue areas), the numerical method (black dots)



(a) Complex modal analysis



(b) Real modal analysis

Fig. 3.5 Model B : The characteristic exponents obtained by the approximate solutions (purple, blue and light blue lines), the numerical method (black dots)

図 3.4 および図 3.5 から、主共振領域および結合共振領域に対する新型複素モード解析に基づく近似安定判別法の結果は、いずれの動吸振器の減衰比 $\zeta_a$ においても非常に高精度であることがわかる。この結果から、結合共振に対して式 (3.11) のように係数励振行列 $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \tilde{\Delta}_3$ の非対角項のみで近似したことの妥当性が確認できる。一方、実モード解析に基づく近似安定判別法の結果は、動吸振器の減衰比 $\zeta_a$ が比較的小さい $\zeta_a = 0.0, 0.1$ のときには図 3.4(b) に示すように主共振領域および結合共振領域ともに数値解による結果とほぼ一致し、高精度であることが確認できる。しかしながら、 $\zeta_a = 0.6$ のときには図 3.5(b)からもわかるように不安定領域が現れないなど、Model A の場合と同様に $\zeta_a$ が大きくなるにつれてその精度は低下する。

次に、動吸振器の影響に関しては、図 3.4(a) および図 3.5(a) から、次のことが分かる。まず、主共振領域に対しては、Model A の場合と同様の影響が確認される。特に、主共振の不安定領域に対して適切な振動数比 $\alpha$ と減衰比 $\zeta_a$ が存在し、この点に関しては3.8節で改めて検討する。

一方、結合共振領域は、動吸振器の付加によって増加した2つのモード間の連成により発生する。つまり、動吸振器を付加することによって主共振領域以外の新たな不安定領域が現れるため、不減衰時には動吸振器によって不利に働く可能性がある。しかしながら、結合共振領域での不安定度は非常に小さいので、動吸振器に僅かでも減衰があれば消滅する。したがって、動吸振器の最適設計を考える際には、主共振のみを考慮すればよい。

### 3.7 動吸振器の動作原理に関する検討

#### 3.7.1 主共振領域に対する動吸振器の動作原理のエネルギー的検討

本項では、主共振領域が動吸振器により安定化するメカニズム（動作原理）をエネルギー的な観点から検討する。まず、3.6節の結果より、不安定振動が発生する主系に動吸振器を付加することによって1次と2次モードの2つの主共振に分離するが、適切な減衰によってそれぞれが安定化することが確認された。このことから、1次と2次のモード別に励振エネルギーおよび散逸エネルギーに対して動吸振器が及ぼす影響を詳しく検討することにより、その動作原理が説明できると考える。そこで、本項では、まず、3.3節で述べた近似安定判別法に基づき、モード別の主共振領域における散逸エネルギーおよび励振エネルギーを高精度で導出する。ここで、散逸エネルギーはモード別の減衰力 $F_{D,p}$ により消費されるエネルギー、励振エネルギーはモード別の係数励振力 $F_{P,p}$ により生成されるエネルギーとみなすことができる。モード別の減衰力 $F_{D,p}$ は式 (3.6) 左辺の減衰項を右辺に移項した項、モード別の係数励振力 $F_{P,p}$ は右辺の励振項として次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} F_{D,p} &= -2\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p \dot{\xi}_p \\ F_{P,p} &= -2\varepsilon(\tilde{\delta}_{3,p} \cos 2\Omega t - \tilde{\delta}_{2,p} \Omega \sin 2\Omega t) \dot{\xi}_p - \varepsilon \left\{ (\tilde{\delta}_{1,p} - \tilde{\delta}_{2,p} \tilde{\omega}_p^2) \cos 2\Omega t - 2\tilde{\delta}_{3,p} \Omega \sin 2\Omega t \right\} \xi_p \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

ここで、3.3節で求めた式 (3.7) の主共振領域における近似解から、安定不安定境界近傍( $\sigma_p \approx 0$ )における $p$ 次モードの近似解を次のような調和振動で仮定する。



$$\left. \begin{aligned} \xi_p &= \tilde{A}_p \cos(\Omega t - \psi_p) \\ \tilde{A}_p &= \sqrt{A_p^2 + B_p^2}, \quad \cos \psi_p = \frac{A_p}{\tilde{A}_p}, \quad \sin \psi_p = \frac{B_p}{\tilde{A}_p} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

系が式 (3.29) の  $p$  次モードで振動しているとき、式 (3.28) の  $F_{D,p}$  および  $F_{P,p}$  が任意の時刻  $T$  から  $T + 2\pi / \Omega$  の間 (近似解の周期成分  $\cos(\Omega t - \psi_p)$  の 1 周期間) になす仕事をエネルギー積分から求め、 $E_p = \tilde{\omega}_p^2 \tilde{A}_p^2$  ( $p$  次モードの不減衰自由振動系の力学的エネルギー相当量) で正規化したものをそれぞれ  $W_{D,p}$  および  $W_{P,p}$  とすると、微小量の 1 次のオーダーの近似は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} W_{D,p} &= \frac{1}{E_p} \int_T^{T+2\pi/\Omega} (F_{D,p} \dot{\xi}_p) dt = -2\pi \tilde{\zeta}_p \quad (< 0) \\ W_{P,p} &= \frac{1}{E_p} \int_T^{T+2\pi/\Omega} (F_{P,p} \dot{\xi}_p) dt = -\varepsilon \frac{\pi}{2\tilde{\omega}_p^2} (\tilde{\delta}_{1,p} + \tilde{\delta}_{2,p} \tilde{\omega}_p^2) \sin 2\psi_p \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

式 (3.30) で表される  $W_{D,p}$  および  $W_{P,p}$  が、それぞれモード別の散逸エネルギーおよび励振エネルギーに相当する。一方、式 (3.29) および式 (3.8) から、次の関係が導出される。

$$\sin 2\psi_p = 2 \cos \psi_p \sin \psi_p = \frac{2(B_p / A_p)}{1 + (B_p / A_p)^2} = -\frac{4\tilde{\omega}_p^2 (\sigma_p + \tilde{\zeta}_p)}{\varepsilon(\tilde{\delta}_{1,p} + \tilde{\delta}_{2,p} \tilde{\omega}_p^2)} \quad (3.31)$$

したがって、 $W_{P,p} + W_{D,p}$  については次式が成立する。

$$W_{P,p} + W_{D,p} = 2\pi\sigma_p \quad (3.32)$$

式 (3.32) より、主共振領域における  $p$  次モードの近似解が安定 ( $\sigma_p < 0$ ) になるのは、減衰によって消費される散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  が係数励振から供給される励振エネルギー  $W_{P,p}$  を上回る場合であることがわかる。つまり、動吸振器によってモード別の主共振領域の安定化を実現するためには、散逸エネルギーが励振エネルギーを上回るように変更しなければならない。

そこで、次に、動吸振器が励振エネルギー  $W_{P,p}$  および散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  に及ぼす影響をそれぞれ検討する。まず、散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  については、式 (3.30) より減衰自由振動系のモード減衰比  $\tilde{\zeta}_p$  の関数であることわかる。つまり、 $p$  次モードの近似解の安定化のためには  $-W_{D,p}$  は大きい方が望ましいので、Model A および Model B とともに動吸振器の減衰を付加することによって、モード減衰比  $\tilde{\zeta}_p$  がなるべく大きくなるように調整すれば良いことがわかる。

一方、励振エネルギー  $W_{P,p}$  に対しては、励振エネルギーが最大となる場合について検討する。まず、 $\sigma_p = \sigma_{p,\max}$  (または  $\Omega = \tilde{\omega}_p$ ) のとき、式 (3.31) および式 (3.10) より  $\sin 2\psi_p = -1$  となることから、 $W_{P,p}$  は最大値  $W_{P,p,\max}$  となる。また、式 (3.6) より  $\tilde{\delta}_{1,p} = {}^R\phi_p^T \mathbf{K}_p {}^R\phi_p$  および  $\tilde{\delta}_{2,p} = {}^I\phi_p^T \mathbf{K}_p {}^I\phi_p / \tilde{\omega}_p^2$  と表されるため、複素モードの実部および虚部をそれぞれ  ${}^R\phi_p = [{}^R\phi_p \quad {}^R\phi_{a,p}]^T$  および  ${}^I\phi_p = [{}^I\phi_p \quad {}^I\phi_{a,p}]^T$  とおくと、 $W_{P,p,\max}$  はモデル別に次のように表される。ただし、 ${}^R\phi_p$ ,  ${}^I\phi_p$  は主系、 ${}^R\phi_{a,p}$ ,  ${}^I\phi_{a,p}$  は動吸振器のモード振幅の実部と虚部である。

$$\left. \begin{aligned} \text{Model A : } W_{P,p,\max} &= 2\varepsilon\pi \left\{ \left( R\phi_p^2 + I\phi_p^2 \right) + \frac{\gamma}{\alpha^2} \left( R\phi_{a,p}^2 + I\phi_{a,p}^2 \right) \right\} (> 0) \\ \text{Model B : } W_{P,p,\max} &= \frac{\varepsilon\pi\omega_n^2}{2\tilde{\omega}_p^2} \left( R\phi_p^2 + I\phi_p^2 \right) (> 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

すなわち、 $W_{P,p,\max}$  はモード別固有角振動数 $\tilde{\omega}_p$ と固有モードの関数として表されることがわかる。  $p$ 次モードの近似解の安定化のためには励振エネルギー $W_{P,p,\max}$ は小さい方が望ましいので、式(3.33)より、Model Aでは主系または動吸振器のモード振幅を小さくし、Model Bでは固有角振動数を大きくかつ主系のモード振幅が小さくなるように調整すればよいことがわかる。ただし、常に $W_{P,p,\max} > 0$ であるため、係数励振系を動吸振器によって完全に安定化させるためには減衰の存在が必要不可欠である。

以上より、動吸振器の付加によりモード別固有角振動数とモード形状を変化させて $W_{P,p,\max}$ を調整するとともに、動吸振器の減衰により $-W_{D,p}$ を増加させて $-W_{D,1} > W_{P,1,\max}$  および $-W_{D,2} > W_{P,2,\max}$ とすることができれば系の完全な安定化が実現される。これはModel AおよびModel Bに共通した係数励振系の主共振に対する動吸振器の動作原理である。

なお、式(3.33)からわかるように、Model Aでは $W_{P,p,\max}$ が主系だけでなく動吸振器のモード振幅にも依存するのに対して、Model Bでは主系のモード振幅とモード別固有角振動数 $\tilde{\omega}_p$ に依存しており、動吸振器が $W_{P,p,\max}$ に及ぼす影響は両モデルで異なっている。この点に関連して、詳しい導出過程については付録A1.2で述べるが、 $\zeta_a = 0$  ( $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ )の不減衰系の場合には、動吸振器を付加する前後の励振エネルギーについて次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \text{Model A : } W_{P,1,\max} + W_{P,2,\max} &= 2\pi\varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha^2 + \gamma}{1 - \gamma} \right) > 2\pi\varepsilon = W_{P,0,\max} \quad (\because 0 < \gamma < 1) \\ \text{Model B : } W_{P,1,\max} + W_{P,2,\max} &= \frac{\varepsilon\pi}{2} = W_{P,0,\max} \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

ここに、 $W_{P,0,\max}$ は主系単体時の係数励振力から上と同様の手順で $W_{P,p,\max}$ 相当の励振エネルギーを求めたものである。式(3.34)より、Model Aでは動吸振器付加時のモード別の励振エネルギー $W_{P,p,\max}$ は主系単体時の励振エネルギー $W_{P,0,\max}$ よりも大きくなる可能性があるのに対して、Model Bでは $W_{P,p,\max}$ は $W_{P,0,\max}$ よりも必ず小さくなるように分散化することがわかる。この性質は、図3.3(a)および図3.5(a)の $\zeta_a = 0$ で示したように、動吸振器付加時のモード別特性指数の最大値 $\sigma_{p,\max}$ と主系単体時の特性指数の最大値 $\sigma_{0,\max}$ の関係が、Model Aでは $\sigma_{1,\max} < \sigma_{0,\max} < \sigma_{2,\max}$ であるのに対して、Model Bでは $\sigma_{1,\max}, \sigma_{2,\max} < \sigma_{0,\max}$ となることに対応している。

### 3.7.2 結合共振領域に対する動吸振器の動作原理のエネルギー的検討

3.6節の結果から、Model Bでは主共振領域の他に、動吸振器の付加に伴って発生する結合共振領域が確認された。これは動吸振器の僅かな減衰によって安定化するため、系全体の安定化には大きな影響を及ぼさないが、本項では、3.7.1項の補足として結合共振領域が動吸振器により安定化するメカニズムをエネルギー的な観点から検討する。まず、式(3.11)の $p$ 次モード

に関するモード方程式より、 $p$  次モードの減衰力  $F_{D,p}$  および  $q$  次モードから作用する係数励振力  $F_{P,pq}$  は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} F_{D,p} &= -2\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p \dot{\xi}_p \\ F_{P,pq} &= -\varepsilon \left\{ (\tilde{\delta}_{3pq} + \tilde{\delta}_{3qp}) \cos 2\Omega t - 2\Omega \tilde{\delta}_{2pq} \sin 2\Omega t \right\} \dot{\xi}_q \\ &\quad - \varepsilon \left\{ (\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_q^2) \cos 2\Omega t - 2\Omega \tilde{\delta}_{3qp} \sin 2\Omega t \right\} \xi_q \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

ここで、3.3 節で求めた式 (3.17) の結合共振領域における近似解から、安定不安定境界近傍 ( ${}^R\sigma_{pq} \approx 0$ ) における  $p$  次および  $q$  次モードの近似解を次のような調和振動で仮定する。

$$\xi_j = \tilde{A}_j \cos\{(\tilde{\omega}_j + \varepsilon \tilde{\mu}_j)t - \psi_j\}, \quad (j = p, q) \quad (3.36)$$

系が式 (3.36) の近似解で振動しているとき、式 (3.35) の  $F_{D,p}$  および  $F_{P,pq}$  が任意の時刻  $T$  から  $T + 2\pi/(\tilde{\omega}_p + \varepsilon \tilde{\mu}_p)$  ( $p$  次モードの近似解の周期成分  $\cos\{(\tilde{\omega}_p + \varepsilon \tilde{\mu}_p)t - \psi_p\}$  の 1 周期間) の間になす仕事をエネルギー積分から求め、 $E_p = \tilde{\omega}_p^2 \tilde{A}_p^2$  ( $p$  次モードの力学的エネルギー相当量) で正規化したものをそれぞれ  $W_{D,p}$  および  $W_{P,pq}$  とすると、微小量の 1 次のオーダーの近似は次のように求められる。ただし、係数励振力の高次の振動数成分の影響は非常に小さいと考えられるので無視する。

$$\left. \begin{aligned} W_{D,p} &= \frac{1}{E_p} \int_T^{T+2\pi/(\tilde{\omega}_p + \varepsilon \tilde{\mu}_p)} (F_{D,p} \dot{\xi}_p) dt = -2\pi \tilde{\zeta}_p \quad (< 0) \\ W_{P,pq} &= \frac{1}{E_p} \int_T^{T+2\pi/(\tilde{\omega}_p + \varepsilon \tilde{\mu}_p)} (F_{P,pq} \dot{\xi}_p) dt \\ &= -\frac{\pi \varepsilon}{2\tilde{\omega}_p^2} \frac{\tilde{A}_q}{\tilde{A}_p} \left\{ \tilde{\Delta}_{12pq0} \sin(\psi_p + \psi_q) + \tilde{\Delta}_{33pq0} \cos(\psi_p + \psi_q) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

式 (3.37) で表される  $W_{D,p}$  および  $W_{P,pq}$  が、それぞれ  $p$  次モードに流入する励振エネルギーおよび散逸エネルギーに相当する。一方、式 (3.13) から、詳細な計算過程は付録 A1.3 に記載するが、次の関係式が導出される。

$$\varepsilon \tilde{A}_q \left\{ \tilde{\Delta}_{12pq0} \sin(\psi_p + \psi_q) + \tilde{\Delta}_{33pq0} \cos(\psi_p + \psi_q) \right\} = -4\tilde{A}_p \omega_I ({}^R\sigma_{pq} \Omega + \tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p) \quad (3.38)$$

したがって、 $W_{P,pq} + W_{D,p}$  は式 (3.38) の関係を用いると次のように表される。

$$W_{P,pq} + W_{D,p} = \pi \frac{\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q}{\tilde{\omega}_p} {}^R\sigma_{pq} \quad (3.39)$$

式 (3.39) より、結合共振領域における  $p$  次モードの近似解が安定 ( ${}^R\sigma_{pq} < 0$ ) になるのは、減衰によって消費される散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  が係数励振から供給される励振エネルギー  $W_{P,pq}$  を上回る場合であることがわかる。 $q$  次モードに対しても式 (3.35) 以下と同様の手続き

により、式 (3.39) の  $\tilde{\omega}_p$  と  $\tilde{\omega}_q$  を入れ替えた式が得られるため、 $q$  次モードについても同様の結果となる。このように、 $p$  次モードと  $q$  次モードは互いに係数励振行列の非対角項を介して励振エネルギーを生成し、近似解が安定 ( $R\sigma_{pq} < 0$ ) となるのは、両モードとも同時に散逸エネルギーが励振エネルギーを上回る場合であることがわかる。

次に、動吸振器が  $p$  次モードの散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  および励振エネルギー  $W_{P,pq}$  に及ぼす影響についてそれぞれ検討する。なお、 $q$  次モードに対しては同様の結果となるため省略する。

まず、散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  については、式 (3.37) より減衰自由振動系のモード減衰比  $\tilde{\zeta}_p$  の関数として表される。つまり、結合共振領域における  $p$  次モードの近似解の安定化のためには、 $-W_{D,p}$  は大きい方が望ましいので、Model B では動吸振器の減衰を付加することによってモード減衰比  $\tilde{\zeta}_p$  になるべく大きくなるように調整すれば良いことがわかる。

一方、励振エネルギー  $W_{P,pq}$  に対しては、励振エネルギーが最大  $W_{P,pq,\max}$  となる場合について検討する。まず、 $R\sigma_{pq} = R\sigma_{pq,\max}$  のとき、式 (3.38) と式 (3.11) を式 (3.16) に代入し、整理すると、 $W_{P,pq,\max}$  は次のように表される。ただし、複素モードの実部および虚部を  ${}^R\phi_j = [{}^R\phi_j \quad {}^R\phi_{a,j}]^T$  および  ${}^I\phi_j = [{}^I\phi_j \quad {}^I\phi_{a,j}]^T$ ,  $j = p, q$  とおく。

$$\left. \begin{aligned} W_{P,pq,\max} &= \frac{\pi}{\tilde{\omega}_p} \left( \tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q + \sqrt{(\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q)^2 + \frac{\varepsilon^2 \tilde{\Delta}_{12pq0}^2}{4\tilde{\omega}_p \tilde{\omega}_q}} \right) \\ \tilde{\Delta}_{12pq0} &= {}^R\phi_p^T \mathbf{K}_p {}^R\phi_q + {}^I\phi_p^T \mathbf{K}_p {}^I\phi_q \\ &= \omega_n^2 ({}^R\phi_p^T {}^R\phi_q + {}^I\phi_p^T {}^I\phi_q) \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

式 (3.40) から、 $W_{P,pq,\max}$  は  $p$  次および  $q$  次の固有角振動数  $\tilde{\omega}_p, \tilde{\omega}_q$  と  $p$  次および  $q$  次の主系の固有モードに加えて、 $p$  次および  $q$  次のモード減衰の差  $(\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q)$  の関数として表されることがわかる。つまり、動吸振器によってこれらのモーダルパラメータおよび主系のモード形状を調整することにより、結合共振領域における励振エネルギーは変更可能である。ただし、 $(\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q)$  の正負に関わらず  $W_{P,pq,\max} > 0$  となるため、結合共振領域の完全な安定化のためには動吸振器の減衰が必要不可欠である。

以上より、動吸振器の付加によりモード別固有角振動数とモード形状を変化させて  $W_{P,pq,\max}$  を調整するとともに、動吸振器の減衰により  $-W_{D,p}$  を増加させて  $-W_{D,1} > W_{P,12,\max}$  (同時に  $-W_{D,2} > W_{P,21,\max}$  となる) とすることができれば結合共振領域の完全な安定化が実現される。これが係数励振系の結合共振に対する動吸振器の動作原理である。

### 3.7.3 エネルギーに関する数値計算例

本項では、主共振領域における励振エネルギーの最大値  $W_{P,p,\max}$  および散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  等、系の安定性を支配する物理量に及ぼす動吸振器の振動数比  $\alpha$  および減衰比  $\zeta_a$  の影響について具体例に基づいて検討する。数値計算に用いた  $\kappa$  および  $\varepsilon$  の値は表 3.1 と同一である。

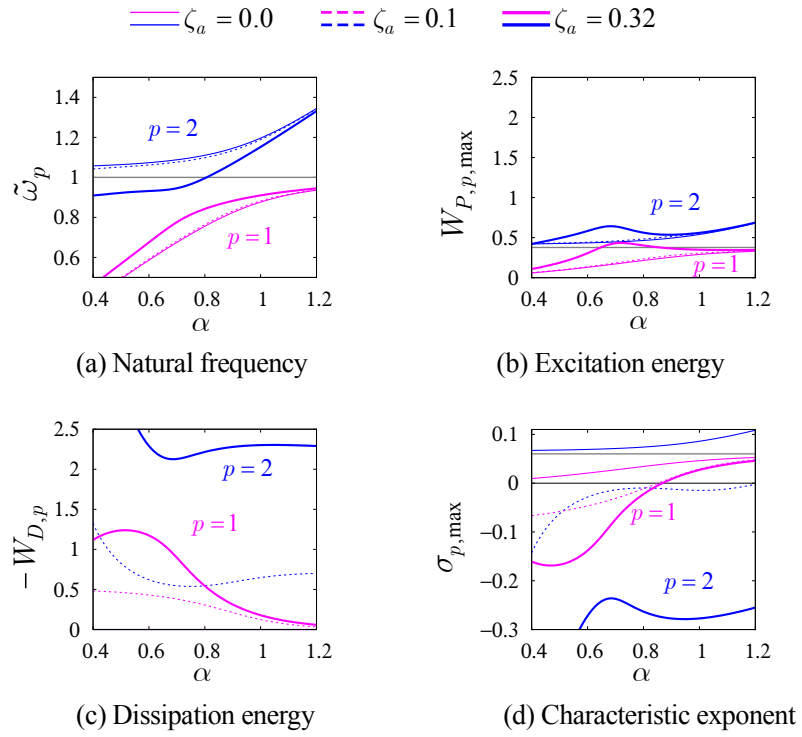


Fig. 3.6 Model A : The natural frequencies, the excitation energies, the dissipation energies and the characteristic exponents obtained by the approximate solutions.

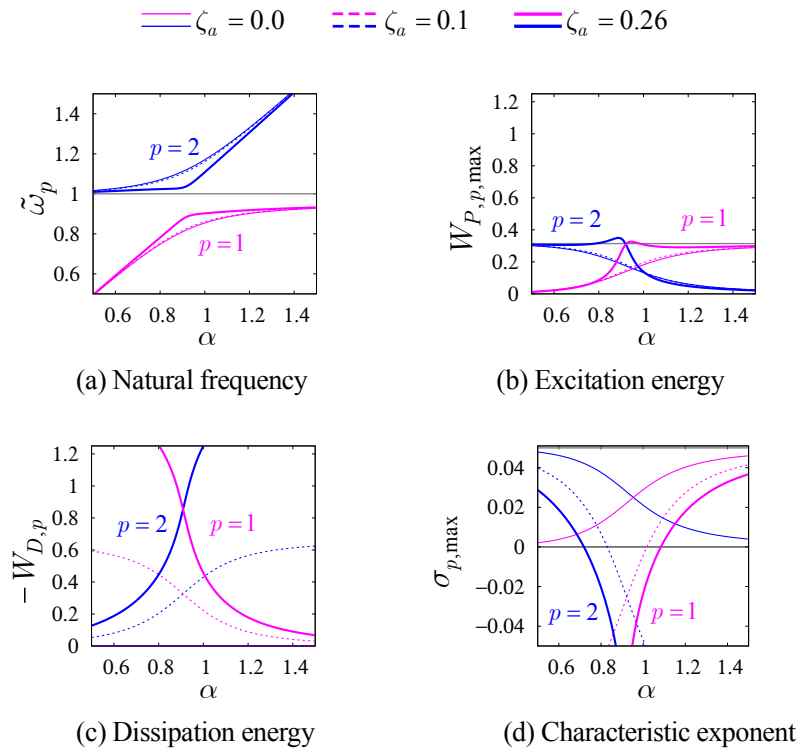


Fig. 3.7 Model B : The natural frequencies, the excitation energies, the dissipation energies and the characteristic exponents obtained by the approximate solutions.

図 3.6 および図 3.7 はそれぞれ Model A および Model B に対する計算結果であり、(a) 固有角振動数  $\tilde{\omega}_p$ 、(b) 励振エネルギーの最大値  $W_{P,p,\max}$  [式 (3.30)]、(c) 散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  [式 (3.30)]、(d) 特性指数の最大値  $\sigma_{p,\max}$  [式 (3.10)] と動吸振器の振動数比  $\alpha$  との関係を示している。また、図中の細実線、破線および太実線はそれぞれ動吸振器の減衰比が  $\zeta_a = 0.0, 0.1$  および  $0.32$  (Model A),  $0.26$  (Model B) のときの結果であり、紫色は 1 次モード、青色は 2 次モード、灰色は主系単体時の結果を示す。ただし、Model A に対する  $\zeta_a = 0.32$  および Model B に対する  $\zeta_a = 0.26$  は、3.8 節の手順により求められた  $\zeta_a$  の最適値である。なお、 $\alpha$  および  $\zeta_a$  が最適値から大きく離れると完全な安定化は実現できないので、以下では最適値の近傍に絞って検討する。

- (1)  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$  に及ぼす影響 [図 3.6(a) および図 3.7(a)]： Model A および Model B とともに、 $\zeta_a$  が同じであれば  $\alpha$  が増大するにつれて  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$  ともに増大し、同じ  $\alpha$  に対しては  $\zeta_a$  が増大するにつれて  $\tilde{\omega}_1$  は増大するのに対して  $\tilde{\omega}_2$  は減小するなど、 $\alpha, \zeta_a$  が  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$  に対して及ぼす影響については Model A と Model B で大きな違いはない。
- (2)  $W_{P,1,\max}, W_{P,2,\max}$  に及ぼす影響 [図 3.6(b) および図 3.7(b)]： Model A の場合には、全体的な傾向として  $\alpha$  の広い範囲で  $W_{P,1,\max} < W_{P,0,\max}$  および  $W_{P,2,\max} > W_{P,0,\max}$  の関係を満たしつつ、 $\alpha$  が増大するにつれて  $W_{P,1,\max}, W_{P,2,\max}$  ともに増大する。一方、Model B の場合には、全体的な傾向として  $\alpha$  が増大するにつれて  $W_{P,1,\max}$  は増大して  $W_{P,0,\max}$  に下から漸近するのに対して、 $W_{P,2,\max}$  は  $W_{P,0,\max}$  から減小し、 $\alpha = 0.9$  付近で両者の大小関係が逆転する。
- (3)  $-W_{D,1}, -W_{D,2}$  に及ぼす影響 [図 3.6(c) および図 3.7(c)]： Model A の場合には、全体的な傾向として  $\alpha$  が増大するにつれて  $-W_{D,1}$  は減小するのに対して  $-W_{D,2}$  は一旦減小したあと増大に転じ、一定値に漸近する。一方、Model B の場合には、 $\alpha$  が増大するにつれて  $-W_{D,1}$  は減小するのに対して  $-W_{D,2}$  は増大し、 $\alpha = 0.9$  付近で両者の大小関係が逆転する。
- (4)  $\sigma_{1,\max}, \sigma_{2,\max}$  に及ぼす影響 [図 3.6(d) および図 3.7(d)]： Model A の場合には、全体的な傾向として  $\alpha$  が増大するにつれて  $\sigma_{1,\max}, \sigma_{2,\max}$  はともに増大する。一方、Model B の場合には、 $\alpha$  が増大するにつれて  $\sigma_{2,\max}$  は減小するのに対して  $\sigma_{1,\max}$  は増大し、 $\alpha = 0.9$  付近で両者の大小関係が逆転する。

このように、散逸エネルギーおよび励振エネルギーに対して動吸振器が及ぼす影響は Model A および Model B に対してそれぞれ異なる傾向を示すことがわかる。

### 3.8 動吸振器の最適設計法

3.7 節までは、動吸振器により係数励振系が安定化するメカニズムについて検討した。まず、3.6 節の数値計算結果から、係数励振系の完全な安定化を実現するには、動吸振器の振動数比  $\alpha$  および減衰比  $\zeta_a$  を適切な値に設計する必要があることがわかった。3.7 節では特性指数の最大値  $\sigma_{p,\max}$  に及ぼす  $\alpha$  および  $\zeta_a$  の影響が Model A および Model B で異なることが示された。これらの結果を踏まえ、本節では、係数励振系の完全な安定化を実現する動吸振器の最適なパラメータを数値的に求める最適設計法についてモデル別に検討する。

まず、最適設計の目標値について検討する。動吸振器に期待されるのは系の完全な安定化であり、ロバスト性を確保するには安定度なるべく高くなることが望ましい。系の安定度は

$\sigma_{p,\max}$  で評価され、その値が小さいほど（負の側に大きいほど）安定度が高い。したがって、最適設計の目標値としては、 $\text{Max}(\sigma_{1,\max}, \sigma_{2,\max})$  の最小化を図るのが妥当であるといえる。

次に、Model A および Model B に対して求めた特性指数の最大値の等高線図を図 3.8 および図 3.9 に示す。両図ともに、横軸は動吸振器の振動数比  $\alpha$ 、縦軸は減衰比  $\zeta_a$  であり、(a)、(b) および(c) はそれぞれ数値解、新型複素モード解析および実モード解析による結果である。ここに、特性指数の最大値とは、(a) では  $\Omega = \tilde{\omega}_p$  ( $p=1,2$ ) の近傍で極大値となる 2 つの特性指数のうち大きい方の値を、(b) および (c) では  $\sigma_{1,\max}$  と  $\sigma_{2,\max}$  のうち大きい方の値を意味する。図中の等高線は、図 8 (Model A)では特性指数の最大値が  $-0.15 \sim 0.05$  までの範囲を  $0.025$  毎に、図 9 (Model B)では  $-0.05 \sim 0.04$  までの範囲を  $0.01$  毎に示している。また、細実線、太実線および破線はそれぞれ特性指数の最大値が正、零および負に対応し、(b) および (c) の紫線および青線はそれぞれ 1 次および 2 次モードを表す。一方、数値解析では与えられた系パラメータに対して状態遷移行列の固有値として 2 個 2 組の特性指数が同時に求められるが、これらとモードとの対応関係は直接的には求められないので、(a) ではモード別の区別はしていない。

図 3.8 および図 3.9 より、まず、両モデルともに新型複素モード解析による結果は数値解による結果と  $\alpha$  および  $\zeta_a$  の広い範囲で非常によく一致しているのに対して、実モード解析による結果は減衰比  $\zeta_a$  が大きくなるにつれて数値解から大きく異なることから、動吸振器の最適設計には実モード解析による結果を利用できないことがわかる。

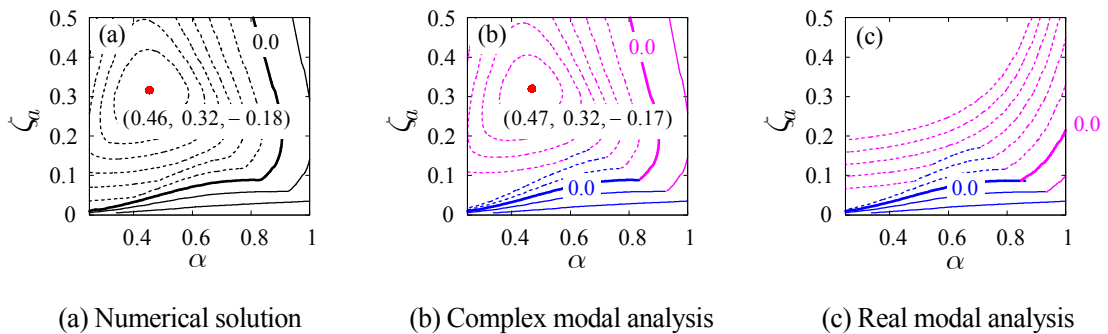


Fig. 3.8 Model A : The contour lines of the max value of the characteristic exponents. (a) The numerical results, (b) the approximate solutions based on the complex modal analysis and (c) the real modal analysis.

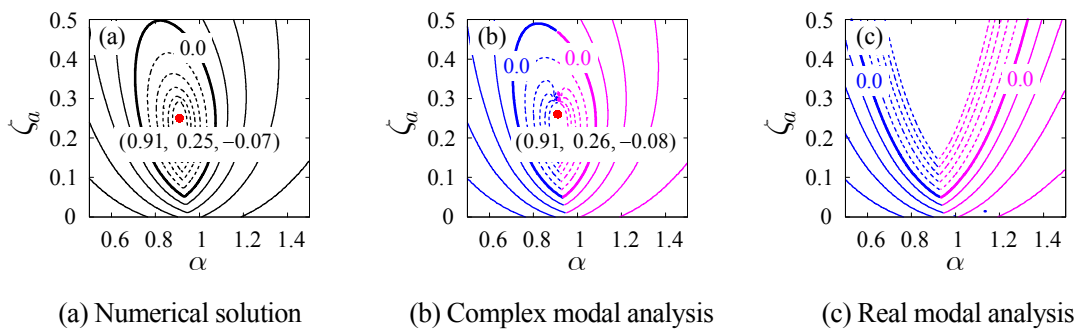


Fig. 3.9 Model B : The contour lines of the max value of the characteristic exponents. (a) The numerical results, (b) the approximate solutions based on the complex modal analysis and (c) the real modal analysis.

次に、動吸振器の最適設計について検討する。図 3.8 および図 3.9 から、Model A および Model B に対する特徴を踏まえた動吸振器の最適設計法の例として、次のような手順が考えられる。

(1) Model A に対する最適設計法 [図 3.8 (b) 参照] : 3.7 節の結果から、Model A では  $\sigma_{2,\max}$  は減衰比  $\zeta_a$  の増大に伴って単調減少するので、設計目標は  $\sigma_{1,\max}$  の最小化となる。以下に、最適値を探索する手順の具体例を示す。

Step1 : ある与えられた減衰比 に対して、 $\sigma_{1,\max}$  を最小化する  $\alpha$  を求める。

Step2 : Step1 で求めた  $\alpha$  に対して、 $\sigma_{1,\max}$  を最小化する  $\zeta_a$  を求める。

Step3 : 得られる  $\alpha, \zeta_a$  が収束するまで Step1, Step2 を繰り返す。

(2) Model B に対する最適設計法 [図 3.9(b) 参照] : 3.7 節で述べたように、 $\alpha = 0.9$  付近で  $\sigma_{1,\max}$  と  $\sigma_{2,\max}$  の大小関係が逆転する。そのため、ある動吸振器の減衰比  $\zeta_a$  に対しては、 $\sigma_{1,\max} = \sigma_{2,\max}$  となる場合に系全体の安定度が最も高くなる。このことから動吸振器の設計目標は  $\sigma_{1,\max} = \sigma_{2,\max}$  の最小化と考えられる。これらを踏まえ、最適値を探索する手順の具体例を以下に示す。

Step1 : ある与えられた減衰比 に対して、 $\sigma_{1,\max} = \sigma_{2,\max}$  となる  $\alpha$  を求める。

Step2 : Step1 で求めた  $\alpha$  に対して、 $\text{Max}(\sigma_{1,\max}, \sigma_{2,\max})$  を最小化する  $\zeta_a$  を求める。

Step3 : 得られる  $\alpha, \zeta_a$  が収束するまで Step1, Step2 を繰り返す。

図 3.8(b) および図 3.9(b) 中に示した赤色の点は、上記の手順で得られた最適なパラメータ  $\alpha, \zeta_a$  とその時の特性指数の最大値  $\text{Max}(\sigma_{1,\max}, \sigma_{2,\max})$ 、図 3.8(a) および図 3.9(a) に示す赤色の点は、これらの等高線図から求めた最適値である。このように、Model A および Model B ともに上記最適設計手順により等高線図中で最小となるパラメータを求められることが確認される。また、数値解と新型複素モード解析による最適値は非常に近い値となっていることがわかる。

なお、 $\sigma_{p,\max}$  の計算に際して、近似解法を用いない数値解法の場合には、まず与えられた  $\alpha, \zeta_a$  および  $\Omega$  に対して特性指数  $\sigma_p$  を求めるために数値積分による状態遷移行列の計算とその固有値計算が必要であり、さらに  $\Omega$  を変化させつつその最大値を探索しなければならない。一方、本報で提案した新型複素モード解析に基づく近似安定判別法によれば、与えられた  $\alpha, \zeta_a$  から固有ペアを求めさえすれば式 (3.10) から  $\sigma_{p,\max}$  が求められるので、数値解法に比べて計算コストの大幅な削減が可能である。さらに、近似解法は多自由度系に対してもそのまま適用可能であることから、系の自由度が増大するほどモード別に  $\sigma_{p,\max}$  を求めることのできる近似解法の優位性が増すことが期待される。

### 3.9 3章のまとめ

本章では、係数励振系に対する動吸振器の動作原理の解明と最適設計法の開発を目指して、動吸振器の動作形態がやや異なる 2 種類の基本的な解析モデル (Model A および Model B) を構築し、動吸振器の影響をエネルギー的な観点から検討した。本章で得られた知見を以下にまとめる。

(1) 運動方程式中の剛性の変動成分を励振項、それ以外を安定系として分離し、安定系の固有モードに基づく新型複素モード解析法を適用した。得られるモード別の運動方程式か



ら、主共振領域に対しては励振項のモード間の連成を無視し、結合共振領域に対してはモード間の連成のみを考慮した近似安定判別法を定式化した。比較のため、実モード解析に基づく近似安定判別法の概要についても示し、具体例に基づく数値的な検証の結果、**Model A** および **Model B** で発生する主共振領域および結合共振領域の両方において、新型複素モード解析に基づく近似安定判別法は高精度であることを確認した。一方、実モード解析に基づく近似安定判別法は減衰比が大きくなるにつれて精度の低下がみられた。

- (2) 上記の近似安定判別法に基づき、主共振領域におけるモード別の励振エネルギーおよび散逸エネルギーを解析的に導出し、動吸振器がそれぞれに与える影響について検討した。その結果、励振エネルギーは、**Model A** では全系のモード形状、**Model B** では固有角振動数と主系のモード形状に依存し、散逸エネルギーはモード減衰比の関数となるため動吸振器の減衰によって増加することを明らかにした。また、近似解が安定化するの、散逸エネルギーが励振エネルギーを上回る場合であることを解析的に示した。以上の結果から、動吸振器によって散逸エネルギーが励振エネルギーを上回るように安定系のモード減衰、固有角振動数およびモード形状を変化させ、1次および2次モードの主共振を安定化し、系全体の安定化を実現することが動吸振器の動作原理であることを明らかにした。これは **Model A** および **Model B** の両方に対して共通する動作原理であるが、動吸振器が励振エネルギーに及ぼす影響はモデルごとに異なることを解析と数値計算の両面から確認した。
- (3) **Model B** では動吸振器を付加することによって新たに結合共振領域が発生するが、僅かな減衰によって安定化されるため、動吸振器の最適設計にはほとんど考慮する必要がないことを明らかにした。また、モード間の連成により生成される励振エネルギーが2つのモードの固有角振動数、固有モードおよびモード減衰の差に依存することを示した。
- (4) 動吸振器のパラメータが系の安定性に及ぼす影響は、**Model A** と **Model B** で異なることが確認され、モデル別に動吸振器の効率的な最適設計手順を示した。具体的な計算例からその有効性を確認した。

以上の検討結果から、係数励振系に対する動吸振器の動作原理をエネルギー的な観点から説明した。次章からは、係数励振系の励振形態とは大きく異なる負性抵抗系および非対称行列系に対しても同様の検討を行い、3種類の自励振動系に対する動吸振器の動作原理について統一的に検討する。

## 第4章 負性抵抗系に対する動吸振器に関する検討

第3章では、係数励振系に対して動吸振器が励振エネルギーおよび散逸エネルギーに及ぼす影響をモード別に検討することにより、系の完全な安定化に果たす動吸振器の役割を明らかにした。この結果は他の自励振動系に対しても共通する可能性が高いと考えられる。そこで、本章では、係数励振系での検討手順と同様に負性抵抗系に対する動吸振器について検討する。

本章では、負性抵抗系に対する動吸振器の解析モデルとして、第1章で述べた Tondl が取り扱ったギャロッピングが発生する系に動吸振器を取り付けた2自由度解析モデル<sup>(44)</sup>を参考にする。負性抵抗系に動吸振器を付加した解析モデルの多くは、本質的にはこのモデルに集約される。なお、オートパラメトリック系のような非線形連成に基づく振り子型の動吸振器は、本研究では取り扱わない。

負性抵抗系に対しても安定系と励振項とに分離して動吸振器の影響を調べるが、本章で取り扱う解析モデルの場合、負の減衰項が励振項、それ以外の正の減衰を含む系を安定系と見なすことができる。そこで、第2章で述べた新型複素モード解析を用いて安定系に基づくモード方程式を導出し、負性抵抗系に対するモード別の近似安定判別法を定式化する。比較のため、実モード解析に基づくモード別近似安定判別法の概要についても示し、数値的な厳密解と近似安定判別法の数値計算結果から、提案した解析手法と得られる結果の妥当性および実モード解析法との優位性について検証する。

このモード別近似安定判別法を用いて、負性抵抗に起因する励振力によって生成されるモード別の励振エネルギーと減衰要素によって消費される散逸エネルギーに及ぼす動吸振器の影響を解析的に検討し、動作原理を明らかにする。さらに、動吸振器の最適設計法について数値的な検討結果に基づき検討する。

### 4.1 解析モデルおよび基礎式

本章では、動吸振器を付加した負性抵抗系の典型例として、Tondl<sup>(44)</sup>が取り扱った図4.1に示すような基本的な2自由度解析モデルを用いる。図4.1に示す解析モデルは、質量 $m$ の主系の質点がばね定数 $k$ のばねと減衰係数 $c$ の減衰要素によって支持され、主系の質点には、質量 $m_a$ 、ばね定数 $k_a$ および減衰係数 $c_a$ の動吸振器が取り付けられている。また、主系は密度 $\rho$ 、流速 $V$ の定常流中にあり、流れに対する相対角度を迎角 $\theta$ 、流れに垂直な方向の代表長さを $D$ 、 $x$ 方向の流体力係数を $C_x(\theta)$ とおく。このとき、主系に作用する単位奥行長さあたりの流体力の $x$ 方向成分 $F_x$ を、 $x$ に関して線形化し、次式のように仮定する<sup>(7)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -\frac{1}{2}\rho V^2 D(c_0 + c_N \theta) \\ \theta &= \frac{\dot{x}}{V}, \quad c_0 = C_x(0), \quad c_N = \frac{\partial C_x(0)}{\partial \theta} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

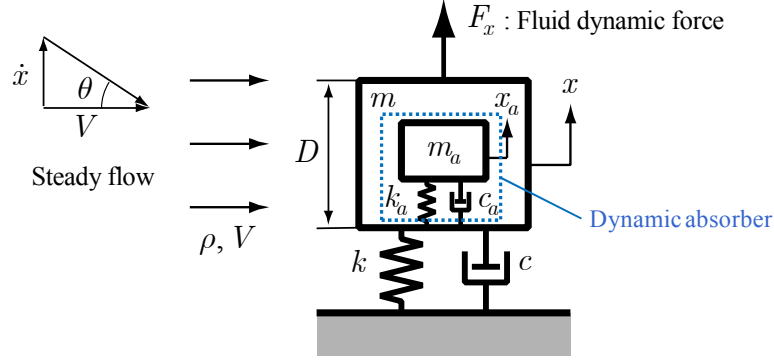


Fig. 4.1 Analytical model of the system with negative damping in which one dynamic absorber is attached.

ここに、 $c_N$  は流体力係数  $C_x(\theta)$  の  $\theta = 0$  における勾配を表し、ギャロッピングは  $C_x(\theta)$  が負の勾配を有する場合に発生するため、 $c_N$  は負と定義する。

ここで、改めて  $x, x_a$  を静的平衡状態からの変位に置きなおすと、線形化された運動方程式は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
 & \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{f}_N = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}_N = \mathbf{C}_N \dot{\mathbf{x}} \\
 & \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \omega_n^2 \begin{bmatrix} 1 + \kappa\alpha^2 & -\kappa\alpha^2 \\ -\kappa\alpha^2 & \kappa\alpha^2 \end{bmatrix}, \\
 & \mathbf{C} = 2\omega_n \begin{bmatrix} \zeta_n + \kappa\zeta_a\alpha & -\kappa\zeta_a\alpha \\ -\kappa\zeta_a\alpha & \kappa\zeta_a\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_N = \omega_n \begin{bmatrix} c_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \kappa = \frac{m_a}{m}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}, \quad \alpha = \frac{\omega_a}{\omega_n}, \\
 & \zeta_n = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \quad \zeta_a = \frac{c_a}{2\sqrt{m_a k_a}}, \quad \varepsilon = \frac{\rho DV}{2m\omega_n}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

ここに、 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  はいずれも  $2 \times 2$  の実対称正定行列、 $\varepsilon \mathbf{f}_N$  は流体力に関する項であり、 $\mathbf{C}_N$  を負性抵抗行列と呼ぶ。また、このモデルでは流体力は主系にのみ作用し、負性抵抗の影響は動吸振器には現れない。

動作原理の解明のため、物理座標の運動方程式を安定系と不安定化の要因となる励振項とに分離し、動吸振器の影響を検討するが、本章で取り扱う解析モデルでは、式 (4.2) で  $\varepsilon = 0$  と置いた系が安定系であり、 $\varepsilon \mathbf{f}_N$  が不安定化の要因を表す励振項である。また、以下では負性抵抗および正の減衰は大きくないものと考え、 $\zeta_n, \zeta_a, \varepsilon$  は微小量と仮定する。

## 4.2 新型複素モード解析に基づくモード方程式の導出

本節では、第2章で述べた新型複素モード解析法を図4.1の解析モデルで表される負性抵抗系に対して適用し、安定系に基づくモード方程式を導出する。まず、式 (2.1) の励振力  $\varepsilon \mathbf{f}_S$  が

本節では $\varepsilon \mathbf{f}_N$ であること、および式 (2.13) を用いると、 $\varepsilon \mathbf{f}_N$  および $\varepsilon \dot{\mathbf{f}}_N$  について $\varepsilon$  の 1 次のオーダーの近似は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \mathbf{f}_N &= \varepsilon \mathbf{C}_N \dot{\mathbf{x}} \approx \varepsilon \mathbf{C}_N (-{}^R \Phi_{12} \Omega^2 \boldsymbol{\xi} + {}^R \Phi_{22} \dot{\boldsymbol{\xi}}) \\ \varepsilon \dot{\mathbf{f}}_N &= \varepsilon \mathbf{C}_N \ddot{\mathbf{x}} \approx \varepsilon \mathbf{C}_N (-{}^R \Phi_{12} \Omega^2 \dot{\boldsymbol{\xi}} + {}^R \Phi_{22} \ddot{\boldsymbol{\xi}}) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

第 2 章で導出した式 (2.14) のモード方程式に、式 (4.3) を代入し、モード減衰を含む微小量の 1 次のオーダーで近似すると、負性抵抗系に対するモード方程式は次のように導出される。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + 2\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\Omega}\dot{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\Omega}^2\boldsymbol{\xi} &= -\varepsilon\tilde{\mathbf{A}}_3^T\ddot{\boldsymbol{\xi}} - \varepsilon(\tilde{\mathbf{A}}_1 - \tilde{\mathbf{A}}_2\tilde{\Omega}^2)\dot{\boldsymbol{\xi}} + \varepsilon\tilde{\mathbf{A}}_3\tilde{\Omega}^2\boldsymbol{\xi} \\ \tilde{\mathbf{A}}_1 &= {}^R\Phi^T\mathbf{C}_N{}^R\Phi, \quad \tilde{\mathbf{A}}_2 = (\tilde{\Omega}^{-1}{}^I\Phi^T)\mathbf{C}_N({}^I\Phi\tilde{\Omega}^{-1}), \quad \tilde{\mathbf{A}}_3 = {}^R\Phi^T\mathbf{C}_N({}^I\Phi\tilde{\Omega}^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

このように、新型複素モード解析法によれば、負性抵抗系に対しても式 (4.4) の左辺のように質量、減衰および剛性行列を同時に対角化した上で、モード方程式を 2 階の実常微分方程式として導出することが可能である。その一方で、右辺の負性抵抗に関する項 $\tilde{\mathbf{A}}_j$ ,  $j=1\sim 3$  は対角化されず、 $\dot{\boldsymbol{\xi}}$  や $\boldsymbol{\xi}$  に関する項が現れる。

### 4.3 モード別近似安定判別法

モード別の励振エネルギーおよび散逸エネルギーを高精度で導出するため、本節では、4.2 節で求めたモード方程式から近似的な特性根 (近似特性根) を導出し、モード別近似安定判別法を定式化する。まず、動吸振器のパラメータ $\alpha, \zeta_a$  を広範囲に変化させて式 (4.2) に通常安定判別法を適用した結果、発生する不安定振動の振動数は流体力が作用しない減衰自由振動系の 1 次と 2 次の固有振動数にそれぞれ非常に近く、モード間の連成に基づく不安定振動の発生は確認されなかった。このことは、式 (4.4) 右辺の $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \tilde{\mathbf{A}}_3$  の非対角項 (モード間の連成項) の影響が無視できるほど小さいことを意味する。これは、式 (4.4) 右辺の $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \tilde{\mathbf{A}}_3$  を対角項を零とした場合に、通常安定判別法を適用した結果、不安定解が発生しなかったことから確認できる。そこで、本節では $\tilde{\mathbf{A}}_j = \text{diag}[\tilde{\delta}_{j,1}, \tilde{\delta}_{j,2}]$  ( $j=1\sim 3$ ) のような対角行列で近似し、単一モードの不安定振動について検討する。このとき、モード別の運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_p + 2\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p\dot{\xi}_p + \tilde{\omega}_p^2\xi_p &= -\varepsilon\tilde{\delta}_{3,p}\ddot{\xi}_p - \varepsilon(\tilde{\delta}_{1,p} - \tilde{\delta}_{2,p}\tilde{\omega}_p^2)\dot{\xi}_p + \varepsilon\tilde{\delta}_{3,p}\tilde{\omega}_p^2\xi_p \\ \tilde{\delta}_{1,p} &= {}^R\phi_p^T\mathbf{C}_N{}^R\phi_p < 0, \quad \tilde{\delta}_{2,p} = \frac{{}^I\phi_p^T\mathbf{C}_N{}^I\phi_p}{\tilde{\omega}_p^2} < 0, \quad \tilde{\delta}_{3,p} = \frac{{}^R\phi_p^T\mathbf{C}_N{}^I\phi_p}{\tilde{\omega}_p} \end{aligned} \right\} (p=1, 2) \quad (4.5)$$

${}^R\phi_p, {}^I\phi_p$  は複素モード ${}^C\phi_p$  の実部と虚部である。式 (4.5) の $p$  次モードの特性根を $s_p = {}^R s_p + i {}^I s_p$  とおくと、 $p$  次モードの基本解は次のように表される。

$$\xi_p = A_p e^{s_p t} \cos({}^I s_p t + \psi_p) \quad (4.6)$$

ここに、 $A_p$  および  $\psi_p$  は基本解の振幅および位相差を表し、これらは初期条件によって定まる値である。また、4.1 章で述べたように、減衰および  $\varepsilon$  に関する項が大きくない場合を取り扱っているため、特性根の実部  ${}^R s_p$  は微小量の 1 次のオーダーであると仮定できる。式 (4.6) を式 (4.5) に代入して得られる特性方程式から  ${}^R s_p$  および  ${}^I s_p$  の微小量の 1 次のオーダーの近似特性根は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} {}^R s_p &= -\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p - \frac{\varepsilon}{2} (\tilde{\delta}_{1,p} - \tilde{\delta}_{2,p} \tilde{\omega}_p^2) \\ {}^I s_p &= \tilde{\omega}_p (1 - \varepsilon \tilde{\delta}_{3,p}) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

式 (4.7) より、 ${}^R s_p$  が負であれば  $p$  次モードの基本解は安定、正であれば不安定と判別できる。また、基本解の角振動数  ${}^R s_p$  は  $p$  次モードの固有角振動数  $\tilde{\omega}_p$  に近いことがわかる。一方、 $p$  次モードの不安定振動が発生する限界流速  $V_{C,p}$  は、 ${}^R s_p = 0$  の条件より求められ、式 (4.7) および  $\varepsilon = \rho DV / (2m\omega_n)$  を考慮すると、次のように表される。

$$V_{C,p} = -\frac{4m\omega_n}{\rho D} \frac{\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p}{\tilde{\delta}_{1,p} - \tilde{\delta}_{2,p} \tilde{\omega}_p^2} > 0 \quad (4.8)$$

式 (4.8) より、 $V < V_{C,p}$  であれば、 $p$  次モードの基本解は安定と判別できる。

#### 4.4 実モード解析に基づくモード別近似安定判別法

上記手法との比較のため、本節では実モード解析に基づく近似安定判別法の概要について説明する。まず、第 2 章の 2.2 節で述べた実モード解析法に基づくモード方程式から、式 (2.1) の励振力  $\varepsilon f_S$  が本節では  $\varepsilon f_N$  であることであること、および実モード座標への変換  $\mathbf{x} = \hat{\Phi} \boldsymbol{\xi}$  を考慮すると、モード方程式は次のように導出される。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\Phi}^T \mathbf{C} \hat{\Phi} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\Omega}^2 \boldsymbol{\xi} &= -\varepsilon \hat{\Delta}_0 \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \hat{\Delta}_0 &= \hat{\Phi}^T \mathbf{C}_N \hat{\Phi} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

このように、実モード解析では、質量行列と剛性行列は同時に対角化されるが、減衰行列と負性抵抗行列は一般的には対角化されない。

そこで、モード別の近似特性根を導出するため、式 (4.9) の減衰行列  $\hat{\Phi}^T \mathbf{C} \hat{\Phi}$  および負性抵抗行列  $\hat{\Delta}_0$  の非対角項の影響は小さいとみなして無視し、 $\hat{\Phi}^T \mathbf{C} \hat{\Phi} = \text{diag}[2\hat{\zeta}_1 \hat{\omega}_1 \quad 2\hat{\zeta}_2 \hat{\omega}_2]$  および  $\hat{\Delta}_0 = \text{diag}[\hat{\delta}_{0,1} \quad \hat{\delta}_{0,2}]$  のような対角行列で近似すると、次のようなモード別の方程式が導出される。

$$\ddot{\xi}_p + 2\hat{\zeta}_p \hat{\omega}_p \dot{\xi}_p + \hat{\omega}_p^2 \xi_p = -\varepsilon \hat{\delta}_{0,p} \dot{\xi}_p \quad (4.10)$$

式 (4.10) に対して 4.3 節の式 (4.6) 以下と同様の手続きを適用すると、モード別の近似特性根は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} R_{s_p} &= -\hat{\zeta}_p \hat{\omega}_p - \frac{\varepsilon}{2} \hat{\delta}_{0,p} \\ I_{s_p} &= \hat{\omega}_p \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

式 (4.11) より,  $R_{s_p}$  が負であれば  $p$  次モードの基本解は安定, 正であれば不安定と判別できる. また,  $p$  次モードの限界流速についても, 式 (4.8) の導出と同様の手続きにより次のように求められる.

$$V_{C,p} = -\frac{4m\omega_n}{\rho D} \frac{\hat{\zeta}_p \hat{\omega}_p}{\hat{\delta}_{0,p}} > 0 \quad (4.12)$$

式 (4.12) より,  $V < V_{C,p}$  であれば,  $p$  次モードの基本解は安定と判別できる.

## 4.5 数値的検証

本節では, 4.3 節で示したモード別近似安定判別法の有効性を検証するため, 新型複素モード解析に基づく近似特性根の精度を, 数値的厳密解および実モード解析に基づく近似特性根と比較する. ただし, ここでの数値的厳密解とは, 第3章の特性指数とは異なり, 式 (4.2) の元の物理座標の方程式から特性方程式を導出し, 複素固有値解析により数値的に求めた厳密解とみなし得るほどに高精度の特性根を意味する. 表 4.1 に数値計算に用いた解析モデルのパラメータを示す. なお, これらのパラメータ値は特徴的な結果が得られるように調整した値であって実際例に基づくものではないが, これ以外のパラメータに対しても同様の傾向を示すことを数値的に確認している.

図 4.2 に各手法で求められた不安定領域および限界流速の計算結果を示す. 図の横軸および縦軸はそれぞれ主系に対する動吸振器の振動数比  $\alpha$  および流速  $V$  であり, 実線は近似特性根から求められた限界流速  $V_{C,p}$ , 点で表される領域は数値的厳密解から求められた不安定領域を示す. 紫色および青色はそれぞれ 1 次モードおよび 2 次モードの限界流速を示し, 主系単体時の限界流速  $V_{C,0}(=0.0)$  は灰色の実線として表す.  $V > V_{C,p}$  の領域において  $p$  次モードは不安定となり, 特に  $\zeta_a = 0.0$  の場合には  $V_{C,1} = V_{C,2} = 0.0$  となるため, 全領域において 1 次モードおよび 2 次モードは不安定であることを意味している.

図 4.2(a) は新型複素モード解析に基づく近似安定判別法の結果である.  $\zeta_a = 0.0, 0.1, 0.5$  のいずれの場合に対しても近似特性根による限界流速と数値的厳密解による安定不安定境界 (数値的厳密解の限界流速) がよく一致しており, 近似特性根は非常に高精度であることが確認できる. なお,  $\zeta_a = 0.5$  のときに  $\alpha \approx 0.9$  付近で  $V_{C,2}$  と  $V_{C,1}$  が入れ替わるのは,  $\alpha \approx 0.9$  付近を境に固有角振動数の大小関係が逆転したためである. 一方, 実モード解析に基づく近似安定判別法の結果は, 動吸振器の減衰比  $\zeta_a$  が比較的小さい  $\zeta_a = 0.0, 0.1$  のときには図 4.2(b) に示すように数値的厳密解による結果とほぼ一致し, 高精度であることを確認している. しかしながら,  $\zeta_a = 0.5$  になると数値的厳密解の限界流速よりも大きな値となる. このように, 実モード解析では減衰行列の非対角項を無視しているため,  $\zeta_a$  が大きくなるにつれて精度が低下する.

Table 4.1 Parameter values of the analytical model used in numerical computation

$\omega_n$ [rad/s]	$\kappa$	$\zeta_n$	$\varepsilon$	$\zeta_a$	$c_N$
1.0	0.1	0.0	$0.025 \times V$	0.0, 0.1, 0.5	-3.0

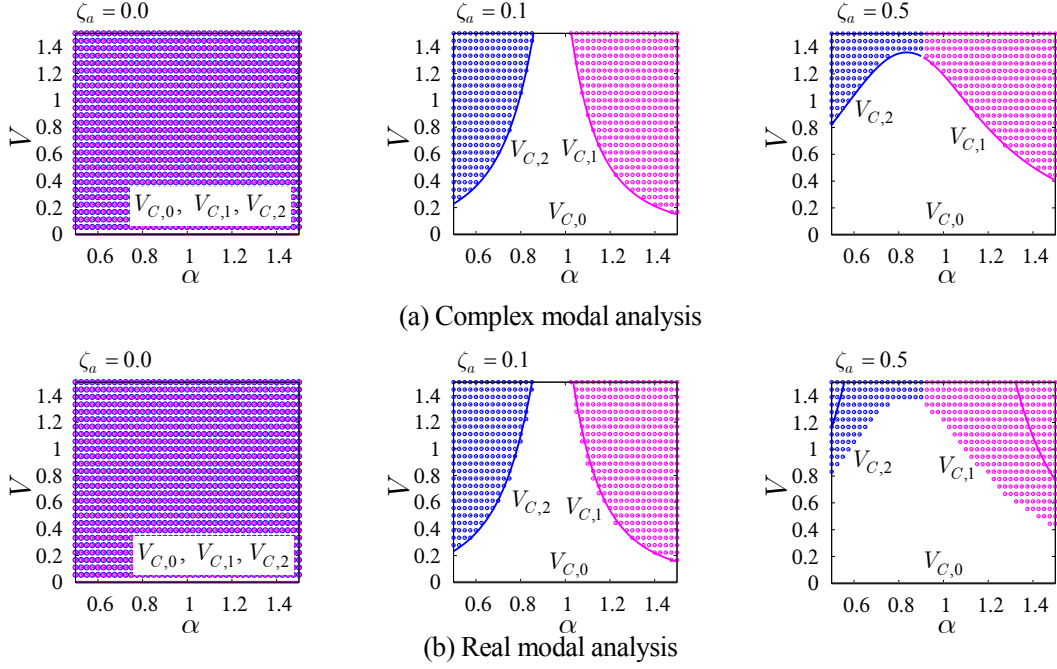


Fig. 4.2 The unstable regions obtained by the numerical solutions (dots) and the approximate critical velocities (lines)

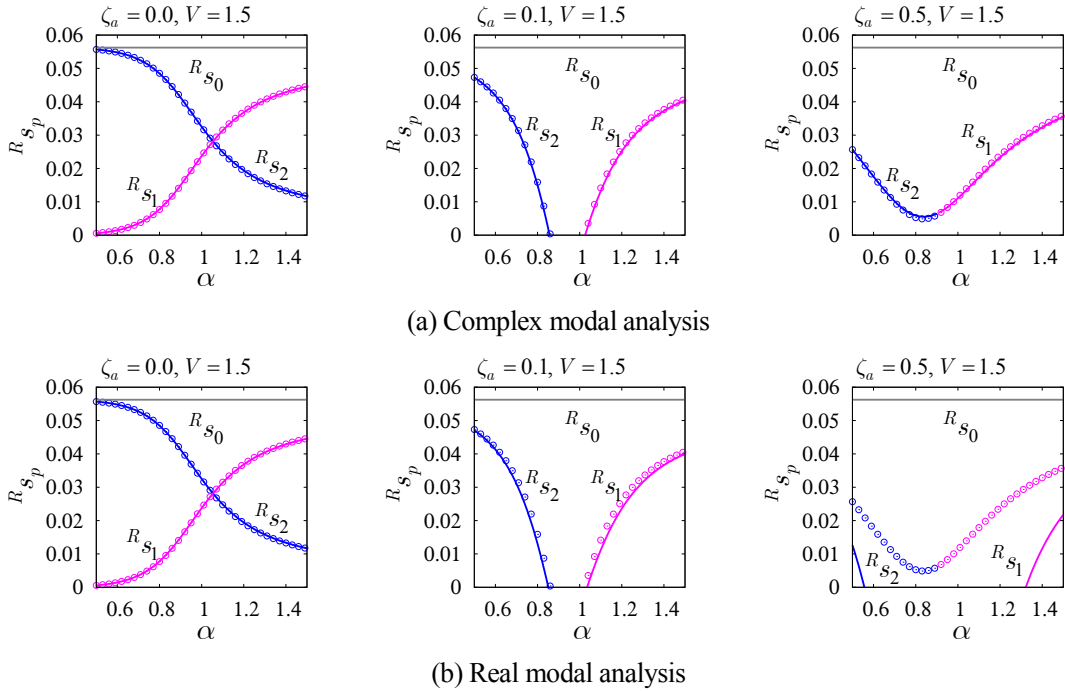


Fig. 4.3 The approximate real parts of characteristic roots (lines), the numerical solutions (dots) and that obtained for the system without a dynamic absorber (gray line)

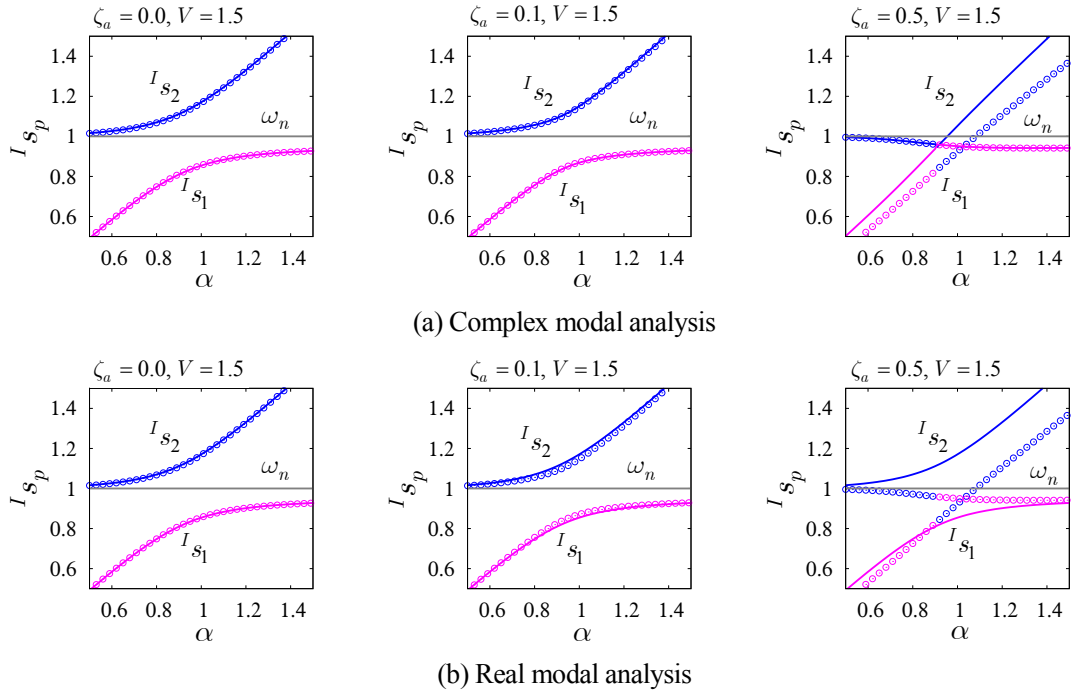


Fig. 4.4 The approximate imaginary parts of characteristic roots (lines), the numerical solutions (dots) and that obtained for the system without a dynamic absorber (gray line)

図 4.3 および図 4.4 は、 $V = 1.5$  のときの特性根の実部 $R_{s_p}$  および虚部 $I_{s_p}$  と動吸振器の減衰比 $\alpha$  との関係を示したものである。実線は近似特性根、丸印は数値的厳密解であり、灰色の実線は主系単体時の特性根の実部 $R_{s_0}$  および主系単体の固有角振動数 $\omega_n$  を表す。

図 4.3(a) および図 4.4(a) は新型複素モード解析に基づく近似安定判別法の結果であるが、 $\zeta_a = 0.0, 0.1, 0.5$  のいずれの減衰比に対しても近似特性根の実部 $R_{s_p}$  は数値的厳密解とよく一致しており、高精度であることが確認できる。なお、 $\zeta_a = 0.5$  の場合に $\alpha \approx 0.9$  付近で $R_{s_1}$  と $R_{s_2}$  が入れ替わるのは、図 4.4(a) で示すように $\alpha \approx 0.9$  を境に固有角振動数の大小関係が逆転したためである。また、この境の値 $\alpha \approx 0.9$  以下では $R_{s_1}$  が、 $\alpha \approx 0.9$  以上では $R_{s_2}$  の値が負の側の非常に大きな値となり、図中には現れていない。近似特性根の虚部 $I_{s_p}$  については、図 4.4(a) より、 $\zeta_a = 0.0, 0.1$  の場合には非常によく一致しているが、 $\zeta_a = 0.5$  では、 $I_{s_1}$  と $I_{s_2}$  が一致する $\alpha \approx 0.9$  を境に、 $\alpha \approx 0.9$  以下では $I_{s_1}$  が、 $\alpha \approx 0.9$  以上では $I_{s_2}$  の値が数値的厳密解と多少異なる。このような領域では特性根の実部 $R_{s_p}$  が負の側の非常に大きな値となるため、微小量の近似の精度が低下したと考えられる。しかしながら、近似特性根の実部が負の側に大きい値であるため、安定判別の結果に大きな影響を及ぼさない。

一方、図 4.3(b) に示すように、実モード解析に基づく近似安定判別法の結果は、 $\zeta_a = 0.0, 0.1$  の場合には非常によく一致しているが、 $\zeta_a = 0.5$  のときには近似特性根の実部が数値的厳密解の結果よりも小さな値となり、図 4.2(b) と同様に $\zeta_a$  が大きくなるにつれて精度が低下する。このように、動吸振器の減衰比が大きい場合には、実モード解析では本来不安定である領域を安定と判別してしまう恐れがあることから、これを動吸振器の設計に利用するのは危険であるといえる。



ところで、動吸振器が不安定領域に対して及ぼす影響に関しては、図 4.2(a) , 図 4.3(a)および図 4.4(a) から、次のことがわかる。すなわち、動吸振器の付加によって 2 つのモードの不安定領域が発生するが、主系単体時よりも不安定度は小さくなる。しかしながら、これらの不安定領域は動吸振器に減衰がない場合には  $\alpha$  の全領域において安定化しない。一方、動吸振器の減衰比  $\zeta_a$  が比較的小さいとき、 $\zeta_a$  の増大に伴って 1 次と 2 次モードの不安定領域も縮小し、 $V = 1.5$ ,  $\zeta_a = 0.1$  の場合には  $\alpha$  が約 0.9 近傍のとき系全体の安定化を実現することができる。ところが、減衰比がある値を超えてさらに大きくなると 1 次および 2 次モードの不安定領域が徐々に拡大する。これは、第 3 章で述べた係数励振系の場合と同様に、主系と動吸振器との相対速度に比例する減衰の効果が小さくなることが原因であり、実モード解析ではこの影響を精度よく表すことができない。以上のことから、動吸振器には適切な振動数比  $\alpha$  と減衰比  $\zeta_a$  が存在することがわかる。この点に関しては 4.7 節で改めて検討する。

## 4.6 動吸振器の動作原理に関する検討

### 4.6.1 動吸振器の動作原理のエネルギー的検討

本項では、負性抵抗に起因する自励振動が動吸振器により安定化するメカニズム（動作原理）をエネルギー的観点から検討する。4.5 節の結果より、動吸振器によって分離する 2 つのモードがそれぞれ適切な減衰によって安定化することが確認された。このことから、動吸振器がモード別の励振エネルギーおよび散逸エネルギーに対してそれぞれ及ぼす影響を検討することにより、動作原理を解明できる可能性が高いと考える。そこで、第 3 章と同様に負性抵抗に起因するモード別の励振力  $F_{N,p}$  および減衰力  $F_{D,p}$  により供給・消費されるエネルギーを、4.3 節で述べた近似安定判別法に基づき導出する。まず、モード別の減衰力  $F_{D,p}$  は式 (4.5) 左辺の減衰項を右辺に移項した項、モード別の励振力  $F_{N,p}$  は右辺の励振項として次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} F_{D,p} &= -2\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p \dot{\xi}_p \\ F_{N,p} &= -\varepsilon \tilde{\delta}_{3,p} \ddot{\xi}_p - \varepsilon (\tilde{\delta}_{1,p} - \tilde{\delta}_{2,p} \tilde{\omega}_p^2) \dot{\xi}_p + \varepsilon \tilde{\delta}_{3,p} \tilde{\omega}_p^2 \xi_p \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

また、4.3 節で求めた式 (4.6) の基本解から、安定不安定境界近傍 ( $R_{s,p} \approx 0$ ) における  $p$  次モードの基本解を次のような調和振動で近似する。

$$\xi_p = A_p \cos({}^I s_p t + \psi_p) \quad (4.14)$$

系が式 (4.14) の  $p$  次モードで調和振動しているとき、式 (4.13) の  $F_{D,p}$  および  $F_{N,p}$  が任意の時刻  $T$  から  $T + 2\pi/{}^I s_p$  の間（調和振動の 1 周期間）になす仕事をエネルギー積分から求め、 $E_p = \tilde{\omega}_p^2 A_p^2$  ( $p$  次モードの不減衰自由振動系の力学的エネルギー相当量) および  $T_p = 2\pi/\tilde{\omega}_p$  ( $p$  次モードの固有周期) で正規化したものをそれぞれ  $W_{D,p}$  および  $W_{N,p}$  とすると、微小量の 1 次のオーダーの近似は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} W_{D,p} &= \frac{1}{E_p T_p} \int_T^{T+2\pi/l_s p} (F_{D,p} \dot{\xi}_p) dt = -\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p (< 0) \\ W_{N,p} &= \frac{1}{E_p T_p} \int_T^{T+2\pi/l_s p} (F_{N,p} \dot{\xi}_p) dt = -\frac{\varepsilon}{2} (\tilde{\delta}_{1p} - \tilde{\delta}_{2p} \tilde{\omega}_p^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

式 (4.15) で表される  $-W_{D,p}$  および  $W_{N,p}$  が, それぞれモード別の励振エネルギーおよび散逸エネルギーに相当する. このとき,  $W_{N,p} + W_{D,p}$  については式 (4.7) より次式が成立する.

$$W_{N,p} + W_{D,p} = -\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p - \frac{\varepsilon}{2} (\tilde{\delta}_{1p} - \tilde{\delta}_{2p} \tilde{\omega}_p^2) = R_{s_p} \quad (4.16)$$

式 (4.17) より, 負性抵抗系の  $p$  次モードの基本解が安定 ( $R_{s_p} < 0$ ) になるのは, 減衰によって消費される散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  が負性抵抗から供給される励振エネルギー  $W_{N,p}$  を上回る場合であることがわかる. つまり, 動吸振器によってモード別の安定化を実現するためには, 散逸エネルギーが励振エネルギーを上回るように変更しなければならない.

そこで, 次に, 動吸振器が負性抵抗によって生成される励振エネルギー  $W_{N,p}$  および減衰要素によって消費される散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  に及ぼす影響をそれぞれ検討する. まず, 散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  については, 式 (4.15) より減衰自由振動系のモード減衰  $\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p$  の関数として表される. つまり,  $p$  次モードの基本解の安定化のためには  $-W_{D,p}$  が大きい方が望ましいので, 動吸振器の減衰を付加することによってモード減衰  $\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p$  がなるべく大きくなるように調整すれば良いことがわかる.

一方, 励振エネルギー  $W_{N,p}$  については, まず, 式 (4.5) より  $\tilde{\delta}_{1,p} = {}^R \phi_p^T \mathbf{C}_N {}^R \phi_p$  および  $\tilde{\delta}_{2,p} = {}^I \phi_p^T \mathbf{C}_N {}^I \phi_p / \tilde{\omega}_p^2$  であることから,  ${}^R \phi_p = [{}^R \phi_p \quad {}^R \phi_{a,p}]^T$ ,  ${}^I \phi_p = [{}^I \phi_p \quad {}^I \phi_{a,p}]^T$  とおくと,  $W_{N,p}$  は次のように表される. ただし,  ${}^R \phi_p$ ,  ${}^I \phi_p$  は主系,  ${}^R \phi_{a,p}$ ,  ${}^I \phi_{a,p}$  は動吸振器のモード振幅の実部と虚部である.

$$W_{N,p} = -\frac{\varepsilon}{2} c_N \omega_n ({}^R \phi_p^2 - {}^I \phi_p^2) \quad (4.17)$$

すなわち,  $W_{N,p}$  は減衰自由振動系の主系の固有モードの関数として表されることがわかる.  $p$  次モードの基本解の安定化のためには  $W_{N,p}$  は小さい方が望ましいので, 式 (4.17) より動吸振器によって主系のモード振幅が小さくなるように調整すればよいことがわかる. ただし, 不減衰時には  ${}^I \phi_p = \mathbf{0}$  であることから  $W_{N,p} > 0$  となるため, 負性抵抗系を動吸振器によって完全に安定化させるためには正の減衰が必要不可欠である.

以上より, 動吸振器の付加によりモード形状を変化させて  $W_{N,p}$  を調整するとともに, 動吸振器の減衰により  $-W_{D,p}$  を増加させて  $-W_{D,1} > W_{N,1}$  および  $-W_{D,2} > W_{N,2}$  とすることができれば系の完全な安定化が実現される. これが負性抵抗系に対する動吸振器の動作原理である.

なお, 式 (4.17) からわかるように, 励振エネルギー  $W_{N,p}$  は主系のモード振幅のみ依存しており, 動吸振器のモード振幅は直接的には関係しない. このような系に対しては, 詳しい導出過程については付録 A2.1 で述べるが, 不減衰系 ( $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ) の場合, 動吸振器を付加する前後の励振エネルギーに対して次の関係が成立する.

$$W_{N,1} + W_{N,2} = -\frac{\varepsilon}{2} c_N \omega_n = W_{N,0} \quad (4.18)$$

ここに、 $W_{N,0}$  は主系単体時の負性抵抗に起因する励振力から上と同様の手順で  $W_{N,p}$  相当の励振エネルギーを求めたものである。式 (4.18) より、 $W_{N,1}, W_{N,2}$  は  $W_{N,0}$  よりも必ず小さくなるように分散化することがわかる。この性質は、図 4.3(a) の  $\zeta_a = 0$  に示したように、動吸振器付加時のモード別近似特性根の実部  $R_{s_p}$  と主系単体時の近似特性根の実部  $R_{s_0}$  との関係が、 $R_{s_1}, R_{s_2} < R_{s_0}$  となることに対応している。この特徴は第 3 章で述べた Model B の係数励振系の結果と同様である。

#### 4.6.2 エネルギーに関する数値計算例

本項では、励振エネルギー  $W_{N,p}$  および散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  等の系の安定性を支配する物理量に及ぼす動吸振器の振動数比  $\alpha$  および減衰比  $\zeta_a$  の影響について、具体例に基づいて検討する。数値計算には  $V = 1.5$ ，その他のパラメータについては表 4.1 と同様の値を用い、動吸振器の振動数比  $\alpha$  および減衰比  $\zeta_a$  を変化させた。図 4.5 に、(a) 固有角振動数  $\tilde{\omega}_p$ ，(b) 励振エネルギー  $W_{N,p}$  [式 (4.15)]，(c) 散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  [式 (4.15)]，(d) 近似特性根の実部  $R_{s_p}$  [式 (4.7)] と動吸振器の振動数比  $\alpha$  との関係を示している。

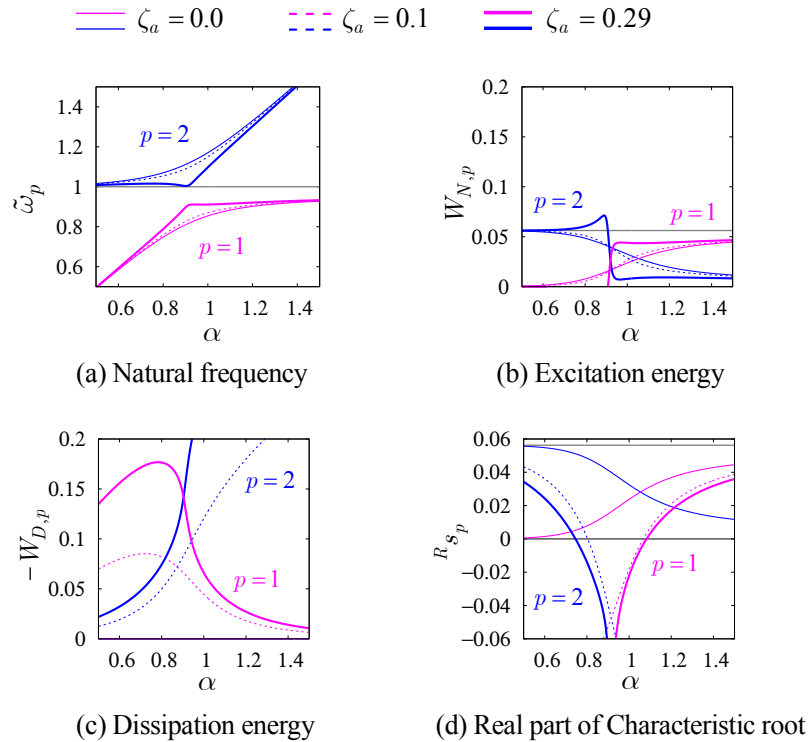


Fig. 4.5 The natural frequencies, the excitation energies, the dissipation energies and the approximate real parts of the characteristic roots.

また、図中の細実線、破線および太実線はそれぞれ動吸振器の減衰比が  $\zeta_a = 0.0, 0.1$  および  $0.29$  のときの結果であり、紫色は1次モード、青色は2次モード、灰色は主系単体時の結果を示す。ただし、 $\zeta_a = 0.29$  は、4.7節で求められた  $\zeta_a$  の最適値である。なお、 $\alpha$  および  $\zeta_a$  が最適値から大きく離れると完全な安定化は実現できないので、以下では最適値の近傍に絞って検討する。

- (1)  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$  に及ぼす影響 [図 4.5(a)] : 全体的な傾向として  $\zeta_a$  が同じであれば  $\alpha$  が増大するにつれて  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$  ともに増大し、同じ  $\alpha$  に対しては  $\zeta_a$  が増大するにつれて  $\tilde{\omega}_1$  は増大するのに対して  $\tilde{\omega}_2$  は減小する。
- (2)  $W_{N,1}, W_{N,2}$  に及ぼす影響 [図 4.5(b)] : 全体的な傾向として  $\alpha$  が増大するにつれて  $W_{N,1}$  は増大して  $W_{N,0}$  に下から漸近するのに対して、 $W_{N,2}$  は  $W_{N,0}$  から減小し、 $\alpha = 0.9 \sim 1.0$  付近で両者の大小関係が逆転する。
- (3)  $-W_{D,1}, -W_{D,2}$  に及ぼす影響 [図 4.5(c)] : 全体的な傾向として  $\alpha$  が増大するにつれて  $-W_{D,1}$  は減小するのに対して  $-W_{D,2}$  は増大し、 $\alpha = 0.9$  付近で両者の大小関係が逆転する。
- (4)  $R_{s_1}, R_{s_2}$  に及ぼす影響 [図 4.5(d)] : 全体的な傾向として  $\alpha$  が増大するにつれて  $R_{s_1}$  は増大するのに対して  $R_{s_2}$  は減小し、 $\alpha = 0.9$  付近で両者の大小関係が逆転する。

#### 4.7 動吸振器の最適設計法

4.5節の数値計算結果から、負性抵抗に起因する自励振動の完全な安定化には、動吸振器の振動数比  $\alpha$  および減衰比  $\zeta_a$  に適切な値が存在することが明らかになった。この結果を踏まえ、本節では、負性抵抗系に対する動吸振器の最適設計法について検討する。

まず、最適設計の目標値については第3章の3.8節と同様の考えのもと、 $\text{Max}(R_{s_1}, R_{s_2})$  の最小化を図るのが妥当であると考えられる。図 4.6 は、図 4.1 の解析モデルに対して求めた特性根の実部  $R_{s_p}$  の等高線図を示す。数値計算に用いた値は  $V = 1.5$  とし、その他のパラメータは表 4.1 と同様のものを用いた。横軸は動吸振器の振動数比  $\alpha$ 、縦軸は減衰比  $\zeta_a$  であり、(a), (b) および (c) はそれぞれ数値的厳密解、新型複素モード解析および実モード解析による結果である。図中の等高線は特性根の実部  $R_{s_p}$  が  $-0.1 \sim 0.04$  までの範囲を  $0.02$  毎に示しており、 $R_{s_1}$  と  $R_{s_2}$  のうち大きい方の値のみを示している。また、細実線、太実線および破線はそれぞれ特性根の実部が正、零および負に対応し、紫色および青色はそれぞれ1次および2次モードを表す。

図 4.6 より、まず、新型複素モード解析による結果は数値的厳密解による結果と  $\alpha$  および  $\zeta_a$  の広い範囲においてよく一致しているが、 $\alpha \approx 0.9, \zeta_a \approx 0.3$  付近では数値的厳密解の結果と多少異なる。これは、図 4.5(a) からわかるように、このような領域では1次と2次の固有角振動数が非常に近くなり、モード間の連成 ( $\tilde{\Delta}_j$  ( $j=1 \sim 3$ ) の非対角項) の影響が強くなるのが原因である。ただし、後述する動吸振器の最適値に関しては大きな影響を及ぼさない。一方、実モード解析による結果は減衰比  $\zeta_a$  が大きくなるにつれて数値的厳密解の結果とは大きく異なるため、動吸振器の最適設計には実モード解析による結果を利用できないことがわかる。

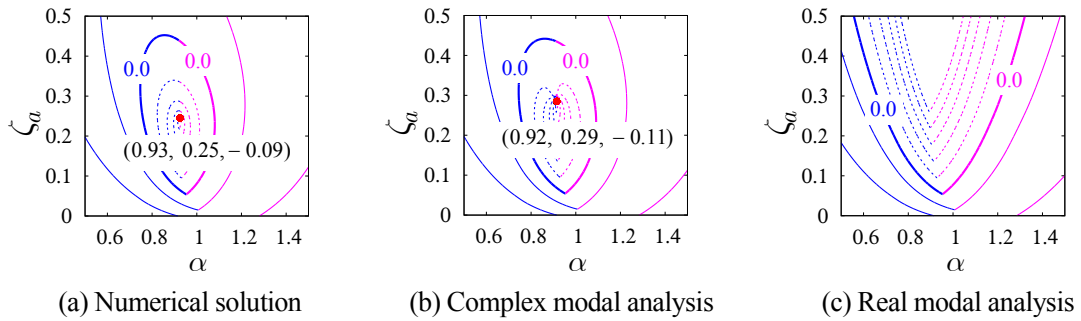


Fig. 4.6 The contour lines of the real parts of the characteristic roots. (a) The numerical solutions, (b) the approximate characteristic roots based on the complex modal analysis and (c) those of the real modal analysis

次に、動吸振器の最適設計について検討する。まず、4.6節で述べたように、 $\alpha = 0.9$ 付近で $R_{s_1}$ と $R_{s_2}$ の大小関係が逆転する傾向がみられる。そのため、ある動吸振器の減衰比 $\zeta_a$ に対しては $R_{s_1} = R_{s_2}$ となる場合に、系全体の安定度が最も高くなる。このことから、動吸振器の最適なパラメータは $R_{s_1} = R_{s_2}$ を最小化する値と考えられる。以上を踏まえると、動吸振器の最適値を探索する手順として次のような具体例が考えられる。

Step1: ある与えられた減衰比 $\zeta_a$ に対して、 $R_{s_1} = R_{s_2}$ となる $\alpha$ を求める。

Step2: Step1で求めた $\alpha$ に対して、 $\text{Max}(R_{s_1}, R_{s_2})$ を最小化する $\zeta_a$ を求める。

Step3: 得られる $\alpha$ ,  $\zeta_a$ が収束するまでStep1, Step2を繰り返す。

図4.6(a), (b)中に示した赤色の点と数値は、上記の手順により求められた最適な振動数比、減衰比およびその時の特性根の実部の最大値である。新型複素モード解析および数値的厳密解の両方において、上記最適設計手順により等高線図中で最小となるパラメータを求めることができ、その有効性が確認される。また、新型複素モード解析による最適値と数値的厳密解による結果は概ね一致していることがわかる。ただし、数値的厳密解と近似特性根の計算コストは同等である。上記の最適設計手順は、2自由度より大きな自由度の系に対しても同様に適用可能である。一方、実モード解析に基づく結果は、減衰比 $\zeta_a$ が増大するにつれて $\text{Max}(R_{s_1}, R_{s_2})$ は減少するため、最適値が存在せず、動吸振器の最適設計に利用できないことがわかる。

#### 4.8 4章のまとめ

本章では、負性抵抗系に対する動吸振器の動作原理の解明と最適設計法の開発を目指して、ギャロッピングが発生する系に動吸振器を取り付けた基本的かつ本質的な2自由度解析モデルを対象に検討を行った。本章で得られた知見を以下にまとめる。

- (1) 新型複素モード解析法を負性抵抗系に対して適用し、得られるモード方程式からモード間の連成を無視したモード別の近似安定判別法を定式化した。比較のため、実モード解析に基づく近似安定判別法の概要についても示し、具体例を対象とした数値的な検証の結果、新型複素モード解析法に基づく近似安定判別法は非常に高精度であることが確認

された。一方、実モード解析に基づく結果については、動吸振器の減衰比が増加するにつれてその精度は低下し、動吸振器の最適設計には利用できないことがわかった。

- (2) 上記の近似安定判別法に基づき、モード別の励振項によって生成される励振エネルギーと減衰によって消費される散逸エネルギーを解析的に導出し、動吸振器がそれぞれに与える影響について検討した。その結果、励振エネルギーは主系のモード形状に依存し、散逸エネルギーはモード減衰の関数となるため動吸振器の減衰によって増加することが明らかになった。また、基本解が安定化するのには散逸エネルギーが励振エネルギーを上回る場合であることが解析的に示された。以上より、動吸振器によって散逸エネルギーが励振エネルギーを上回るように安定系のモード減衰および主系のモード形状を変化させて1次と2次モードの両方を安定化し、系全体の安定化が実現することが示された。
- (3) 動吸振器のパラメータが系の安定性に及ぼす傾向について数値的に検討し、動吸振器の最適値を探索する効率的な最適設計手順を示した。

以上のように、本章では、負性抵抗系に対する動吸振器について検討してきた。第3章で述べた係数励振系の動吸振器との比較については、第6章で詳しく検討するが、基本的には共通の動作原理であることが明らかになった。

第3章および第4章では主に単一モードの自励振動に対する動吸振器について取り扱った。一方、複数のモード間の連成によって発生する自励振動系として非対称行列系がある。第1章で述べたように、非対称行列系に対しても動吸振器の有効性は確認されているが、動吸振器が系の安定性に及ぼす影響が係数励振系や負性抵抗系のものとは多少異なる。そこで、次章では非対称行列系に対する動吸振器の動作原理について検討する。

## 第5章 非対称行列系に対する動吸振器に関する検討

第3章および第4章では、係数励振系および負性抵抗系を対象に系の安定化に果たす動吸振器の役割を明らかにした。また、第6章で詳細な検討を行うが、係数励振系と負性抵抗系に対する動吸振器の動作原理が基本的に共通であることがわかった。これらの検討は、単一のモードの不安定振動を対象としたものである。一方、多自由度系でのみ発生する自励振動系に非対称行列系がある。これは複数のモード間の連成により発生する不安定振動と考えられる。そこで、本章では、非対称行列系に対する動吸振器の動作原理について検討する。

非対称行列系の解析モデルとして、末岡らを取り扱ったディスクブレーキの鳴きに対して動吸振器を適用したモデル<sup>(69)</sup>を参考にし、クーロン摩擦力が作用する2自由度非対称行列系に動吸振器を取り付けた3自由度解析モデルを取り扱う。これは非対称行列系に対して動吸振器を取り付けた基本的かつ本質的な最小自由度の解析モデルであり、第1章で述べた先行研究の解析モデルの多くは、本質的にはこのモデルに集約される。

安定系で生じる散逸エネルギーと励振項によって生成される励振エネルギーに対して動吸振器が及ぼす影響をそれぞれ検討するため、解析モデルの運動方程式を安定系と励振項とに分離するが、非対称行列におけるモード間の連成が明確に現れるような励振項の分離が望まれる。そこで、運動方程式中の対称な行列系を安定系、反対称な行列に関する項を励振項として取り扱い、第2章で述べた新型複素モード解析を用いて安定系に基づくモード方程式を導出する。

非対称行列系ではモード間の連成に基づく不安定振動が発生すると考えられるため、本章では2つのモード間の連成を仮定し、近似安定判別法を定式化する。比較のため、実モード解析に基づく近似安定判別法の概要についても示し、具体的なモデルを対象とした数値解および近似安定判別法の数値計算結果から、近似の妥当性を検証する。

この近似安定判別法に基づき、モード間の連成により発生する励振エネルギーおよび散逸エネルギーを高精度で導出し、それぞれに対して動吸振器が及ぼす影響を詳しく検討する。また、動作原理に関する検討結果に基づき、動吸振器の具体的な最適設計手順を示す。

### 5.1 解析モデルおよび基礎式

本章では末岡らを取り扱ったディスクブレーキの鳴きのモデル<sup>(69)</sup>を参考にした図5.1に示すような最も基本的な3自由度解析モデルを取り扱う。質量 $M$ 、重心まわりの慣性モーメント $J$ の剛体(主系)は、ばね定数 $K/2$ の2つのばねで支持され、主系の接触点をばね定数 $k_c$ のばねでモデル化し、接触点には垂直抗力に比例した摩擦係数 $\mu$ のクーロン摩擦 $F$ が作用する。重心の位置から接触点までの水平および垂直方向距離をそれぞれ $a$ および $b$ とし、重心から $h$ の位置には質量 $m_a$ 、ばね定数 $k_a$ および減衰係数 $c_a$ の動吸振器が取り付けられている。図5.1に示す解析モデルの線形化された運動方程式は次のように表される。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0, \quad K^T \neq K \quad (5.1)$$

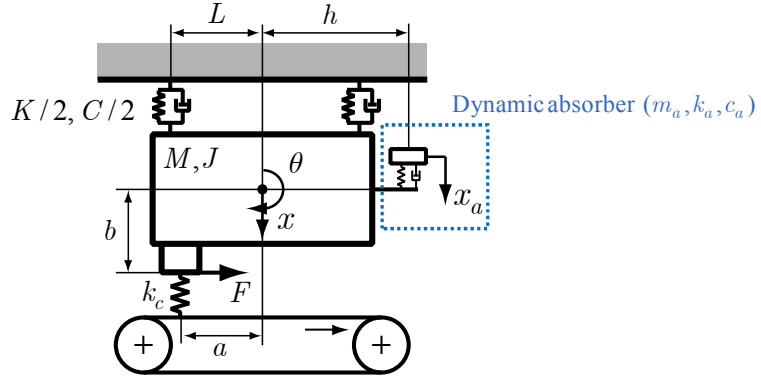


Fig. 5.1 The analytical model of self-excited system induced by the asymmetric stiffness matrix.

ここに,

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ u_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = 2\omega_n \begin{bmatrix} \zeta_n + \kappa\zeta_a\nu_a & \eta\kappa\zeta_a\nu_a & -\kappa\zeta_a\nu_a \\ \eta\kappa\zeta_a\nu_a & \zeta_n + \eta^2\kappa\zeta_a\nu_a & -\eta\kappa\zeta_a\nu_a \\ -\kappa\zeta_a\nu_a & -\eta\kappa\zeta_a\nu_a & \kappa\zeta_a\nu_a \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K} &= \omega_n^2 \begin{bmatrix} 1 + \gamma + \kappa\nu_a^2 & -\gamma\alpha + \eta\kappa\nu_a^2 & -\kappa\nu_a^2 \\ -\gamma\alpha + \eta\kappa\nu_a^2 & 1 + \gamma\alpha^2 + \eta^2\kappa\nu_a^2 & -\eta\kappa\nu_a^2 \\ -\kappa\nu_a^2 & -\eta\kappa\nu_a^2 & \kappa\nu_a^2 \end{bmatrix} + \mu\beta\gamma\omega_n^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 u &= \frac{x}{L}, \quad u_a = \frac{x_a}{L}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}, \quad \nu_a = \frac{\omega_a}{\omega_n}, \quad \rho = \sqrt{\frac{J}{ML^2}} \\
 \zeta_n &= \frac{C}{2\sqrt{MK}}, \quad \zeta_a = \frac{c_a}{2\sqrt{m_a k_a}}, \quad \kappa = \frac{m_a}{M}, \quad \gamma = \frac{k_c}{K}, \quad \alpha = \frac{a}{L}, \quad \beta = \frac{b}{L}, \quad \eta = \frac{h}{L}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  は  $3 \times 3$  の実対称正定行列であり,  $\mathbf{K}$  は  $3 \times 3$  の実非対称行列である. このように, 摩擦力によって並進と回転に関してのみ非対称性が現れる.

動作原理の解明のために, 非対称性に基づくモード間の連成の影響が明確に現れるような励振項と安定系に分離するが, 本節では, 解析モデルの剛性行列  $\mathbf{K}$  から非対称連成項のみが現れるような反対称行列  $\mathbf{K}_{AS} = (\mathbf{K} - \mathbf{K}^T)/2$  を取り出し, これを励振項とする. これにより, モード間の連成の影響が明確に現れることが期待される. 安定系の剛性行列  $\mathbf{K}_S$  を対称行列  $\mathbf{K}_S = (\mathbf{K} + \mathbf{K}^T)/2$  と置くと, 式 (5.1) は次のように表される.

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_S\mathbf{x} &= -\mathbf{f}_{AS}, \quad \mathbf{f}_{AS} = \mathbf{K}_{AS}\mathbf{x} \\
 \mathbf{K}_S &= \omega_n^2 \begin{bmatrix} 1 + \gamma + \kappa\nu_a^2 & -\gamma\alpha + \eta\kappa\nu_a^2 & -\kappa\nu_a^2 \\ -\gamma\alpha + \eta\kappa\nu_a^2 & 1 + \gamma\alpha^2 + \eta^2\kappa\nu_a^2 & -\eta\kappa\nu_a^2 \\ -\kappa\nu_a^2 & -\eta\kappa\nu_a^2 & \kappa\nu_a^2 \end{bmatrix} + \frac{\mu\beta\gamma\omega_n^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{AS} &= \frac{\mu\beta\gamma\omega_n^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{AS}^T = -\mathbf{K}_{AS}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$



なお、このような分離によれば、後述するモード方程式の励振項も反対称行列となるため、励振項はモード間の連成項のみで表される。また、摩擦が作用しない系を安定系、摩擦力を励振項として分離する方法もあるが、近似的な取り扱いが煩雑になる上、近似特性根の精度が大幅に低下する場合がある。この詳細については付録 A3.1 に記載する。

$\mathbf{K}_S$  が正定行列となるのは、 $\mathbf{x}^T \mathbf{K}_S \mathbf{x} > 0$  の条件より、 $\mu^2 \beta^2 \gamma < 4$  のときである。 $\mu^2 \beta^2 \gamma > 4$  の場合は特性根が正の実数となるダイバージェンス型の不安定となるため、以下では、 $\mu^2 \beta^2 \gamma < 4$  を仮定し、特性根が複素数となるフラッター型の不安定振動について検討する。また、本章では減衰  $\mathbf{C}$  と摩擦係数  $\mu$  はともに微小量と仮定する。

## 5.2 新型複素モード解析に基づくモード方程式の導出

図 5.1 の解析モデルで表される非対称行列系に対して第 2 章で述べた新型複素モード解析法を適用し、安定系に基づくモード方程式を導出する。式 (2.1) の励振力  $\varepsilon f_S$  が本節では  $\mathbf{f}_{AS}$  であることおよび式 (2.13) を用いると、 $\mathbf{f}_{AS}$  および  $\dot{\mathbf{f}}_{AS}$  について微小量の 1 次のオーダーの近似は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_{AS} &= \mathbf{K}_{AS} \mathbf{x} \approx \mathbf{K}_{AS} (\mathbf{R} \Phi_{11} \xi + \mathbf{R} \Phi_{12} \dot{\xi}) \\ \dot{\mathbf{f}}_{AS} &= \mathbf{K}_{AS} \dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{K}_{AS} (\mathbf{R} \Phi_{11} \dot{\xi} + \mathbf{R} \Phi_{12} \ddot{\xi}) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

第 2 章で導出した式 (2.14) のモード方程式に式 (5.4) を代入し、モード減衰を含む微小量の 1 次のオーダーで近似すると、非対称行列系に対するモード方程式は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\tilde{Z}\tilde{\Omega}\dot{\xi} + \tilde{\Omega}^2 \xi &= -\tilde{\Delta}_3 \ddot{\xi} - \tilde{\Delta}_2 \dot{\xi} - \tilde{\Delta}_1 \xi \\ \tilde{\Delta}_1 &= \mathbf{R} \Phi^T \mathbf{K}_{AS} \mathbf{R} \Phi, \quad \tilde{\Delta}_2 = \mathbf{R} \Phi^T \mathbf{K}_{AS} (\mathbf{I} \Phi \tilde{\Omega}^{-1}) + (\tilde{\Omega}^{-1} \mathbf{I} \Phi^T) \mathbf{K}_{AS} \mathbf{R} \Phi \\ \tilde{\Delta}_3 &= (\tilde{\Omega}^{-1} \mathbf{I} \Phi^T) \mathbf{K}_{AS} (\mathbf{I} \Phi \tilde{\Omega}^{-1}), \quad \tilde{\Delta}_j^T = -\tilde{\Delta}_j, \quad j=1 \sim 3 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

このように、新型複素モード解析法によれば、非対称行列系に対しても式 (5.5) の左辺のように安定系の質量、減衰および剛性行列を同時に対角化した上で、モード方程式を 2 階の実常微分方程式として導出することが可能である。その一方で、右辺の反対称行列に関する項  $\tilde{\Delta}_j$ ,  $j=1 \sim 3$  は対角化されず、 $\ddot{\xi}$  や  $\dot{\xi}$  に関する非対称行列項が現れる。右辺の反対称行列に関する項は  $\tilde{\Delta}_j^T = -\tilde{\Delta}_j$  の反対称行列としての性質を保つため、モード間の連成項のみが存在し、対角成分は零となる。これが励振項を反対称行列  $\mathbf{K}_{AS}$  に基づき分離した理由である。

## 5.3 近似安定判別法

非対称性により生成される励振エネルギーと散逸エネルギーを高精度で導出するため、本節では、5.2 節で求めたモード方程式から近似的な特性根（近似特性根）を導出し、近似安定判別法を定式化する。非対称行列に起因する不安定振動は 2 自由度系以上のモデルでのみ起こりうるため<sup>(6)</sup>、複数モードの連成に基づく不安定振動であることが予測される。そこで、 $p$  次モードと  $q$  次モードの 2 つのモード間の連成のみを仮定した場合について考える。式 (5.5) から

$p$  次および  $q$  次モード ( $\tilde{\omega}_p < \tilde{\omega}_q$ ) に関する項のみを取り出し、他のモードの連成項を無視すると、次のような連成系のモード方程式が導出される。なお、解析モデルは 3 自由度系であるため、 $(p, q)$  の組み合わせは  $(1, 2), (2, 3), (1, 3)$  の 3 つである。

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c} \ddot{\xi}_p \\ \ddot{\xi}_q \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} 2\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p & 0 \\ 0 & 2\tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\xi}_p \\ \dot{\xi}_q \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} \tilde{\omega}_p^2 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_q^2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \xi_p \\ \xi_q \end{array} \right] \\ & = - \left[ \begin{array}{cc} 0 & \tilde{\delta}_{3pq} \\ -\tilde{\delta}_{3pq} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\xi}_p \\ \dot{\xi}_q \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 0 & \tilde{\delta}_{2pq} \\ -\tilde{\delta}_{2pq} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \xi_p \\ \xi_q \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 0 & \tilde{\delta}_{1pq} \\ -\tilde{\delta}_{1pq} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \xi_p \\ \xi_q \end{array} \right] \\ & \tilde{\delta}_{1pq} = {}^R\phi_p^T \mathbf{K}_{AS} {}^R\phi_q, \quad \tilde{\delta}_{2pq} = \frac{{}^R\phi_p^T \mathbf{K}_{AS} {}^I\phi_q}{\tilde{\omega}_q} + \frac{{}^I\phi_p^T \mathbf{K}_{AS} {}^R\phi_q}{\tilde{\omega}_p} \\ & \tilde{\delta}_{3pq} = \frac{{}^I\phi_p^T \mathbf{K}_{AS} {}^I\phi_q}{\tilde{\omega}_p\tilde{\omega}_q} \end{aligned} \right\} (p, q = 1, 2, 3) \quad (5.6)$$

${}^R\phi_j, {}^I\phi_j, j = p, q$  は複素モード  ${}^C\phi_j, j = p, q$  の実部と虚部である。ここで、式 (5.6) の  $p$  次モードおよび  $q$  次モードの基本解を  $\xi_k = \Xi_k e^{s_{pq}t}, k = p, q$  ( $s_{pq} = {}^R s_{pq} + i {}^I s_{pq}$  は特性根) と仮定すると、式 (5.6) の特性方程式は次のように導出される。

$$\left[ \begin{array}{cc} s_{pq}^2 + 2\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p s_{pq} + \tilde{\omega}_p^2 & \tilde{\delta}_{3pq}s_{pq}^2 + \tilde{\delta}_{2pq}s_{pq} + \tilde{\delta}_{1pq} \\ -\tilde{\delta}_{3pq}s_{pq}^2 - \tilde{\delta}_{2pq}s_{pq} - \tilde{\delta}_{1pq} & s_{pq}^2 + 2\tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q s_{pq} + \tilde{\omega}_q^2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \Xi_p \\ \Xi_q \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (5.7)$$

式 (5.7) から特性根が求められるが、ここでは近似的な導出法について考える。5.1 節で述べたように、減衰および  $\mu$  に関する反対称行列の影響は小さい場合を取り扱っているので、特性根の実部  ${}^R s_{pq}$  は微小量のオーダーであると仮定できる。ここで、不減衰時 ( $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ) には、 $\tilde{\zeta}_p = \tilde{\zeta}_q = 0, \tilde{\delta}_{3pq} = 0, \tilde{\delta}_{2pq} = 0$  であることを考慮すると、式 (5.7) の  $\Xi_p \neq 0, \Xi_q \neq 0$  の条件から不減衰時の特性根の実部  ${}^R s_{pq}$  および虚部  ${}^I s_{pq}$  の微小量の 1 次のオーダーの近似は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} & {}^R s_{pq(\pm)} = \pm \frac{1}{2\tilde{\omega}_p} \text{Im} \left[ \sqrt{\tilde{\omega}_{M,pq}^4 - \tilde{\delta}_{1pq}^2} \right], \quad {}^I s_{pq(\pm)} = \sqrt{\tilde{\omega}_{P,pq}^2 \mp \text{Re} \left[ \sqrt{\tilde{\omega}_{M,pq}^4 - \tilde{\delta}_{1pq}^2} \right]} \\ & \tilde{\omega}_{P,pq} = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}_p^2 + \tilde{\omega}_q^2}{2}}, \quad \tilde{\omega}_{M,pq} = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}_q^2 - \tilde{\omega}_p^2}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

このように、不減衰時には  ${}^R s_{pq(\pm)} \neq 0$  ( $\tilde{\delta}_{1pq}^2 > \tilde{\omega}_{M,pq}^4$ ) のとき  ${}^I s_{pq(\pm)} = \tilde{\omega}_{P,pq}$  と表されることから、減衰系の場合の近似特性根の虚部を  ${}^I s_{pq} = \tilde{\omega}_{P,pq}(1 + \sigma)$  ( $\sigma$  は微小量の 1 次のオーダー) と仮定する。また、 $\tilde{\delta}_{3pq}, \tilde{\delta}_{2pq}$  は数値的に微小であることを確認しているため、 $\tilde{\delta}_{3pq}, \tilde{\delta}_{2pq}$  についても微小量の 1 次のオーダーであると仮定すると、近似特性根は式 (5.7) の  $\Xi_p \neq 0, \Xi_q \neq 0$  の条件から次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} R_{s_{pq(\pm)}} &= -\frac{\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p + \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q}{2} \pm \frac{1}{2\tilde{\omega}_{P,pq}} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{{}^C \tilde{D}_{pq}} \right], \quad I_{s_{pq(\pm)}} = \sqrt{\tilde{\omega}_{P,pq}^2 \mp \operatorname{Re} \left[ \sqrt{{}^C \tilde{D}_{pq}} \right]} \\ {}^C \tilde{D}_{pq} &= \left\{ \tilde{\omega}_{M,pq}^2 - i\tilde{\omega}_{P,pq} (\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q) \right\}^2 - (\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2 + i\tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq})^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

式 (5.9) より,  $R_{s_{pq(+)}}$  と  $R_{s_{pq(-)}}$  のうち大きい方の値が負であれば  $p$  次および  $q$  次モードの基本解は安定, 正であれば不安定と判別できる. なお, 2 つのモードで近似することの妥当性については, 5.5 節で検証する.

#### 5.4 実モード解析に基づく近似安定判別法

上記手法との比較のため, 本節では実モード解析に基づく近似安定判別法の概要について述べる. 第 2 章の 2.2 節で述べた実モード解析に基づくモード方程式から, 式 (2.1) の励振力  $\varepsilon \mathbf{f}_S$  が本節では  $\mathbf{f}_{AS}$  であることであること, および実モード座標への変換  $\mathbf{x} = \hat{\Phi} \boldsymbol{\xi}$  を考慮すると, モード方程式は次のように導出される.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\Phi}^T \mathbf{C} \hat{\Phi} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\Omega}^2 \boldsymbol{\xi} &= -\hat{\Delta}_0 \boldsymbol{\xi} \\ \hat{\Delta}_0 &= {}^R \hat{\Phi}^T \mathbf{K}_{AS} {}^R \hat{\Phi}, \quad \hat{\Delta}_0^T = -\hat{\Delta}_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

このように, 実モード解析では, 質量行列と剛性行列は同時に対角化されるが, 減衰行列  $\mathbf{C}$  と反対称行列  $\mathbf{K}_{AS}$  は一般的には対角化されない.

5.3 節と同様に近似解を導出するため, 式 (5.10) から  $p$  次モードと  $q$  次モードに関する項のみを取り出すと, 次のような連成系のモード方程式が導出される.

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_p \\ \ddot{\xi}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\hat{\zeta}_p \hat{\omega}_p & 2\hat{Z}_{pq} \\ 2\hat{Z}_{pq} & 2\hat{\zeta}_q \hat{\omega}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_p \\ \dot{\xi}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\omega}_p^2 & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_q \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 0 & \hat{\delta}_{0,pq} \\ -\hat{\delta}_{0,pq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_q \end{bmatrix} \\ 2\hat{Z}_{pq} &= \hat{\phi}_p^T \mathbf{C} \hat{\phi}_q, \quad \hat{\delta}_{0,pq} = \hat{\phi}_p^T \mathbf{K}_{AS} \hat{\phi}_q \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

式 (5.11) に対して 5.3 節の式 (5.6) 以下と同様の手続きを適用すると, 近似特性根は次のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} R_{s_{pq(\pm)}} &= -\frac{\hat{\zeta}_p \hat{\omega}_p + \hat{\zeta}_q \hat{\omega}_q}{2} \pm \frac{1}{2\hat{\omega}_{P,pq}} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{{}^C \hat{D}_{pq}} \right], \quad I_{s_{pq(\pm)}} = \sqrt{\hat{\omega}_{P,pq}^2 \mp \operatorname{Re} \left[ \sqrt{{}^C \hat{D}_{pq}} \right]} \\ {}^C \hat{D}_{pq} &= \left\{ \hat{\omega}_{M,pq}^2 - i\hat{\omega}_{P,pq} (\hat{\zeta}_p \hat{\omega}_p - \hat{\zeta}_q \hat{\omega}_q) \right\}^2 - \hat{\delta}_{0,pq}^2 - (2\hat{Z}_{pq} \hat{\omega}_{P,pq})^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

式 (5.12) より,  $R_{s_{pq(+)}}$  と  $R_{s_{pq(-)}}$  のうち大きい方の値が負であれば  $p$  次および  $q$  次モードの基本解は安定, 正であれば不安定と判別できる.

#### 5.5 数値的検証

本節では, 5.3 節で示した近似安定判別法の有効性を検証するため, 新型複素モード解析に基づく近似特性根を数値的厳密解および実モード解析に基づく近似特性根と比較する. ここで

の数値的厳密解とは、式 (5.1) の元の物理座標の方程式から特性方程式を導出し、複素固有値解析により数値的に求めた厳密解とみなし得るほどに高精度の特性根を意味する。ただし、図 5.1 の解析モデルは 3 自由度系であるため、近似安定判別法では、 $s_{12(\pm)}$ ,  $s_{23(\pm)}$ ,  $s_{13(\pm)}$  の 6 つの特性根が得られるが、数値的検討から  $s_{12(\pm)}$ ,  $s_{23(\pm)}$  のみが不安定化することがわかっているため、ここでは  $s_{12(\pm)}$ ,  $s_{23(\pm)}$  の 4 つに関する結果を示す。表 5.1 に数値計算に用いた解析モデルのパラメータを示す。なお、これらのパラメータ値は特徴的な結果が得られるように調整した値であり、実際例に基づくものではない。また、これ以外のパラメータに対しても同様の傾向を示すことを数値的に確認している。

図 5.2 は各手法で求められた不安定領域を示す。図の横軸および縦軸は動吸振器の振動数比  $\nu_a$  および摩擦係数  $\mu$  であり、黒色の点は数値的厳密解、紫色および青色の領域は近似特性根によって求められた不安定領域を表す。紫色は 1 次と 2 次モードの連成、青色は 2 次と 3 次モードの連成を仮定して求められた近似解である。

Table 5.1 Parameter values of the analytical model used in numerical computation.

$\omega_n$ [rad/s]	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\rho$	$\zeta_a$	$\kappa$	$\eta$	$\zeta_s$
1.0	0.125	0.5	2.0	0.5	0.05	0.05	1.0	0.0, 0.1, 0.45

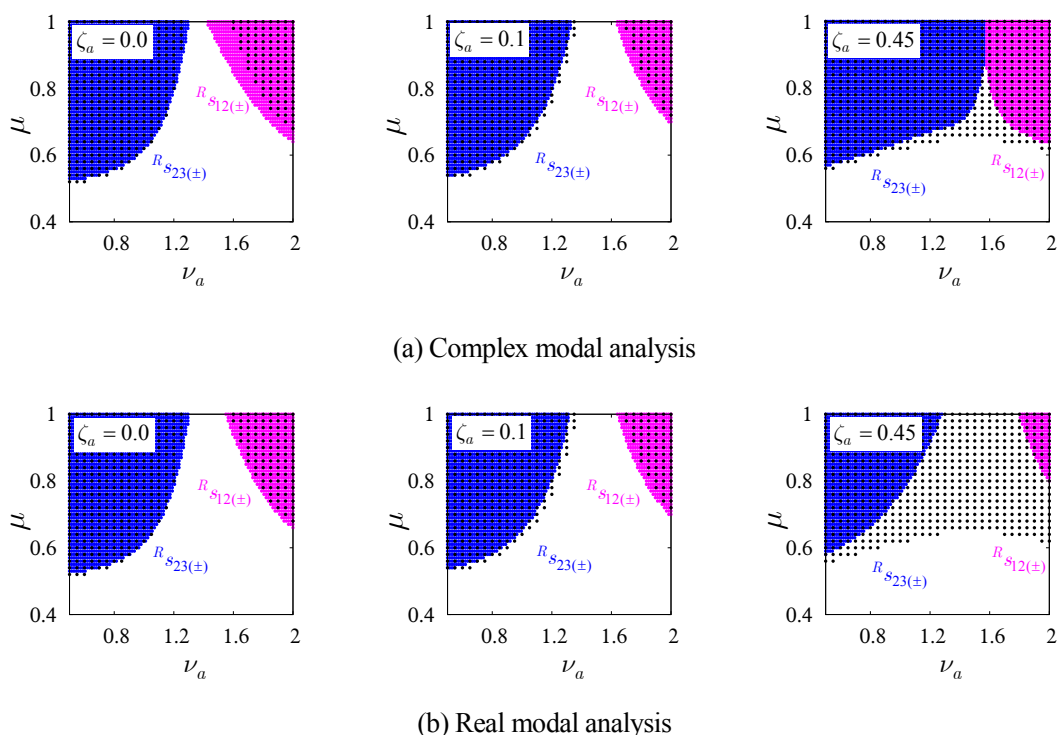
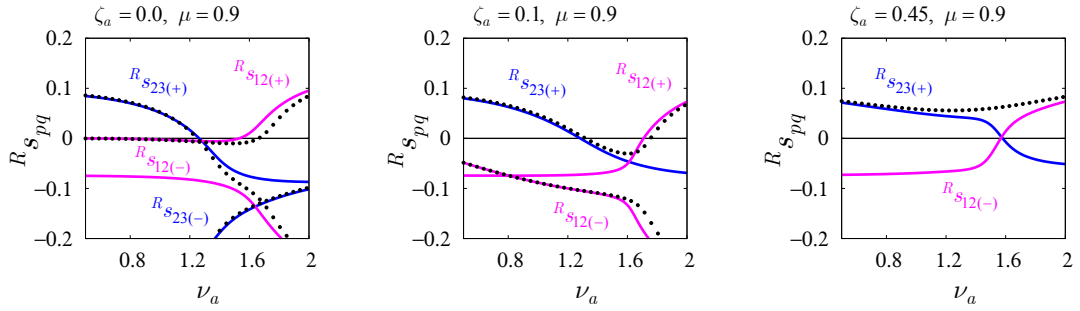
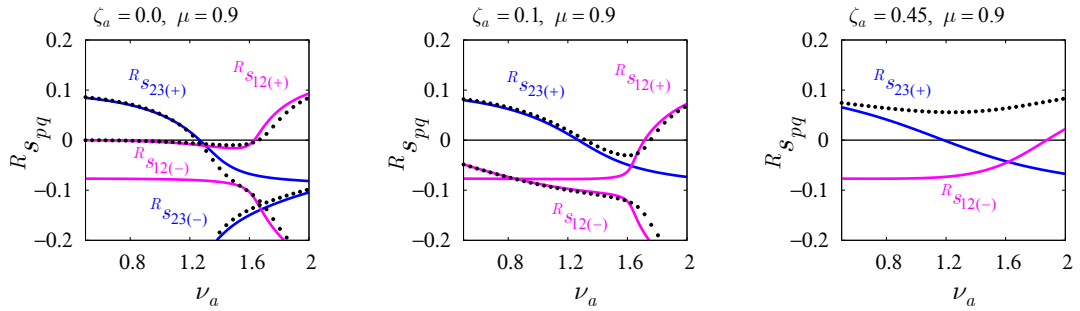


Fig. 5.2 The unstable region obtained by the numerical solutions (black dots) and the approximate solutions (purple and blue areas)

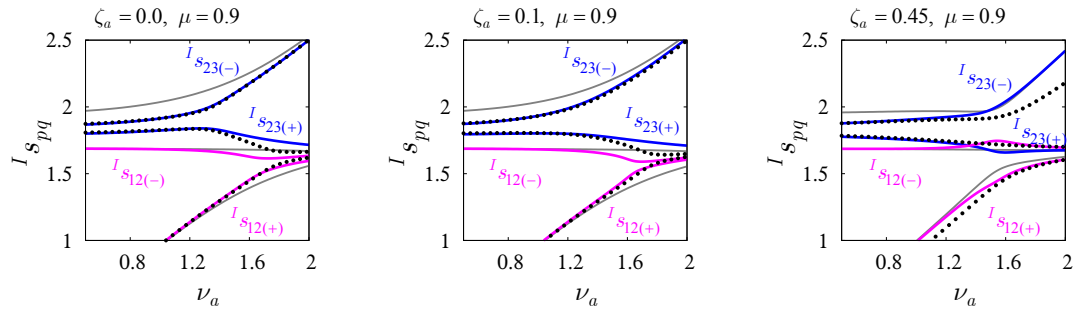


(a) Complex modal analysis

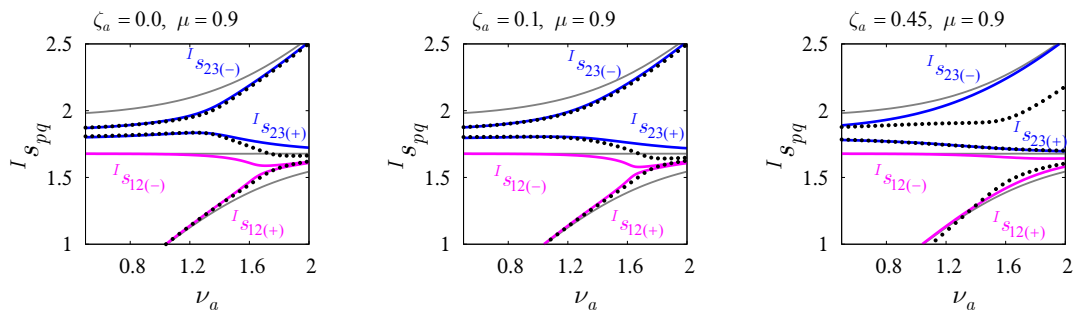


(b) Real modal analysis

Fig. 5.3 The real parts of the characteristic roots obtained by the numerical solutions (black dots) and the approximate solutions (purple and blue lines).



(a) Complex modal analysis



(b) Real modal analysis

Fig. 5.4 The imaginary parts of the characteristic roots obtained by the numerical solutions (black dots) and the approximate solutions (purple and blue lines).

図 5.2(a) は新型複素モード解析に基づく近似安定判別法の結果である。  $\zeta_a = 0.0$  場合は  $R_{s_{12(\pm)}}$  の不安定領域が数値的厳密解の不安定領域よりも少し大きくなり、  $\zeta_a = 0.45$  の場合は  $\nu_a \approx 1.6$ ,  $\mu \approx 0.7$  付近で数値的厳密解の結果と近似安定判別法による結果とが多少異なるが、全体的な傾向としては概ね一致している。このように精度が低下する領域が一部存在するが、これは、仮定した 2 つのモード以外のモードの影響が強くと現れることが原因として考えられる。この点に関しては 5.8 節で詳しく検討する。一方、実モード解析に基づく近似安定判別法の結果は、図 5.2(b) に示すように  $\zeta_a = 0.0$  のときは数値的厳密解の結果とほぼ一致するが、  $\zeta_a = 0.45$  の場合には数値的厳密解の結果よりも不安定領域が小さくなり、  $\zeta_a$  が大きくなるにつれて精度が低下することがわかる。このように、実モード解析ではモード別の減衰の影響を十分に考慮することができず、減衰比が大きい場合には、本来不安定である領域を安定と判別してしまう恐れがあり、動吸振器の設計に利用するのは非常に難しい。

図 5.3 および図 5.4 は、  $\mu = 0.9$  のときの数値的厳密解および近似特性根の実部  $R_{s_{pq(\pm)}}$  と虚部  $I_{s_{pq(\pm)}}$  に対する動吸振器の振動数比  $\nu_a$  の影響を示したものである。点は数値的厳密解、実線は近似安定判別法によって求められた  $s_{12(+)}$ ,  $s_{12(-)}$ ,  $s_{23(+)}$ ,  $s_{23(-)}$  の 4 つの近似特性根を表し、図 5.4 中の灰色の実線は各手法で求められる固有角振動数を示す。ただし、図 5.3 について、  $\zeta_a = 0.1$  のときには  $R_{s_{23(-)}}$ ,  $\zeta_a = 0.45$  のときには  $R_{s_{12(+)}}$ ,  $R_{s_{23(-)}}$  が負の側の大きな値となるため、図中には現れていない。

図 5.3(a) および図 5.4(a) は新型複素モード解析に基づく近似安定判別法の結果である。  $\zeta_a = 0.45$ ,  $\nu_a \approx 1.6$  付近の結果を除けば、いずれの減衰比に対しても不安定領域における特性根の実部および虚部の値は数値的厳密解と概ね一致していることが確認できる。その一方で、例えば、  $R_{s_{12(+)}}$  は  $\zeta_a = 0.1$  のときに  $\nu_a \approx 1.8$  近傍では数値的厳密解とよく一致しているが、  $\nu_a \approx 1.4$  近傍では大きく異なる。これは、  $\nu_a \approx 1.8$  近傍の不安定領域では本質的に 1 次と 2 次モードの影響が支配的であるのに対して、  $\nu_a \approx 1.4$  近傍の安定領域では 3 次モードの影響が強くと現れるため、  $R_{s_{12(+)}}$  の精度が低下することが原因である。以上より、不安定領域に対しては 2 つのモード間の連成を仮定した近似解の妥当性が確認できる。一方、実モード解析に基づく近似安定判別法の結果は、図 5.3(b) および図 5.4(b) からわかるように、  $\zeta_a = 0.0$  のときには数値的厳密解と概ね一致することが確認できるが、  $\zeta_a = 0.45$  のとき、特性根の実部が数値的厳密解の結果よりも小さな値となり、図 5.2(b) と同様に  $\zeta_a$  が増加するにつれて精度が低下する。

次に、動吸振器が不安定領域に及ぼす影響については、図 5.2(a) および図 5.3(a) から、次のことがわかる。動吸振器を付加することによって自由度が増加するため、1 次と 2 次モードの連成による不安定領域と 2 次と 3 次モードの連成による不安定領域の新たに 2 つが発生する。これらの不安定領域は動吸振器のパラメータを調整することにより安定化し、例えば、動吸振器に減衰がない  $\zeta_a = 0.0$  の場合では、  $\mu = 0.9$ ,  $\nu_a \approx 1.4$  において系全体の安定化が実現する。しかしながら、動吸振器の減衰比が大きい場合には不安定領域が拡大する。これは、第 3 章で述べたような主系と動吸振器の相対速度に比例する減衰の影響が小さくなることが主な原因ではなく、次節で述べるが、励振エネルギーの増加が主な原因である。以上の結果より、動吸振器には適切な振動数比  $\nu_a$  および減衰比  $\zeta_a$  が存在することがわかる。なお、動吸振器の最適値を探索する手法については、5.7 節で検討する。

## 5.6 動吸振器の動作原理に関する検討

### 5.6.1 非対称行列系の不安定化メカニズム

非対称行列系に対する動吸振器の動作原理について検討する前に、本項では、非対称行列系が不安定化するメカニズムについて検討する。ここでは、動吸振器を付加しない並進  $u$  と回転  $\theta$  の 2 自由度非対称行列系を対象に検討を行う。図 5.1 に示す解析モデルの動吸振器を付加しない場合の運動方程式は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \\ & \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = 2\zeta_n \omega_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \mathbf{K}_2 = \omega_n^2 \begin{bmatrix} 1+\gamma & -\gamma\alpha \\ -\gamma\alpha & 1+\gamma\alpha^2 \end{bmatrix} + \mu\beta\gamma\omega_n^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

簡単のため、 $\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$  の場合について考える。式 (5.13) の基本解を  $u = {}^c U e^{st}$ ,  $\theta = {}^c \Theta e^{st}$  および  $s$  を複素特性根とおくと、特性方程式は次のように導出される。

$$\begin{bmatrix} s^2 + \omega_n^2(1+\gamma) & -\gamma\alpha\omega_n^2 \\ -\gamma\alpha\omega_n^2 + \mu\beta\gamma\omega_n^2 & \rho^2 s^2 + (1+\gamma\alpha^2)\omega_n^2 - \mu\beta\gamma\omega_n^2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^c U \\ {}^c \Theta \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

式 (5.14) の特性方程式から特性根が求められ、その特性根を  $s = R_s + iI_s$  ( $R_s$  は微小量と仮定) と置くと、微小量の 1 次のオーダーの近似は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} R_s &= \pm \frac{1}{2I_s} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{2\rho^2} \sqrt{{}^c D} \right] \\ I_s &= \sqrt{\frac{1+\alpha\gamma(\alpha-\mu\beta)+\rho^2(1+\gamma)}{2\rho^2}} \mp \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\rho^2} \sqrt{{}^c D} \right] \\ {}^c D &= \left\{ 1+\rho^2 + \gamma(\alpha^2 - \mu\beta\alpha + \rho^2) \right\}^2 - 4\rho^2 \left\{ 1+\gamma(1+\alpha^2 - \mu\beta\alpha) \right\}^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

$R_s > 0$  に対応する複素固有モード  $[{}^c U, {}^c \Theta]^T$  は、式 (5.14) および式 (5.15) の関係式を用いると次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^c U \\ {}^c \Theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ A e^{i\psi} \end{bmatrix} \\ A \cos \psi &= \frac{\alpha\gamma(\mu\beta - \alpha) + \rho^2(1+\gamma) - 1}{2\alpha\gamma\rho^2}, \quad A \sin \psi = \frac{1}{2\alpha\gamma\rho^2} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{{}^c D} \right] > 0, \quad A = \sqrt{\frac{\mu\beta - \alpha}{\alpha\rho^2}} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

なお、 $A$  が実数となる条件から  $(\mu\beta - \alpha) > 0$  である。ここで、安定不安定境界近傍 ( $R_s \approx 0$ ) における基本解を、式 (5.16) の複素固有モードを用いて次のような調和振動で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \cos^I st \\ \theta &= A \cos(Ist + \psi) \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

系が式 (5.16) で表される基本解で振動している場合、任意の時刻  $T$  から  $T + 2\pi/I_s$  (調和振動の 1 周期) の間に剛性行列  $\mathbf{K}_2$  の非対角項を介して  $u$  方向および  $\theta$  方向に流入するエネルギー  $W_u$  および  $W_\theta$  はエネルギー積分により次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} W_u &= \int_T^{T+\frac{2\pi}{I_s}} (\gamma\alpha\omega_n^2\theta)\dot{u}dt = \pi\omega_n^2\gamma\alpha A \sin\psi = W_{k_c} > 0 \\ W_\theta &= \int_T^{T+\frac{2\pi}{I_s}} \{-\gamma(\mu\beta - \alpha)\omega_n^2 u\}\dot{\theta}dt = -\pi\omega_n^2\gamma\alpha A \sin\psi + \pi\omega_n^2\mu\beta\gamma A \sin\psi = -W_{k_c} + W_F > 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

ここに、 $W_{k_c}$  は接触部の剛性  $k_c$  を介して  $\theta$  方向から  $u$  方向に流入するエネルギー、 $W_F$  は摩擦力  $F$  によって  $\theta$  方向に流入するエネルギーを表す。

式 (5.18) から、剛性行列  $\mathbf{K}_2$  の非対角項を介して励振されるエネルギー  $W_u$  および  $W_\theta$  がともに正になる場合、系が不安定化することがわかる。 $u$  方向に対しては接触部の剛性  $k_c$  を介して  $\theta$  方向からエネルギー  $W_{k_c}$  が流入する。これが  $u$  方向の振動を成長させる励振エネルギーになるが、 $\theta$  方向に対しては接触部の剛性  $k_c$  を介して同量のエネルギー  $W_{k_c}$  が散逸することがわかる。しかしながら、摩擦力  $F$  によって  $\theta$  方向にエネルギー  $W_F$  が流入し、結果として  $-W_{k_c} + W_F > 0$  となるため、 $\theta$  方向の振動が成長する。このように、 $u$  方向は接触部の剛性  $k_c$  を介して流入するエネルギー  $W_{k_c}$ 、 $\theta$  方向は摩擦力  $F$  によって励振されるエネルギー  $W_F$  が原因で振動が成長することがわかる。ただし、系全体では  $W_u + W_\theta = W_F$  となるため、系全体の不安定化は摩擦力によって励振されるエネルギー  $W_F$  が原因である。

また、 $u$  方向および  $\theta$  方向に流入するエネルギー  $W_u$  および  $W_\theta$  が正になるのは、特性根が複素数になり、並進  $u$  と回転  $\theta$  の間に位相差  $\psi$  が生じることが原因である。特に回転  $\theta$  が並進  $u$  に対して  $\psi$  だけ位相進みの状態のときに不安定化する。以上のように、非対称行列系で発生する励振エネルギーは、2 変数間の位相差に基づき生成されることがわかる。

### 5.6.2 動吸振器の動作原理のエネルギー的検討

5.5 節の結果から、2 つのモード間の連成を仮定して得られる基本解は、他のモードの影響で精度が低下する領域が存在したものの、大部分においては非対称行列系で発生する不安定振動を精度よく表すことができていた。そこで、本章では、5.3 節で求めた基本解を用いて、2 つのモード間の連成により生成される励振エネルギーおよび散逸エネルギーを高精度に導出し、動吸振器がこれらのエネルギーに対して及ぼす影響を検討する。

まず、 $p$  次モードに対して非対称行列のモード間の連成により作用する励振力  $F_{AS,pq}$  および減衰力  $F_{D,p}$  を式 (5.6) から次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} F_{AS,pq} &= -\tilde{\delta}_{3pq}\ddot{\xi}_q - \tilde{\delta}_{2pq}\dot{\xi}_q - \tilde{\delta}_{1pq}\xi_q \\ F_{D,p} &= -2\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p\dot{\xi}_p \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$



次に、安定・不安定境界の不安定側近傍 ( $R_{s_{pq}} \approx 0$ ) における  $p$  次および  $q$  次モードの基本解のひとつとして、式 (5.7) から導出される複素固有モード  $[\xi_p \ \xi_q]^T = [1 \ -A_{pq} e^{i\psi_{pq}}]^T$  を用いて、微小量の 1 次のオーダーで近似した次のような調和振動を仮定する。なお、この導出過程の詳細については付録 A3.2 に記載する。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos I s_{pq} t \\ -A_{pq} \cos(I s_{pq} t + \psi_{pq}) \end{bmatrix} \\ A_{pq} \cos \psi_{pq} &= \frac{\tilde{\omega}_p^2 - I s_{pq}^2}{\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2} \\ A_{pq} \sin \psi_{pq} &= \frac{2\tilde{\omega}_{P,pq} (R_{s_{pq}} + \tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p)}{\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2} - \frac{\tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq} (\tilde{\omega}_p^2 - I s_{pq}^2)}{(\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

系が式 (5.20) の基本解で振動しているとき、式 (5.19) の  $F_{AS,pq}$  および  $F_{D,p}$  が任意の時刻  $T$  から  $T+2\pi/I s_{pq}$  (調和振動の 1 周期) の間になす仕事をエネルギー積分から求め、 $E_{pq} = \tilde{\omega}_{P,pq}^2 (1+A_{pq}^2)$  ( $p$  次と  $q$  次モードの力学的エネルギー相当量) および  $T_{pq} = 2\pi/I s_{pq}$  (調和振動の 1 周期) で正規化したものをそれぞれ  $W_{AS,pq}$  および  $W_{D,p}$  とすると、微小量の 1 次のオーダーの近似は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} W_{D,p} &= \frac{1}{E_{pq} T_{pq}} \int_T^{T+2\pi/I s_{pq}} (F_{D,p} \dot{\xi}_p) dt = -\frac{1}{1+A_{pq}^2} \tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p < 0 \\ W_{AS,pq} &= \frac{1}{E_{pq} T_{pq}} \int_T^{T+2\pi/I s_{pq}} (F_{AS,pq} \dot{\xi}_p) dt \\ &= \frac{A_{pq}}{2\tilde{\omega}_{P,pq} (1+A_{pq}^2)} \left\{ (\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2) \sin \psi_{pq} + \tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq} \cos \psi_{pq} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

式 (5.21) で表される  $W_{AS,pq}$  はモード間の連成により  $q$  次モードから生成される励振エネルギーであり、 $W_{D,p}$  は  $p$  次モードの散逸エネルギーに相当する。このとき、 $p$  次モードに流入する総エネルギー  $W_{AS,pq} + W_{D,p}$  は、式 (5.20) の  $A_{pq} \cos \phi_{pq}$ 、 $A_{pq} \sin \phi_{pq}$  を式 (5.21) に代入し、整理すると次のように表される。

$$W_{AS,pq} + W_{D,p} = \frac{1}{1+A_{pq}^2} R_{s_{pq}} \quad (5.22)$$

式 (5.22) より、 $p$  次モードの基本解が安定 ( $R_{s_{pq}} < 0$ ) になるのは、 $p$  次モードの減衰によって消費される散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  がモード間の連成により  $q$  次モードから生成される励振エネルギー  $W_{AS,pq}$  を上回る場合であることがわかる。つまり、動吸振器によって散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  が励振エネルギー  $W_{AS,pq}$  を上回るように変更しなければならない。

$q$  次モードに対しても同様に、非対称行列のモード間の連成により作用する励振力  $F_{AS,qp}$  および減衰力  $F_{D,q}$  によって供給・消費されるエネルギーは、式 (5.19) 以下と同様の手続きにより次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned}
W_{D,q} &= \frac{1}{E_{pq} T_{pq}} \int_T^{T+2\pi/l_{s_{pq}}} (F_{D,q} \dot{\xi}_q) dt = -\frac{A_{pq}^2}{1+A_{pq}^2} \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q < 0 \\
W_{AS,qp} &= \frac{1}{E_{pq} T_{pq}} \int_T^{T+2\pi/l_{s_{pq}}} (F_{AS,qp} \dot{\xi}_q) dt \\
&= \frac{A_{pq}}{2\tilde{\omega}_{P,pq}(1+A_{pq}^2)} \left\{ (\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2) \sin \psi_{pq} - \tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq} \cos \psi_{pq} \right\} \\
\therefore W_{AS,qp} + W_{D,q} &= \frac{A_{pq}^2}{1+A_{pq}^2} R_{s_{pq}}
\end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

式 (5.23) より、 $q$  次モードの基本解が安定 ( $R_{s_{pq}} < 0$ ) になるのは、 $q$  次モードの減衰によって消費される散逸エネルギー  $-W_{D,q}$  がモード間の連成により  $p$  次モードから生成される励振エネルギー  $W_{AS,qp}$  を上回る場合であることがわかる。このように、 $p$  次モードと  $q$  次モードは互いに反対称行列のモード間の連成項を介して励振エネルギーを生成するが、両モードとも同時に散逸エネルギーが励振エネルギーを上回ることによって安定化する。

また、動吸振器が散逸エネルギーおよびモード間の連成により生成される励振エネルギーに対して及ぼす影響については次のことがわかる。まず、散逸エネルギー  $-W_{D,p}$  および  $-W_{D,q}$  については、式 (5.21) および式 (5.23) より減衰自由振動系の  $p$  次および  $q$  次モードのモード減衰  $\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p$ 、 $\tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q$  および振幅比  $A_{pq}^2$  の関数として表されることがわかる。 $A_{pq}^2$  については、その導出過程の詳細は付録 A3.3 に記載するが、具体的に次のように導出される。

$$\left. \begin{aligned}
A_{pq}^2 &= 1 - \frac{2}{\tilde{\omega}_{M,pq}^2} \operatorname{Re} \left[ \sqrt{{}^c \tilde{D}_{pq}} \right] \\
{}^c \tilde{D}_{pq} &= \left\{ \tilde{\omega}_{M,pq}^2 - i \tilde{\omega}_{P,pq} (\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q) \right\}^2 - (\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2 + i \tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq})^2
\end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

安定不安定境界近傍において、 $\operatorname{Re}[\sqrt{{}^c \tilde{D}_{pq}}]$  は微小量と仮定すると、式 (5.21) と式 (5.23) で表される  $-W_{D,p}$  と  $-W_{D,q}$  に式 (5.24) を代入し、微小量の 1 次のオーダーで近似すると系全体の散逸エネルギーは  $-(W_{D,p} + W_{D,q}) = (\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p + \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q)/2$  と表すことができる。つまり、両モードの基本解の安定化のためには、系全体の散逸エネルギーが大きい方が望ましいので、動吸振器の減衰を付加することによってモード減衰  $\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p$ 、 $\tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q$  がともに大きくなるように調整すればよいことが分かる。

次に、励振エネルギー  $W_{AS,pq}$  および  $W_{AS,qp}$  への影響を検討する。非対称行列系では不減衰の場合であっても動吸振器による系全体の安定化が実現するため、まず、不減衰 ( $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ) の場合について検討する。不減衰時には、 $\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p = \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q = 0$ 、 $\tilde{\delta}_{2pq} = 0$ 、 $\tilde{\delta}_{3pq} = 0$  となるため、式 (5.24) から  $A_{pq} = 1$  の関係が導き出される。このとき、 $W_{AS,pq}$  および  $W_{AS,qp}$  は、式 (5.20)、式 (5.9) および  $\hat{\delta}_{0pq} = \hat{\phi}_p^T \mathbf{K}_{AS} \hat{\phi}_q$  [式 (5.11)] を考慮すると、実固有モード  $\hat{\phi}_j = [\hat{\phi}_{u,j} \ \hat{\phi}_{\theta,j} \ \hat{\phi}_{a,j}]^T$ 、 $j = p, q$  を用いて次のように表される。なお、 $\hat{\phi}_{u,j}$ 、 $\hat{\phi}_{\theta,j}$ 、 $\hat{\phi}_{a,j}$  はそれぞれ並進、回転および動吸振器のモード振幅を表している。

$$\left. \begin{aligned}
W_{AS,pq} &= \frac{\hat{\delta}_{0,pq}}{4\hat{\omega}_{P,pq}} \sin \psi_{pq}, & W_{AS,qp} &= \frac{\hat{\delta}_{0,pq}}{4\hat{\omega}_{P,pq}} \sin \psi_{pq} \\
\sin \psi_{pq} &= \frac{1}{\hat{\delta}_{0,pq}} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{\hat{\omega}_{M,pq}^4 - \hat{\delta}_{0,pq}^2} \right] \\
\hat{\omega}_{M,pq}^2 &= \frac{\hat{\omega}_q^2 - \hat{\omega}_p^2}{2}, & \hat{\delta}_{0,pq} &= \frac{\mu\beta\gamma\omega_n^2}{2} (\hat{\phi}_{u,p}\hat{\phi}_{\theta,q} - \hat{\phi}_{u,q}\hat{\phi}_{\theta,p})
\end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

式 (5.25) から、 $q$  次から  $p$  次へ流入する励振エネルギー  $W_{AS,pq}$  は  $p$  次から  $q$  次へ流入する励振エネルギー  $W_{AS,qp}$  と等しく、5.6.1 項の結果と同様に、 $\xi_p$  および  $\xi_q$  の間に生じる正の位相差  $\psi_{pq}$  が原因で互いに正の仕事をしてしていることが分かる。また、この位相差  $\psi_{pq}$  は不減衰自由振動系の固有角振動数および主系の固有モードの関数として表されることがわかる。すなわち、動吸振器によって固有角振動数および主系のモード形状を調整することにより位相差  $\psi_{pq}$  を変更すれば、 $W_{AS,pq}$  および  $W_{AS,qp}$  を同時に変化させることが可能である。例えば、固有振動数の差  $\hat{\omega}_{M,pq}^2$  を大きくし、反対称行列を介した並進と回転の連成項  $\hat{\delta}_{0,pq}$  が小さくなるようなモード形状に変更すれば、励振エネルギーは減小する。特に、 $\hat{\omega}_{M,pq}^4 - \hat{\delta}_{0,pq}^2 > 0$  とすることができれば、位相差は零となるため、励振エネルギー  $W_{AS,pq}$  および  $W_{AS,qp}$  はともに零となり、基本解は安定 ( $R_{s,pq} = 0$  の中立安定) となる。このように、動吸振器により位相差  $\psi_{pq}$  を零にすることで、不減衰の動吸振器であっても系の安定化が実現可能であることがわかる。

次に、減衰系における動吸振器の影響について検討する。式 (5.21) および式 (5.23) で表される励振エネルギー  $W_{AS,pq}$  および  $W_{AS,qp}$  に式 (5.24) の  $A_{pq}$  を代入し、微小量の 1 次のオーダーで近似すると、 $W_{AS,pq}$ ,  $W_{AS,qp}$  およびその和  $W_{AS,pq} + W_{AS,qp}$  は次のように導出される。

$$\left. \begin{aligned}
W_{AS,pq} &= \frac{1}{4\tilde{\omega}_{P,pq}} \left\{ (\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq}\tilde{\omega}_{P,pq}^2) \sin \psi_{pq} + \tilde{\delta}_{2pq}\tilde{\omega}_{P,pq} \cos \psi_{pq} \right\} \\
W_{AS,qp} &= \frac{1}{4\tilde{\omega}_{P,pq}} \left\{ (\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq}\tilde{\omega}_{P,pq}^2) \sin \psi_{pq} - \tilde{\delta}_{2pq}\tilde{\omega}_{P,pq} \cos \psi_{pq} \right\} \\
\therefore W_{AS,pq} + W_{AS,qp} &= \frac{1}{2\tilde{\omega}_{P,pq}} (\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq}\tilde{\omega}_{P,pq}^2) \sin \psi_{pq}
\end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

式 (5.26) から、不減衰系の場合とは異なり、 $q$  次から  $p$  次へ流入する励振エネルギー  $W_{AS,pq}$  は  $p$  次から  $q$  次へ流入する励振エネルギー  $W_{AS,qp}$  とは一致しないことがわかる。この差は  $\dot{\xi}_p, \dot{\xi}_q$  の非対称な連成項  $\tilde{\delta}_{2,pq}$  を介して成されるエネルギーが原因であるが、系全体の励振エネルギー  $W_{AS,pq} + W_{AS,qp}$  には影響しない。そのため、 $\ddot{\xi}_p, \ddot{\xi}_q$  および  $\xi_p, \xi_q$  の非対称な連成項を介して生成される励振エネルギーの影響により系全体が不安定化する。また、この励振エネルギーは  $\xi_p$  と  $\xi_q$  の間の位相差  $\psi_{pq}$  が原因で発生し、 $\sin \psi_{pq}$  については、詳細は付録 A3.4 に記載するが、微小量の 1 次のオーダーで近似すると、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
\sin \psi_{pq} &= \frac{1}{\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq}\tilde{\omega}_{P,pq}^2} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{c\tilde{D}_{pq}} \right] \\
c\tilde{D}_{pq} &= \left\{ \tilde{\omega}_{M,pq}^2 - i\tilde{\omega}_{P,pq}(\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q) \right\}^2 - (\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq}\tilde{\omega}_{P,pq}^2 + i\tilde{\delta}_{2pq}\tilde{\omega}_{P,pq})^2
\end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

ここで,  $(\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq}\tilde{\omega}_{P,pq}^2)$  および  $\tilde{\delta}_{2pq}$  については, 式 (5.6) より,  $\tilde{\delta}_{1pq} = {}^R\tilde{\phi}_p^T \mathbf{K}_{AS} {}^R\tilde{\phi}_q$ ,  $\tilde{\delta}_{2pq} = ({}^R\tilde{\phi}_p^T \mathbf{K}_{AS} {}^I\tilde{\phi}_q / \tilde{\omega}_q + {}^R\tilde{\phi}_p^T \mathbf{K}_{AS} {}^I\tilde{\phi}_q / \tilde{\omega}_p)$  および  $\tilde{\delta}_{3pq} = {}^I\tilde{\phi}_p^T \mathbf{K}_{AS} {}^I\tilde{\phi}_q / (\tilde{\omega}_p \tilde{\omega}_q)$  であることから, 複素固有モードの実部と虚部を  ${}^R\tilde{\phi}_j = [{}^R\tilde{\phi}_{u,j} \quad {}^R\tilde{\phi}_{\theta,j} \quad {}^R\tilde{\phi}_{a,j}]^T$ ,  ${}^I\tilde{\phi}_j = [{}^I\tilde{\phi}_{u,j} \quad {}^I\tilde{\phi}_{\theta,j} \quad {}^I\tilde{\phi}_{a,j}]^T$ ,  $j = p, q$  と置くと, 次のように表される. なお,  ${}^R\tilde{\phi}_{u,j}$ ,  ${}^R\tilde{\phi}_{\theta,j}$ ,  ${}^R\tilde{\phi}_{a,j}$  はそれぞれ主系の並進と回転および動吸振器のモード振幅の実部を表し,  ${}^I\tilde{\phi}_{u,j}$ ,  ${}^I\tilde{\phi}_{\theta,j}$ ,  ${}^I\tilde{\phi}_{a,j}$  はそれらの虚部を表している.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq}\tilde{\omega}_{P,pq}^2 &= \frac{\mu\beta\gamma\omega_n^2}{2} \left\{ \left( {}^R\phi_{u,p} \quad {}^R\phi_{\theta,q} - {}^R\phi_{u,q} \quad {}^R\phi_{\theta,p} \right) - \frac{\tilde{\omega}_{P,pq}^2}{\tilde{\omega}_p \tilde{\omega}_q} \left( {}^I\phi_{u,p} \quad {}^I\phi_{\theta,q} - {}^I\phi_{u,q} \quad {}^I\phi_{\theta,p} \right) \right\} \\ \tilde{\delta}_{2pq} &= \frac{\mu\beta\gamma\omega_n^2}{2} \left\{ \frac{1}{\tilde{\omega}_q} \left( {}^I\phi_{u,q} \quad {}^R\phi_{\theta,p} - {}^R\phi_{u,p} \quad {}^I\phi_{\theta,q} \right) + \frac{1}{\tilde{\omega}_p} \left( {}^R\phi_{u,q} \quad {}^I\phi_{\theta,p} - {}^I\phi_{u,p} \quad {}^R\phi_{\theta,q} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

このように,  $(\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq}\tilde{\omega}_{P,pq}^2)$  および  $\tilde{\delta}_{2pq}$  は主系の固有モードおよび固有角振動数を用いて表されることから, 式 (5.27) と式 (5.28) より,  $\xi_p$  と  $\xi_q$  の間の位相差  $\psi_{pq}$  は減衰自由振動系の固有角振動数  $\tilde{\omega}_p$ ,  $\tilde{\omega}_q$ , モード減衰  $\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p$ ,  $\tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q$  および主系の固有モード  ${}^R\tilde{\phi}_{u,j}$ ,  ${}^R\tilde{\phi}_{\theta,j}$ ,  ${}^I\tilde{\phi}_{u,j}$ ,  ${}^I\tilde{\phi}_{\theta,j}$ ,  $j = p, q$  の関数として表されることがわかる. すなわち, 動吸振器によってこれらを調整することにより位相差  $\psi_{pq}$  を変更すれば, 系全体の励振エネルギー  $W_{AS,pq} + W_{AS,qp}$  を変更することが可能である.

以上より, 動吸振器によって位相差を調整し,  $W_{AS,pq}$  および  $W_{AS,qp}$  を変更するとともに, 動吸振器の減衰により  $-W_{D,p}$  および  $-W_{D,q}$  を増加させて  $-W_{D,1} > W_{AS,12}$  (同時に  $-W_{D,2} > W_{AS,21}$ ) および  $-W_{D,2} > W_{AS,23}$  (同時に  $-W_{D,3} > W_{AS,32}$ ) とすることができれば, 系の完全な安定化が実現する. これが非対称行列系に対する動吸振器の動作原理である.

### 5.6.3 エネルギーに関する数値計算例

本項では, 系全体の励振エネルギー  $W_{AS,pq} + W_{AS,qp}$  および散逸エネルギー  $-(W_{D,p} + W_{D,q})$  等の系の安定性を支配する物理量に及ぼす動吸振器の振動数比  $\nu_a$  および減衰比  $\zeta_a$  の影響について, 具体例に基づいて検討する. 数値計算には表 5.1 に示すパラメータと同様のものを用い, 動吸振器の振動数比  $\nu_a$  および減衰比  $\zeta_a$  を変化させた. 図 5.5 は, (a) 発生振動数  $I_{s_{pq}}$  [式 (5.9)] と固有角振動数  $\tilde{\omega}_p$ , (b) 位相差  $\psi_{pq}$  [式 (5.20) から計算], (c) 系全体の励振エネルギー  $W_{AS,pq} + W_{AS,qp}$  [式 (5.21), 式 (5.23)], (d) 系全体の散逸エネルギー  $-(W_{D,p} + W_{D,q})$  [式 (5.21), 式 (5.23)], (e) 近似特性根の実部  ${}^R s_{pq}$  [式 (5.9)] と動吸振器の振動数比  $\nu_a$  との関係を示す. また, 図中の細実線, 破線および太実線はそれぞれ動吸振器の減衰比が  $\zeta_a = 0.0, 0.06, 0.20$  のときの結果であり, 紫色は1次と2次モードの連成, 青色は2次と3次モードの連成に基づく結果を示す. ただし,  $\zeta_a = 0.06$  は, 5.7節の手順により求められた  $\zeta_a$  の最適値である. なお,  $\nu_a$  および  $\zeta_a$  が最適値から大きく離れると完全な安定化は実現できないので, 以下では最適値の近傍に絞って検討する.

- (1)  $I_{s_{12}}, I_{s_{23}}$  に及ぼす影響 [図 5.5(a)]:  $\zeta_a$  が同じ場合,  $\nu_a$  が增大するにつれて  $I_{s_{12(-)}}, I_{s_{23(+)}}$  とともに増大するが,  $I_{s_{12(+)}}, I_{s_{23(-)}}$  に大きな変化は生じない. 一方,  $\zeta_a$  が增大するにつれて  $I_{s_{23(+)}}, I_{s_{23(-)}}$  は互いに離れるが,  $I_{s_{12(+)}}, I_{s_{12(-)}}$  は一旦近づいたのち, 離れる. 固有角振動数に対しては減衰の影響がほとんど現れない.

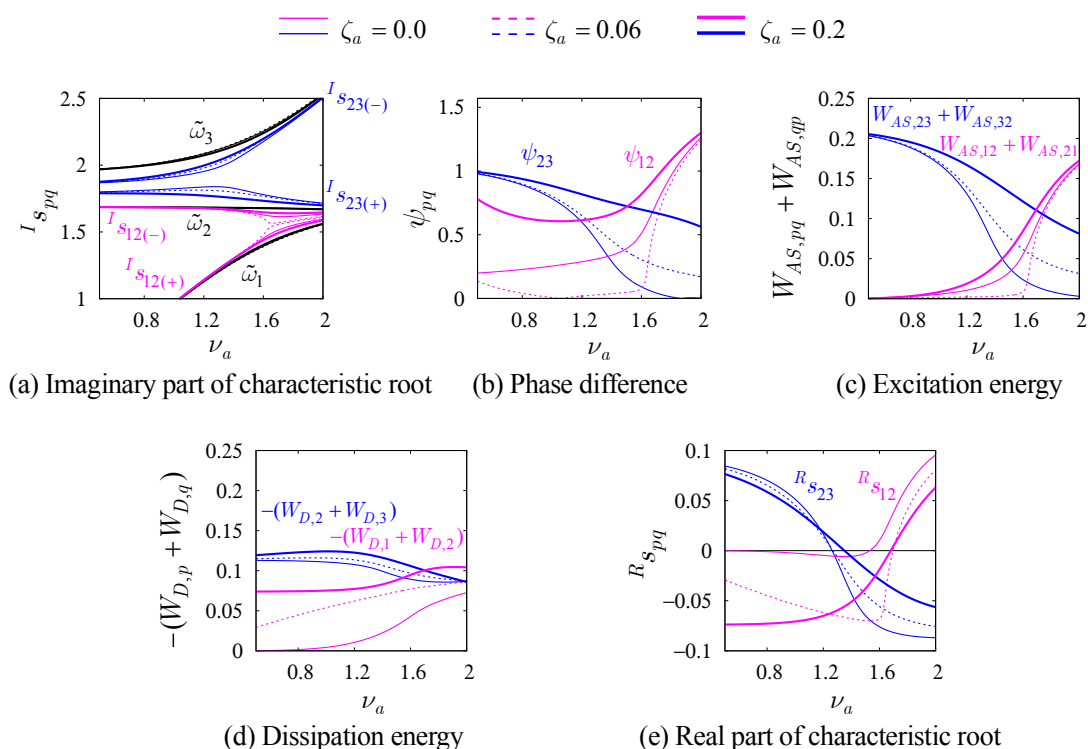


Fig. 5.5 The imaginary parts of characteristic roots, natural frequencies, the phase differences, the excitation energies, the dissipation energies and the approximate real parts of the characteristic roots.

- (2)  $\psi_{12}$ ,  $\psi_{23}$  に及ぼす影響 [図 5.5(b)]:  $\zeta_a$  が同じ場合,  $\nu_a$  が增大するにつれて  $\psi_{12}$  は増大し,  $\psi_{23}$  は減小する. 一方,  $\zeta_a$  が增大するにつれて  $\psi_{23}$  は増大するが,  $\psi_{12}$  は一旦減小したのち, 増加する. このように動吸振器の減衰によって2つのモード間の位相差が変化する.
- (3)  $(W_{AS,12} + W_{AS,21})$ ,  $(W_{AS,23} + W_{AS,32})$  に及ぼす影響 [図 5.5(c)]: 全体的な傾向として,  $\nu_a$  が增大するにつれて  $(W_{AS,12} + W_{AS,21})$  は増大し,  $(W_{AS,23} + W_{AS,32})$  は減小して  $\nu_a \approx 1.6$  付近で両者の大小関係が逆転する. また,  $\zeta_a$  が増加するにつれて  $(W_{AS,23} + W_{AS,32})$  は全体的に増加するが,  $(W_{AS,12} + W_{AS,21})$  は一旦減小したのち, 増加する. これは, 図 5.5(b) に示すように動吸振器の減衰によってモード間の位相差が変化したためである. このように, 動吸振器を付加することによって励振エネルギーを変更することが可能であるが, 動吸振器の減衰によって位相差が増大し, 励振エネルギーが増大する可能性がある.
- (4)  $-(W_{D,1} + W_{D,2})$ ,  $-(W_{D,2} + W_{D,3})$  に及ぼす影響 [図 5.5(d)]: 全体的な傾向として  $\zeta_a$  が增大するにつれて  $-(W_{D,1} + W_{D,2})$ ,  $-(W_{D,2} + W_{D,3})$  はともに増加する,  $\nu_a$  の増加に伴い  $-(W_{D,1} + W_{D,2})$  は増大し,  $-(W_{D,2} + W_{D,3})$  は減小する. このように動吸振器の減衰を付加することによって系全体の散逸エネルギーは増大する.
- (5)  $R_{s_{12}}$ ,  $R_{s_{23}}$  に及ぼす影響 [図 5.5(e)]: 全体的な傾向として  $\nu_a$  が增大するにつれて  $R_{s_{23}}$  は減小し,  $R_{s_{12}}$  は一旦減小したのち増大する. これらの値は  $\nu_a \approx 1.6$  付近で両者の大小関係が逆転する.

## 5.7 動吸振器の最適設計法

5.5 節の数値計算結果から、動吸振器の振動数比 $\nu_a$  および減衰比 $\zeta_a$  には適切な値が存在することが明らかになった。そこで、本節では非対称行列系に対する動吸振器の最適値を探索する最適設計法について検討する。

非対称行列系の自励振動は、本質的には1次と2次および2次と3次の連成によって発生する不安定振動であることを確認した。そこで、最適設計の目標値については第3章の3.8節と同様の考えのもと、 $\text{Max}(R_{s_{12}}, R_{s_{23}})$ の最小化を図るのが妥当である。図5.7は、特性根の実部 $R_{s_{12}}, R_{s_{23}}$ の最大値 $\text{Max}(R_{s_{12}}, R_{s_{23}})$ の等高線図を示している。数値計算に用いた値は $\mu = 0.9$ とし、その他のパラメータは表5.1と同様のものを用いた。横軸は動吸振器の振動数比 $\nu_a$ 、縦軸は減衰比 $\zeta_a$ であり、(a)、(b) および(c) はそれぞれ数値的厳密解、新型複素モード解析および実モード解析による結果である。図中の等高線は特性根の実部 $R_{s_{pq}}$  が $-0.12 \sim 0.04$  までの範囲を0.02毎に示しており、 $R_{s_{12}}$  と $R_{s_{23}}$ のうち大きい方の値のみを示している。

細実線、太実線および破線はそれぞれ特性根の実部が正、零および負に対応し、紫色および青色はそれぞれ $R_{s_{12}}$  と $R_{s_{23}}$ を表す。また、数値解析では与えられた系パラメータに対して特性根は共益な3つの複素固有値として同時に求められるが、これらとモードとの間に直接的な対応関係はないので、(a) ではモードの連成に関する区別はしていない。

図5.7から、まず、新型複素モード解析による結果は、減衰比 $\zeta_a$ が小さい領域では厳密解の結果と非常によく一致しているが、減衰比 $\zeta_a$ が大きくなり、 $\nu_a \approx 1.6$  付近の領域では数値的厳密解よりも安定領域が拡大し、精度が低下する。これは、このような領域において近似の際に仮定した2つのモード以外の別のモードの影響が強く現れることが原因として考えられる。この点については5.8節で詳しく述べる。一方、減衰比が $\zeta_a \approx 0.06$  よりも大きくなるにつれて $\text{Max}(R_{s_{12}}, R_{s_{23}})$ が増大するなど全体的な傾向は概ね一致し、後述する動吸振器の最適値に関しては大きな影響を及ぼさない。実モード解析による結果は、図5.7(c)に示すように、減衰比 $\zeta_a$ が大きくなるにつれて数値的厳密解よりも安定領域が拡大し、 $\text{Max}(R_{s_{12}}, R_{s_{23}})$ は減少するなど、減衰比 $\zeta_a$ の増加に伴い精度が低下する。このように、動吸振器の最適設計には実モード解析による結果を利用できないことがわかる。

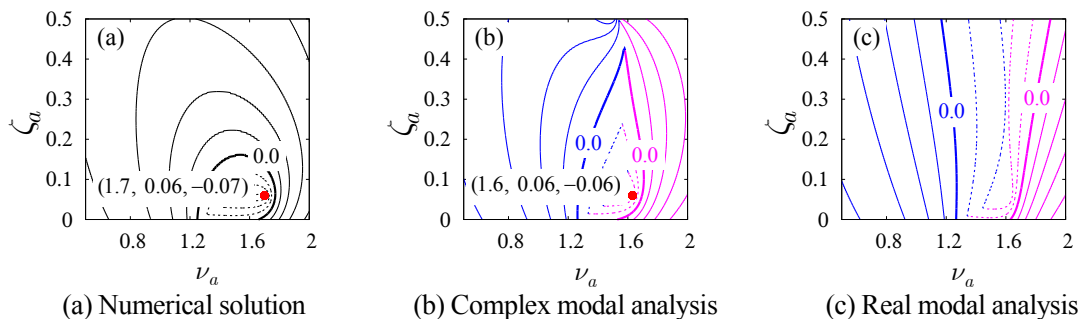


Fig. 5.7 The contour lines of the max value of the real parts of the characteristic roots.

次に、動吸振器の最適値を探索する最適設計法について検討する。5.6 節で述べたように、 $\nu_a \approx 1.6$  付近で  $R_{s_{12}}$  と  $R_{s_{23}}$  の大小関係が逆転することから、系全体の安定度は  $R_{s_{12}} = R_{s_{23}}$  のときに最も高くなる。つまり、 $R_{s_{12}} = R_{s_{23}}$  を最小化する値が動吸振器の最適値と考えられる。そこで、以下に、最適値を探索する手順の具体例を示す。

Step1 : ある与えられた減衰比  $\zeta_a$  に対して、 $R_{s_{12}} = R_{s_{23}}$  となる  $\nu_a$  を求める。

Step2 : Step1 で求めた  $\nu_a$  に対して、 $\text{Max}(R_{s_{12}}, R_{s_{23}})$  を最小化する  $\zeta_a$  を求める。

Step3 : 得られる  $\nu_a, \zeta_a$  が収束するまで Step1, Step2 を繰り返す。

図 5.7(b) 中の赤点と数値は上記の手順により求められた最適なパラメータおよびその時の特性根の実部の値を示しており、図 5.7(a) 中の赤色の点は等高線図中の最小点を示す。このように、上記最適設計手順により、動吸振器の最適なパラメータを求めることが可能であることが確認できる。また、新型複素モード解析に基づく最適値は数値的厳密解とほぼ一致しており、得られる最適値は高精度であることがわかる。さらに、上記の最適設計法は、2 自由度以上の大きな自由度系に対しても同様に適用可能である。一方、実モード解析に基づく結果は、数値的厳密解から得られる最適値の近傍に局所的な最適値が存在するものの、減衰比  $\zeta_a$  が増大するにつれて  $\text{Max}(R_{s_{12}}, R_{s_{23}})$  が減少するため、大域的な最適値を求めることはできない。

## 5.8 他モードの影響

5.5 節および 5.7 節で述べたように、5.3 節の近似安定判別法は精度が低下する領域が存在した。このような領域では、近似の際に仮定した 2 つのモード以外の別のモードの影響が強く現れることが原因として考えられる。そこで、本節では  $p$  次と  $q$  次モードの連成以外に、 $r$  次モードの影響を簡易的に補正する手法（モード補正法と呼ぶ）を提案し、 $r$  次モードが  $p$  次と  $q$  次モードの連成による不安定振動に及ぼす影響を検討する。

まず、式 (5.5) から  $p$  次と  $q$  次モード ( $\tilde{\omega}_p < \tilde{\omega}_q$ ) に加えて  $r$  次モードに関する項のみを取り出し、次のような連成系の運動方程式を導出する。なお、解析モデルは 3 自由度系であるため、 $(p, q, r)$  の組み合わせは  $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 3, 2)$  の 3 つである

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_p \\ \ddot{\xi}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p & 0 \\ 0 & 2\tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_p \\ \dot{\xi}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_p^2 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_q \end{bmatrix} \\ & = - \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\delta}_{3pq} \\ -\tilde{\delta}_{3pq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_p \\ \ddot{\xi}_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\delta}_{2pq} \\ -\tilde{\delta}_{2pq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_p \\ \dot{\xi}_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\delta}_{1pq} \\ -\tilde{\delta}_{1pq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_q \end{bmatrix} \\ & \quad - \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_{3pr} \\ \tilde{\delta}_{3qr} \end{bmatrix} \ddot{\xi}_r - \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_{2pr} \\ \tilde{\delta}_{2qr} \end{bmatrix} \dot{\xi}_r - \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_{1pr} \\ \tilde{\delta}_{1qr} \end{bmatrix} \xi_r \\ & \quad \ddot{\xi}_r + 2\tilde{\zeta}_r\tilde{\omega}_r\dot{\xi}_r + \tilde{\omega}_r^2\xi_r \\ & = \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_{3pr} & \tilde{\delta}_{3qr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_p \\ \ddot{\xi}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_{2pr} & \tilde{\delta}_{2qr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_p \\ \dot{\xi}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_{1pr} & \tilde{\delta}_{1qr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_q \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (p, q, r = 1, 2, 3) \quad (5.29)$$

次に、5.3 節と同様に、式 (5.28) の  $p$  次と  $q$  次および  $r$  次モードの基本解を  $\xi_k = \Xi_k e^{s_{pq} t}$ ,  $k = p, q, r$  ( $s_{pq} = R_{s_{pq}} + i I_{s_{pq}}$  は特性根) と仮定すると、式 (5.28) の特性方程式は次のように導出される。

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} s_{pq}^2 + 2\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p s_{pq} + \tilde{\omega}_p^2 & \tilde{\delta}_{3pq} s_{pq}^2 + \tilde{\delta}_{2pq} s_{pq} + \tilde{\delta}_{1pq} \\ -(\tilde{\delta}_{3pq} s_{pq}^2 + \tilde{\delta}_{2pq} s_{pq} + \tilde{\delta}_{1pq}) & s_{pq}^2 + 2\tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q s_{pq} + \tilde{\omega}_q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_p \\ \Xi_q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_{3pr} s_{pq}^2 + \tilde{\delta}_{2pr} s_{pq} + \tilde{\delta}_{1pr} \\ \tilde{\delta}_{3qr} s_{pq}^2 + \tilde{\delta}_{2qr} s_{pq} + \tilde{\delta}_{1qr} \end{bmatrix} \Xi_r \\ & (s_{pq}^2 + 2\tilde{\zeta}_r \tilde{\omega}_r s_{pq} + \tilde{\omega}_r^2) \Xi_r = \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_{3pr} s_{pq}^2 + \tilde{\delta}_{2pr} s_{pq} + \tilde{\delta}_{1pr} & \tilde{\delta}_{3qr} s_{pq}^2 + \tilde{\delta}_{2qr} s_{pq} + \tilde{\delta}_{1qr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_p \\ \Xi_q \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

ここで、 $r$  次モードの影響を補正するため、式 (5.29) の第 2 式に安定不安定境界近傍における近似特性根  $s_{pq} \approx -i\tilde{\omega}_{P,pq}$  を代入し、式 (5.29) から  $\Xi_r$  を消去すると次式が導出される。

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} s_{pq}^2 + i2\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p \tilde{\omega}_{P,pq} + \tilde{\omega}_p^2 & \tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2 + i\tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq} \\ -(\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2 + i\tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq}) & s_{pq}^2 + i2\tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q \tilde{\omega}_{P,pq} + \tilde{\omega}_q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_p \\ \Xi_q \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} {}^C \Delta_{pr}^2 & {}^C \Delta_{pr} {}^C \Delta_{qr} \\ {}^C \Delta_{pr} {}^C \Delta_{qr} & {}^C \Delta_{qr}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_p \\ \Xi_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & {}^C \Delta_{jr}^2 = \frac{(\tilde{\delta}_{1jr} - \tilde{\delta}_{3jr} \tilde{\omega}_{P,pq}^2 + i\tilde{\delta}_{2jr} \tilde{\omega}_{P,pq})^2}{\tilde{\omega}_r^2 - \tilde{\omega}_{P,pq}^2 + i2\tilde{\zeta}_r \tilde{\omega}_r \tilde{\omega}_{P,pq}}, \quad j = p, q \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

式 (5.30) から、5.3 節の式 (5.7) 以下と同様の手続きにより  $r$  次モードの影響を補正した近似特性根は、微小量の 1 次のオーダーで近似すると、次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} & R_{s_{pq(\pm)}} = -\frac{\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p + \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q}{2} + \frac{1}{2\tilde{\omega}_{P,pq}} \operatorname{Im} \left[ -\frac{{}^C \Delta_{pr}^2 + {}^C \Delta_{qr}^2}{4\tilde{\omega}_p} \pm \sqrt{{}^C \tilde{D}_{pq}} \right] \\ & I_{s_{pq(\pm)}} = \sqrt{\tilde{\omega}_{P,pq}^2 - \operatorname{Re} \left[ -\frac{{}^C \Delta_{pr}^2 + {}^C \Delta_{qr}^2}{4\tilde{\omega}_{P,pq}} \pm \sqrt{{}^C \tilde{D}_{pq}} \right]} \\ & {}^C \tilde{D}_{pq} = \left\{ \tilde{\omega}_{M,pq}^2 - i\tilde{\omega}_{P,pq} (\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q) + \frac{{}^C \Delta_{qr}^2 - {}^C \Delta_{pr}^2}{2} \right\} \\ & \quad - (\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2 + i\tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq})^2 + {}^C \Delta_{pr}^2 {}^C \Delta_{qr}^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

式 (5.31) より、 $R_{s_{pq(+)}}$  と  $R_{s_{pq(-)}}$  のうち大きい方の値が負であれば  $p$  次および  $q$  次モードの基本解は安定、正であれば不安定と判別できる。また、式 (5.31) より、 $r$  次モードの影響は  ${}^C \Delta_{jr}^2$ ,  $j = p, q$  として現れることから、事前に  ${}^C \Delta_{jr}^2$  の値が求められれば精度に影響を与える副次的なモードの判別が可能であり、その影響が大きくなる要因として、 $\tilde{\omega}_r^2$  が  $\tilde{\omega}_{P,pq}^2$  の値に近いことや  $\tilde{\delta}_{1jr} - \tilde{\delta}_{3jr} \tilde{\omega}_{P,pq}^2$ ,  $j = p, q$  の値が大きいことなどが挙げられる。なお、以上の近似計算には、本質的に不安定化の原因となる  $p$  次と  $q$  次モードおよび精度に影響を及ぼす副次的な  $r$  次モードを決定する必要がある。 $p$  次と  $q$  次モードについては、式 (5.25) の位相差  $\psi_{pq}$  に現れる  $\hat{\omega}_{M,pq}^4 - \hat{\delta}_{0,pq}^2$  が負の側に大きいほど不安定化するため、 $\hat{\omega}_{M,pq}^4 - \hat{\delta}_{0,pq}^2$  の値が負の側に大きい組み合わせの次数を採用し、精度に影響を及ぼす副次的な  $r$  次モードについては、 $|{}^C \Delta_{jr}^2|$ ,  $j = p, q$  の値が大きな次数のモードを採用すればよい。

図 5.8～図 5.10 は、5.5 節の図 5.2～図 5.4 と同様に、モード補正法を適用した新型複素モード解析法に基づく近似安定判別法の結果である。数値計算には表 5.1 と同様の計算パラメータを用いた。図 5.8～図 5.10 より、まず、モード補正法を適用した結果は、いずれの  $\zeta_a$  に対しても数値的厳密解の結果と一致し、非常に高精度であることが確認できる。特に 5.5 節で述べた



新型複素モード解析法の結果は $\zeta_a = 0.45$ の場合、 $\nu_a \approx 1.6$ ,  $\mu \approx 0.7$ 付近で精度の低下がみられたが、モード補正法の適用により精度が改善されていることがわかる。このような結果から、5.5節で述べた $\zeta_a = 0.45$ ,  $\nu_a \approx 1.6$ 付近の領域は、他のモードの影響が強く現れるため2つのモード間の連成を仮定した近似特性根の精度は低下するが、簡易的な補正法を適用することによってその精度を改善できることを確認した。

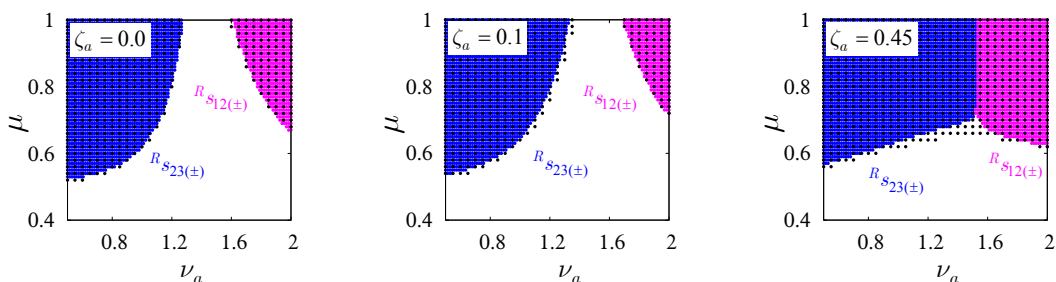
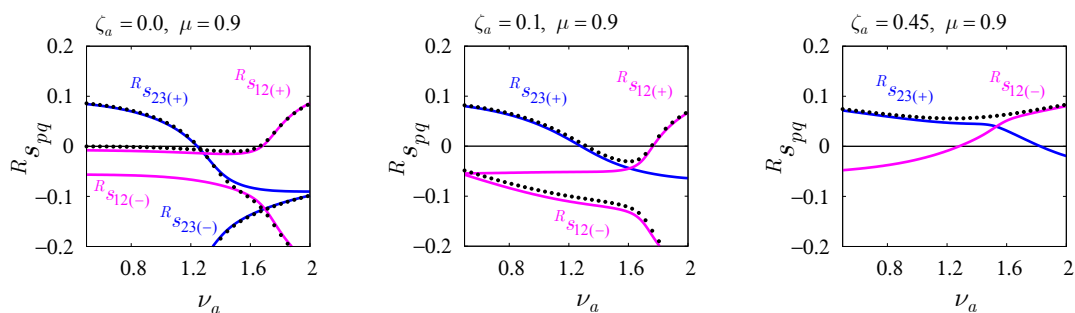
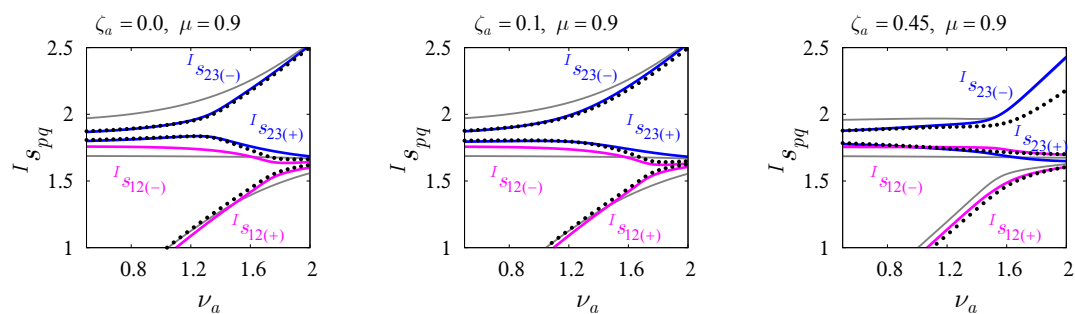


Fig. 5.8 The unstable region obtained by the numerical solutions (black dots) and the approximate solutions with modal correction (purple and blue areas)



#### Complex modal analysis with correction

Fig. 5.9 The real parts of the characteristic roots obtained by the numerical solutions (black dots) and the approximate solutions (purple and blue lines).



#### Complex modal analysis with correction

Fig. 5.10 The imaginary parts of the characteristic roots obtained by the numerical solutions (black dots) and the approximate solutions (purple and blue lines).

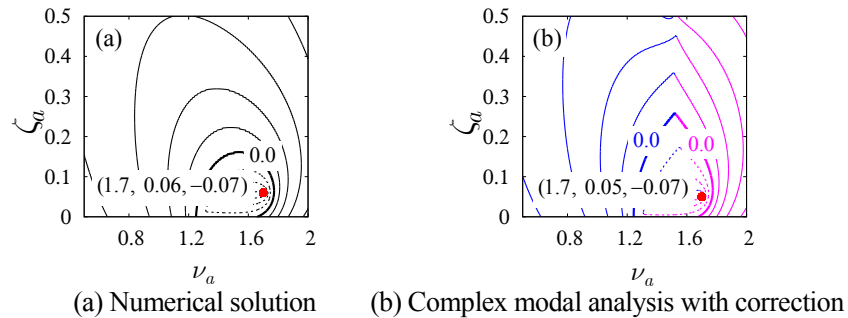


Fig. 5.11 The counter lines of the max value of the real parts of the characteristic roots.

また、図 5.11 は図 5.7 と同様に特性根  $R_{s_{12}}, R_{s_{23}}$  の最大値  $\text{Max}(R_{s_{12}}, R_{s_{23}})$  の等高線図を示している。数値計算では、 $\mu = 0.9$  とし、その他のパラメータは表 5.1 と同様のものを用いた。(a) は図 5.7(a) と同じ数値的厳密解の結果であり、(b) はモード補正法を適用した結果である。図 5.11 から同様に、モード補正法を適用した結果は、 $\nu_a$  および  $\zeta_a$  の広い範囲において数値的厳密解の結果と概ね一致しており、図 5.7(b) で示した補正法を用いない場合の結果よりも精度が改善していることがわかる。また、動吸振器の最適設計法についても、5.7 節で述べた Step1~Step3 の手続きが適用できる。図 5.8 中の赤色の点はモード補正法を導入した近似安定判別法を用いて 5.7 節で述べた最適設計手順を適用して求められた最適値を示している。この結果からも 5.7 節で述べた最適設計手順の有効性が確認でき、モード補正法の結果から得られる最適値と数値的厳密解の最適値がほぼ一致していることがわかる。

## 5.9 5章のまとめ

本節では、非対称行列系に対する動吸振器の動作原理の解明と最適設計法の確立を目指して、ディスクブレーキの鳴きのモデルを参考にした基本的かつ本質的な 3 自由度解析モデルを対象に検討を行った。本章で得られた知見を以下にまとめる。

- (1) 運動方程式を対称行列で構成される安定系と反対称行列で表される励振項とに分離し、安定系の固有モードに基づく新型複素モード解析法を適用した。得られるモード方程式から 2 つのモード間の連成のみを仮定した近似安定判別法を定式化し、比較のため、実モード解析に基づく近似安定判別法の概要についても示した。具体例を対象とした数値的厳密な検討の結果、新型複素モード解析法に基づく近似安定判別法は高精度であり、非対称行列系で発生する不安定振動を 2 つのモード間の連成で近似することの妥当性を確認した。ただし、他のモードの影響が強く現れ、精度が低下する領域が一部存在した。
- (2) 上記の近似安定判別法に基づき、2 つのモード間の連成によって生成される励振エネルギーと減衰によって消費される散逸エネルギーを解析的に導出し、動吸振器がそれぞれに与える影響について詳しく検討した。その結果、励振エネルギーは 2 つのモード間の位相差が原因で発生し、その位相差は安定系の固有角振動数、モード減衰および主系のモード形状を調整することによって変更可能であることが明らかになった。また、動吸振器の減衰によって散逸エネルギーは増加し、散逸エネルギーが励振エネルギーを上回

る場合に基本解が安定化することを解析的に示した。以上の結果から、動吸振器によって散逸エネルギーが励振エネルギーを上回るように安定系の自由振動特性を変化させて、1次と2次および2次と3次の連成による不安定振動を安定化し、系全体の安定化を実現することが動吸振器の役割であることが明らかになった。

- (3) 動吸振器の振動数比と減衰比が系の安定性に及ぼす傾向について数値的に検討し、動吸振器の効率的な最適設計手順を示した。具体的な計算例からその有効性を確認した。
- (4) (1)で述べた新型複素モード解析法に基づく近似安定判別法には、精度が大きく低下するパラメータが存在した。これは、モード間の連成を仮定した2つのモードとは異なる他のモードの影響が強く現れるためである。そこで、他のモードの影響を適切に補正するモード補正法を提案した。数値計算結果から、モード補正法の妥当性を検証し、他のモードが系の安定性に及ぼす影響を検討した。

以上のように、非対称行列系に対する動吸振器の動作原理が明らかになった。これは、第3章および第4章の係数励振系および負性抵抗系に対する動吸振器と比較すると、動吸振器の減衰によって散逸エネルギーが増加することやモード形状を変更して励振エネルギーを変化させることなどの共通点や、動吸振器の減衰によって励振エネルギーが増加するといった相違点を確認できる。そこで、次章では第3章、第4章および第5章での検討結果から、係数励振系、負性抵抗系および非対称行列系の3つの自励振動系に対して、共通する動吸振器の動作原理と動吸振器が及ぼす影響の相違点について検討する。

## 第6章 自励振動に対する動吸振器の動作原理について

第3章から第5章では、新型複素モード解析により得られるモード方程式から近似安定判別法に基づくモード別の高精度な励振エネルギーおよび散逸エネルギーを導出し、動吸振器がそれらに及ぼす影響を詳しく検討した。その結果、係数励振系、負性抵抗系および非対称行列系で生じる自励振動の安定化に果たす動吸振器の役割がそれぞれ明らかになった。

本章では、第3章から第5章までの検討結果から、3種類の自励振動系に共通する動吸振器の動作原理および相違点について検討する。まず、係数励振系、負性抵抗系および非対称行列系での動吸振器が励振エネルギーおよび散逸エネルギーに対して及ぼす影響はそれぞれ以下のようにまとめられる。また、その概要を表6.1に示す。

### (1) 係数励振系に対する動吸振器

#### Model A に対する検討結果

- ・動吸振器によって自由度が増加し、主系単体の主共振が1次と2次モードの2つの主共振に分離する。
- ・モード別の主共振領域における励振エネルギーは、動吸振器によって主系と動吸振器のモード形状を調整することにより、変更可能である。主系と動吸振器のモード振幅が小さいほど励振エネルギーも減小する。
- ・モード別の主共振領域における散逸エネルギーは、動吸振器の減衰を付加することによって増加する。
- ・1次および2次モードともに、係数励振項によって生成される励振エネルギーよりも減衰要素によって消費される散逸エネルギーが上回るようにモード減衰およびモード形状を変化させ、系全体を安定化させることが動吸振器の役割である。

#### Model B に対する検討結果

- ・動吸振器によって自由度が増加し、主系単体の主共振が1次と2次モードの2つの主共振に分離するだけでなく、1次と2次モードの連成による結合共振が新たに発生する。ただし、結合共振は動吸振器の僅かな減衰によって安定化するほど不安定度は小さい。
- ・モード別の主共振領域における励振エネルギーは、動吸振器によって固有角振動数および主系のモード形状を調整することにより、変更可能である。固有角振動数が高く、主系のモード振幅が小さいほど、励振エネルギーは減小する。
- ・モード別の主共振領域における散逸エネルギーは、動吸振器の減衰を付加することによって増加する。
- ・1次および2次モードともに、係数励振項によって生成される励振エネルギーよりも減衰要素によって消費される散逸エネルギーが上回るようにモード減衰、固有角振動数および主系のモード形状を変化させ、系全体を安定化させることが動吸振器の役割である。

### (2) 負性抵抗系に対する動吸振器

- ・動吸振器によって自由度が増加し、主系単体の不安定振動が1次と2次モードの2つの不安定振動に分離する。

- ・モード別の励振エネルギーは、動吸振器によって主系のモード形状を調整することにより、変更可能である。主系のモード振幅が小さいほど励振エネルギーは減小する。
  - ・モード別の散逸エネルギーは、動吸振器の減衰を付加することによって増加する。
  - ・1次および2次モードともに、負性抵抗によって生成される励振エネルギーよりも減衰要素によって消費される散逸エネルギーが上回るようにモード減衰および主系のモード形状を変化させ、系全体を安定化させることが動吸振器の役割である。
- (3) 非対称行列系に対する動吸振器
- ・主系単体時では1次と2次モードの連成による不安定振動が発生するが、動吸振器を付加することによって自由度が増加し、1次と2次モードの連成および2次と3次モードの連成による2つの不安定振動に分離する。
  - ・モード間の連成により生成される励振エネルギーは、2つのモード間の位相差が原因で発生し、動吸振器によって固有角振動数、モード減衰および主系のモード形状を調整することにより、変更可能である。固有角振動数の差が大きく、反対称行列を介した主系の連成が小さいときに励振エネルギーは減小するが、動吸振器の減衰によりモード減衰の差が増加し、励振エネルギーが増大する可能性がある。
  - ・モード別の散逸エネルギーは、動吸振器に減衰を付加することによって増加する。
  - ・1次と2次および2次と3次モードの連成による不安定振動に対して、モード間の連成により生成される励振エネルギーよりも減衰要素によって消費される散逸エネルギーが上回るように固有角振動数、モード減衰および主系のモード形状を変化させ、系を安定化させることが動吸振器の役割である。

Table 6.1 Effect of a dynamic absorber for 3 types of self-excited vibration.

自励振動系		発生する不安定振動	励振エネルギーへの影響	散逸エネルギーへの影響
(1) 係数励振	Model A	1次の主共振 2次の主共振	主系と動吸振器のモード形状を調整することで変更可能	モード減衰に依存
	Model B	1次の主共振 2次の主共振 (1次と2次の結合共振)	固有角振動数と主系のモード振幅を調整することで変更可能	モード減衰に依存
(2) 負性抵抗		1次の不安定振動 2次の不安定振動	主系のモード振幅を調整することで変更可能	モード減衰に依存
(3) 非対称行列		1次と2次の連成振動 2次と3次の連成振動	<ul style="list-style-type: none"> <li>・2つのモード間の位相差が原因で発生.</li> <li>・位相差は、固有角振動数の差、モード減衰の差および主系のモード形状を調整することで変更可能</li> </ul>	モード減衰の和に依存

まず、励振エネルギーへの影響について検討する。(1)の係数励振系については、Model Aでは励振エネルギーが主系と動吸振器のモード振幅に依存するのに対してModel Bでは固有角振動数と主系のモード振幅に依存し、(2)の負性抵抗系では主系のモード振幅のみ関係する。(3)の非対称行列系では、2つのモード間の位相差に基づき励振エネルギーが生成されるが、固有角振動数の差、モード減衰の差および主系のモード形状を調整することで位相差とともに励振エネルギーが変更される。このように、励振エネルギーに影響を及ぼすパラメータは自励振動の励振形態ごとに異なることがわかる。しかしながら、これらのパラメータは全て安定系に基づくものであることから、動吸振器によって安定系の振動特性を変化させ、励振エネルギーを変更するといったメカニズムは3つの自励振動系に対して共通するものである。

一方、散逸エネルギーについては、どのモデルに対してもモード減衰に依存することがわかる。つまり、動吸振器の減衰を付加することによって散逸エネルギーが増加することは3つの自励振動系に対して共通であることがわかる。

また、系全体の安定化は、係数励振系および負性抵抗系では1次および2次モードの散逸エネルギーが励振エネルギーを上回るように、非対称行列系では1次と2次および2次と3次の連成系で発生する散逸エネルギーが励振エネルギーを上回るように変更することで、実現していることがわかる。

以上の結果から、3つの自励振動系に対して共通する動吸振器の動作原理は、動吸振器の付加に伴い2つに分離した不安定振動に対して、散逸エネルギーが励振エネルギーを上回るように安定系の振動特性を変化させ、系全体の安定化を実現することである。

## 第7章 結論

本研究では、自励振動に対する動吸振器の動作原理の解明と最適設計法の開発を目指して、係数励振系、負性抵抗系および非対称行列系の3種類の自励振動系を対象に、解析ツールとしてエネルギー的な検討に適した新型複素モード解析法を提案し、モード別の励振エネルギーおよび散逸エネルギーに及ぼす動吸振器の影響を検討した結果、共通する動吸振器の動作原理を明らかにした。本章では、以下のように本論文を総括する。

第1章では、自励振動に関する基礎的事項を整理するとともに、その防止対策の一つである動吸振器の有効性を検証した研究についてまとめた。本研究では、動吸振器がモード別の励振エネルギーおよび散逸エネルギーに及ぼす影響を検討すれば、動作原理が解明される可能性が高いと考え、それにはエネルギー的な検討に向けた従来とは異なるモード解析法が必要であることを述べた。また、本研究の目的および構成を示した。

第2章では、線形自励振動系の一般的な運動方程式を対象にエネルギー的な検討に適した新型複素モード解析法を提案した。まず、従来の実モード解析および複素モード解析の概略を説明し、その課題点を示した。次に、これらを踏まえ、質量、剛性および減衰行列を同時に対角化しつつ、モード方程式を2階の実常微分方程式として導出する具体的な手順を示した。

第3章では、係数励振系に対する動吸振器の動作原理について検討した。1自由度係数励振系に振り子型の動吸振器を取り付けた Model A およびばねマス型の動吸振器を取り付けた Model B のタイプの異なる2種類の2自由度解析モデルを構築した。まず、モード別のエネルギーを導出するため、これらの解析モデルに第2章で述べた新型複素モード解析を適用し、主共振領域では励振項のモード間の連成を無視し、結合共振領域ではモード間の連成のみを仮定した近似安定判別法を定式化した。この手法により得られる結果は具体的な数値計算結果より高精度であることを確認し、モード別の励振エネルギーおよび散逸エネルギーに対して動吸振器が及ぼす影響を検討した。その検討結果により得られた知見を以下にまとめる。

- (1) 近似安定判別法を用いてモード別の散逸エネルギーおよび励振エネルギーを導出し、散逸エネルギーが励振エネルギーを上回る場合に系の安定化が実現されることを解析的に示した。
- (2) 主共振領域における励振エネルギーは、Model A では、主系と動吸振器のモード形状を調整することによって変更されるが、Model B では、固有角振動数および主系のモード形状を調整することによって変更されることが明らかになった。また、Model B では1次と2次モードの連成により結合共振が発生するが、動吸振器の僅かな減衰により安定化されることが確認された。
- (3) 散逸エネルギーは Model A および Model B とともに、動吸振器に減衰を付加することによって増加することが示された。
- (4) Model A および Model B とともに、1次および2次モードの主共振領域において、散逸エネルギーが励振エネルギーを上回るように、安定系のモード減衰、固有角振動数および

モード形状を調整することによって系全体を安定化させることが動吸振器の役割であることが明らかになった。

また、上記動作原理に関する数値的な検討結果から、動吸振器のパラメータが系の安定性に及ぼす影響が Model A および Model B で異なることが確認された。Model A では2次モードの散逸エネルギーが非常に大きくなることから、1次モードの特性指数のみを最小化するような最適設計手順を示し、Model B では2つのモードの特性指数が等しくなる場合に系全体の安定度が高くなることから、2つのモードの特性指数が一致するような動吸振器の振動数比とそれらを最小化するような減衰比をそれぞれ求める最適設計手順を示した。

第4章では、第3章と同様に、負性抵抗系に対する動吸振器の動作原理についてモード別のエネルギー的な観点から検討した。負性抵抗系の基本的かつ本質的な解析モデルとして、ギャロッピングが発生する1自由度系に動吸振器を取り付けた2自由度解析モデルを取り扱った。まず、モード別のエネルギーを導出するため、第2章で述べた新型複素モード解析法を負性抵抗系に対して適用し、モード間の連成を無視したモード別の近似安定判別法を定式化した。具体的な数値計算結果からその有効性を確認し、モード別の励振エネルギーおよび散逸エネルギーに対して動吸振器が及ぼす影響を検討した。その検討結果により得られた知見を以下にまとめる。

- (1) 近似安定判別法を用いてモード別の散逸エネルギーおよび励振エネルギーを導出し、散逸エネルギーが励振エネルギーを上回る場合に単一モードの不安定振動は安定化されることを解析的に示した。
- (2) 負性抵抗に起因する励振力によって生成される励振エネルギーは、主系のモード形状を調整することによって変更されることが明らかになった。
- (3) 散逸エネルギーは、動吸振器の減衰を付加することによって増加することが示された。
- (4) 1次および2次モードの不安定振動に対して、散逸エネルギーが励振エネルギーを上回るように、安定系のモード減衰および主系のモード形状を調整することによって系全体を安定化させることが動吸振器の役割であることが明らかになった。

また、動作原理に関する数値的な検討結果を踏まえ動吸振器の最適設計法について検討した。1次と2次の特性根の実部が等しくなるような振動数比とそれらを最小化するような減衰比をそれぞれ探索する最適設計手順を示し、具体的な数値計算結果からその有効性を確認した。

第5章では、第3章および第4章と同様に、非対称行列系に対する動吸振器について検討した。非対称行列系の典型例として、摩擦により剛性行列が非対称となる2自由度非対称行列系に動吸振器を取り付けた基本的かつ本質的な3自由度解析モデルを取り扱った。まず、対称な行列で構成される安定系の固有モードに基づく新型複素モード解析法を適用し、2つのモード間の連成による不安定振動を仮定した近似安定判別法を定式化した。この近似の妥当性を具体的な数値計算結果から確認し、動吸振器が系の安定化に及ぼす影響について検討した。以下に第5章で得られた知見をまとめる。

- (1) 近似安定判別法を用いて、2つのモード間の連成により生成される励振エネルギーと散逸エネルギーを導出し、散逸エネルギーが励振エネルギーを上回る場合に2つのモード間の連成振動は安定化することを解析的に示した。



- (2) 2つのモード間の連成により生成される励振エネルギーは、2つのモード間の位相差が原因で発生し、その位相差は安定系の固有角振動数、モード減衰および主系のモード形状を調整することにより変更可能であることが明らかになった。
- (3) 2つのモード別の散逸エネルギーは動吸振器の減衰を付加することによって増加することが示された。
- (4) 1次と2次および2次と3次モードの連成により発生する不安定振動に対して、散逸エネルギーが励振エネルギーを上回るように安定系のモード減衰、固有角振動数および主系のモード形状を調整することによって、系全体を安定化させることが動吸振器の役割であることが明らかになった。

また、非対称行列系で発生する励振エネルギーはモード減衰の差にも依存するため、動吸振器の減衰によってモード減衰の差が増加すれば励振エネルギーが増大し、系の安定化には不利に働く可能性があることが明らかになった。さらに、動吸振器の最適設計法については、1次と2次および2次と3次の連成を仮定して導出される近似特性根の実部が一致するように動吸振器の振動数比を探索し、それらが最小化するように動吸振器の減衰比を求める最適設計手順を示した。具体的な数値計算例からその有効性を確認した。

第6章では、第3章から第5章までの検討結果を整理し、係数励振系、負性抵抗系および非対称行列系に対して共通する動吸振器の動作原理について検討した。その結果、動吸振器が励振エネルギーに及ぼす影響は励振形態ごとに異なるものの、安定系の振動特性を変化させることで励振エネルギーを変更するといった共通のメカニズムが明らかになった。また、散逸エネルギーについては動吸振器の減衰によって増加するといった共通の影響が示された。結果として、散逸エネルギーが励振エネルギーを上回るように安定系の振動特性を変化させ、系全体を安定化させることが3つの自励振動系に共通する動吸振器の動作原理であることが明らかになった。

## 謝辞

本論文をまとめるに際して、学部から現在に至るまで懇切丁寧なご指導、ご鞭撻を頂くとともに、本論文の主査を務めていただきました九州大学大学院機械工学研究院機械工学部門力学システム講座近藤孝広教授には心より感謝の意を表します。学部4年から修士課程までは多目的最適設計法について、博士課程では自励振動に対する動吸振器について近藤先生の下、研究を行えたことを非常に光栄に思います。本論文をまとめるにあたり、雫本信哉教授ならびに井上卓見教授から貴重なご討論と助言をいただきました。厚くお礼申し上げます。

本研究の遂行にあたり、森博輝准教授、宗和伸行助教には多大なご支援を頂きました。活発なご討論をいただくとともに、本論文を完成させるにあたり多くの助言をいただきました。皆様に厚くお礼申し上げます。また、研究活動や研究行事等でお世話になりました当時機械振動学研究室に在籍していた大学院生および卒業研究生、力学システム大講座の皆様には感謝いたします。九州大学の力学システム大講座という非常に恵まれた環境で研究がおこなえたこと、ならびに日本学生支援機構および旭硝子奨学会による経済的支援に感謝いたします。

最後に、これまで支えてくれた家族に感謝いたします。

平成27年12月  
九州大学大学院 工学府 機械工学専攻  
谷口 智之

## 付録 A1 係数励振系に関する補足

### A1.1 式 (3.15) の導出

3.3.2 項では、式 (3.15) で表される結合共振領域における近似的な特性根を導出したが、その導出過程については本編では省略した。本節ではその導出過程を詳しく述べる。なお、本節で用いる記号は第 3 章で用いたものと同様である。

まず、不減衰系するとき、式 (3.13) の  $\det[\mathbf{E}_{pq}(I\sigma_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4] = 0$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (2{}^R\sigma_{pq}\Omega X)^2 + Y^2 &= 0 \\ X &= \varepsilon^2 \hat{\delta}_{0,pq}^2 \omega_1 - 4\omega_{\text{II}} \left\{ 4{}^R\sigma_{pq}^2 \Omega^2 \omega_1^2 + (\omega_1^2 - \tilde{\omega}_p^2)^2 \right\} \\ Y &= \varepsilon^2 \hat{\delta}_{0,pq}^2 (\omega_1^2 - \tilde{\omega}_p^2) - 4(\omega_{\text{II}}^2 - \tilde{\omega}_q^2) \left\{ 4{}^R\sigma_{pq}^2 \Omega^2 \omega_1^2 + (\omega_1^2 - \tilde{\omega}_p^2)^2 \right\} \\ \omega_1 &= (1 + I\sigma_{pq})\Omega, \quad \omega_{\text{II}} = (1 - I\sigma_{pq})\Omega \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.1})$$

${}^R\sigma_{pq}$  および  $I\sigma_{pq}$  は実数であるため、式 (A1.1) が成立するためには  $X=0, Y=0$  となる必要がある。ここで、 $\Omega = (\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q)/2$  のとき、 $X=0, Y=0$  の条件から  ${}^R\sigma_{pq}$  を消去すると  $I\sigma_{pq}$  に関する次のような式が得られる。

$$\left\{ I\sigma_{pq}(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q) - (\tilde{\omega}_p - \tilde{\omega}_q) \right\} \left\{ I\sigma_{pq}^2(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q) + I\sigma_{pq}(\tilde{\omega}_p - \tilde{\omega}_q) - 2(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q) \right\} = 0 \quad (\text{A1.2})$$

式 (A1.2) から 3 つの  $I\sigma_{pq}$  が求められるが、 ${}^R\sigma_{pq}$  および  $I\sigma_{pq}$  がともに実数となるのは  $I\sigma_{pq} = (\tilde{\omega}_p - \tilde{\omega}_q)/(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q)$  のみである。

次に、減衰系の近似特性根を導出する。上記検討より、不減衰時には  $I\sigma_{pq} = (\tilde{\omega}_p - \tilde{\omega}_q)/(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q)$  となることから、減衰時には、 $I\sigma_{pq} = (\tilde{\omega}_p - \tilde{\omega}_q)/(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q) + \varepsilon\mu_{pq}$  のように仮定する。また、 $\Omega = \{(\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q)/2\} \cdot (1 + \varepsilon\mu)$  と仮定すると、この  $I\sigma_{pq}, \Omega$  を式 (3.13) の  $\det[\mathbf{E}_{pq}(I\sigma_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4] = 0$  に代入して整理すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \left\{ ({}^R\sigma_{pq} + i\varepsilon\mu_{pq})\Omega_0 + (\tilde{\zeta}_p + i\varepsilon\mu)\tilde{\omega}_p \right\} \left\{ ({}^R\sigma_{pq} + i\varepsilon\mu_{pq})\Omega_0 + (\tilde{\zeta}_q - i\varepsilon\mu)\tilde{\omega}_q \right\} \\ - \frac{\varepsilon^2(\tilde{\Delta}_{12pq0} + i\tilde{\Delta}_{33pq0})^2}{16\tilde{\omega}_p\tilde{\omega}_q} = 0 \\ \Omega_0 = \frac{\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q}{2}, \quad \tilde{\Delta}_{12pq0} = (\delta_{1pq} + \delta_{2pq}\tilde{\omega}_p\tilde{\omega}_q), \quad \tilde{\Delta}_{33pq0} = (\delta_{3qp}\tilde{\omega}_p - \delta_{3pq}\tilde{\omega}_q) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.3})$$

式 (A1.3) は  $({}^R\sigma_{pq} + i\varepsilon\mu_{pq})\Omega_0$  に関する複素 2 次方程式となり、 ${}^R\sigma_{pq}, \varepsilon\mu_{pq}$  が実数である条件から、式 (3.15) のような  ${}^R\sigma_{pq}, \varepsilon\mu_{pq}$  が求められる。

$$\left. \begin{aligned}
R_{\sigma pq} &= -\frac{\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p + \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q}{\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q} \pm \frac{1}{\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q} \operatorname{Re} \left[ \sqrt{{}^c \tilde{D}_{pq}} \right] \\
\varepsilon \mu_{pq} &= -\varepsilon \mu \frac{\tilde{\omega}_p - \tilde{\omega}_q}{\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q} \pm \frac{1}{\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{{}^c \tilde{D}_{pq}} \right] \\
{}^c \tilde{D}_{pq} &= \left\{ \tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q + i \varepsilon \mu (\tilde{\omega}_p + \tilde{\omega}_q) \right\}^2 + \frac{\varepsilon^2 (\tilde{\Delta}_{12pq0} + i \tilde{\Delta}_{33pq0})^2}{4 \tilde{\omega}_p \tilde{\omega}_q}
\end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

## A1.2 励振エネルギーの分散化 [式 (3.34)] の導出

第3章で述べた係数励振系に対するモード別のエネルギー的な検討の結果、Model B の不減衰系では1次と2次の励振エネルギーの和が主系単体時の励振エネルギーに等しいことが明らかになった。本節では、このような関係が導出される詳しい計算過程について説明する。

まず、Model B に対して、不減衰時におけるモード別の励振エネルギーの最大値  $W_{P,p,\max}$  は、式 (3.30) および式 (3.33) の導出と同様の手続きにより、実モード  $\hat{\phi}_p$  を用いると次のように表される。

$$W_{P,p} = \frac{\varepsilon \pi}{2} \frac{\hat{\delta}_{0,p}}{\hat{\omega}_p^2} = \frac{\varepsilon \pi}{2} \frac{\hat{\phi}_p^T \mathbf{K}_P \hat{\phi}_p}{\hat{\phi}_p^T \mathbf{K} \hat{\phi}_p} \quad (A1.4)$$

ここに、 $\mathbf{M}$  で正規化された実モードは  $\hat{\omega}_p^2 = \hat{\phi}_p^T \mathbf{K} \hat{\phi}_p$  となることを用いた。次に、式 (A1.6) より、1次および2次モードの励振エネルギーの和は対角和（トレース  $\operatorname{tr}$ ）を用いて表すことができ、トレースの性質を利用すると次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
W_{P,1,\max} + W_{P,2,\max} &= \frac{\varepsilon \pi}{2} \operatorname{tr} \left[ (\hat{\Phi}^T \mathbf{K}_P \hat{\Phi}) (\hat{\Phi}^T \mathbf{K} \hat{\Phi})^{-1} \right] \\
&= \frac{\varepsilon \pi}{2} \operatorname{tr} \left[ \hat{\Phi}^T \mathbf{K}_P \mathbf{K}^{-1} (\hat{\Phi}^T)^{-1} \right] = \frac{\varepsilon \pi}{2} \operatorname{tr} \left[ \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_P \right]
\end{aligned} \right\} \quad (A1.5)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_P$  は Model B に対して具体的に次のように求められる。

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_P = \frac{1}{\alpha^2 \kappa} \begin{bmatrix} \alpha^2 \kappa & \alpha^2 \kappa \\ \alpha^2 \kappa & 1 + \alpha^2 \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (A1.6)$$

式 (A1.8) を式 (A1.7) に代入すると、 $W_{P,1,\max} + W_{P,2,\max} = \varepsilon \pi / 2$  となる。一方、主系単体時の励振エネルギーの最大値は  $W_{P,0,\max} = \varepsilon \pi / 2$  であることから、第3章の式 (3.34) の第2式が導出される。Model A に対しても同様の手続きにより  $W_{P,1,\max} + W_{P,2,\max}$  が求められ、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
\text{Model A} : W_{P,1,\max} + W_{P,2,\max} &= 2\pi \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha^2 + \gamma}{1 - \gamma} \right) > 2\pi \varepsilon = W_{P,0,\max} \quad (\because 0 < \gamma < 1) \\
\text{Model B} : W_{P,1,\max} + W_{P,2,\max} &= \frac{\varepsilon \pi}{2} = W_{P,0,\max}
\end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Model A では係数励振項に動吸振器に関する項が存在するため、分散化の特徴を示さない。

また、上記の特徴については、 $n$  自由度係数励振系に1つの動吸振器を取り付けた $n+1$ 自由度系では次のように考察できる。まず、不減衰系の場合、 $n+1$ 自由度系の剛性行列 $\mathbf{K}$ と係数励振行列 $\mathbf{K}_P$ は、2自由度系の場合を参考に、それぞれ次のように導出できると仮定する。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{a,jj} & \mathbf{k}_{a,j} \\ \mathbf{k}_{a,j}^T & k_{a,j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{P0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.7})$$

$$\mathbf{k}_{a,j} = [0 \cdots k_{a,j} \cdots 0]^T, \quad \mathbf{K}_{a,jj} = \frac{1}{k_{a,j}} \mathbf{k}_{a,j} \mathbf{k}_{a,j}^T$$

ここに、 $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_{P0}$  は動吸振器が付加されていない主系の $n \times n$ の正定な剛性行列および係数励振行列であり、 $k_{a,j}$  は動吸振器を $j$ 番目の質点に取り付けた場合の動吸振器の剛性係数を示す。例えば、Model B の場合は $k_{a,j} = \kappa \alpha^2$ となる。ここで、式 (A1.9) から、 $\mathbf{K}^{-1}$  は具体的に次のように求められる。

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^{-1} & -\frac{1}{k_{a,j}} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{k}_{a,j} \\ -\frac{1}{k_{a,j}} \mathbf{k}_{a,j}^T \mathbf{K}_0^{-1} & \frac{1}{k_{a,j}} \left( 1 + \frac{1}{k_{a,j}} \mathbf{k}_{a,j}^T \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{k}_{a,j} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A1.8})$$

一方、不減衰時の $n+1$ 自由度係数励振系における1次から $n+1$ 次までの励振エネルギーの最大値 $W_{P,i,\max}$ , ( $i=1, \dots, n+1$ )の和は式 (A1.10) を用いると、式 (A1.7) と同様に次のように表される。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} W_{P,i,\max} &= \frac{\varepsilon\pi}{2} \text{tr} \left[ (\hat{\Phi}^T \mathbf{K}_P \hat{\Phi}) (\hat{\Phi}^T \mathbf{K} \hat{\Phi})^{-1} \right] \\ &= \frac{\varepsilon\pi}{2} \text{tr} \left[ \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_P \right] = \frac{\varepsilon\pi}{2} \text{tr} \left[ \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{K}_{P0} \right] \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

ここで、動吸振器を付加する前の励振エネルギーの最大値 $W_{P0,j,\max}$ , ( $j=1, \dots, n$ )の和についても同様に $\varepsilon\pi \text{tr}[\mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{K}_{P0}]/2$ と求められることから、動吸振器を付加した場合の励振エネルギーの最大値 $W_{P,i,\max}$ , ( $i=1, \dots, n+1$ )との間に次のような関係が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{n+1} W_{P,i,\max} = \sum_{j=1}^n W_{P0,j,\max} \quad (\text{A1.10})$$

このように、剛性行列と係数励振行列が式 (A1.9) のように表される場合には、 $n+1$ 自由度系に対しても同様に不減衰時には励振エネルギーの分散化が示される。

### A1.3 式 (3.38) の導出

3.7.2 項では、動作原理の解明のため、解析的に散逸エネルギーと励振エネルギーに関する関係式を導出したが、その際に、式 (3.38) の導出過程については煩雑であるため本編では省略

した. そこで, 本節ではその詳しい導出過程について説明する. なお, 本節で用いる記号は第3章で用いたものと同様である.

まず, 式 (3.13) の  $\{\mathbf{E}_{pq}({}^I\sigma_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4\}\mathbf{g}_{pq} = \mathbf{0}$  と  $\{\mathbf{E}_{pq}(-{}^I\tilde{\sigma}_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4\}\mathbf{h}_{pq} = \mathbf{0}$  との間には  ${}^I\tilde{\sigma}_{pq} = -{}^I\sigma_{pq}$  の関係が成立するため,  $\{\mathbf{E}_{pq}({}^I\sigma_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4\}(\mathbf{g}_{pq} + \mathbf{h}_{pq}) = \mathbf{0}$  が成り立つ. そこで, 具体的に  $\{\mathbf{E}_{pq}({}^I\sigma_{pq}) - {}^R\sigma_{pq}\mathbf{I}_4\}(\mathbf{g}_{pq} + \mathbf{h}_{pq}) = \mathbf{0}$  を表すと次式のようになる.

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= -\varepsilon(\tilde{\Delta}_{12pq}H_q + \tilde{\Delta}_{33pq}G_q) - 4G_p\omega_1({}^R\sigma_{pq}\Omega + \tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p) - 2H_p(\omega_1^2 - \tilde{\omega}_p^2) = 0 \\ D_2 &= -\varepsilon(\tilde{\Delta}_{12pq}G_q - \tilde{\Delta}_{33pq}H_q) - 4H_p\omega_1({}^R\sigma_{pq}\Omega + \tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p) + 2G_p(\omega_1^2 - \tilde{\omega}_p^2) = 0 \\ D_3 &= -\varepsilon(\tilde{\Delta}_{21pq}H_p - \tilde{\Delta}_{33pq}G_p) - 4G_q\omega_{II}({}^R\sigma_{pq}\Omega + \tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q) - 2H_q(\omega_{II}^2 - \tilde{\omega}_q^2) = 0 \\ D_4 &= -\varepsilon(\tilde{\Delta}_{21pq}G_p + \tilde{\Delta}_{33pq}H_p) - 4H_q\omega_{II}({}^R\sigma_{pq}\Omega + \tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q) + 2G_q(\omega_{II}^2 - \tilde{\omega}_q^2) = 0 \\ G_j &= (A_j + C_j), H_j = (B_j + D_j), j = p, q \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.11})$$

次に, 式 (A1.4) から  $D_1G_p + D_2H_p$  を計算すると次式が導出される.

$$\varepsilon\{\tilde{\Delta}_{12pq}(G_pH_q + H_pG_q) + \tilde{\Delta}_{33pq}(G_pG_q - H_pH_q)\} + 4(G_p^2 + H_p^2)\omega_1({}^R\sigma_{pq}\Omega + \tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p) = 0 \quad (\text{A1.12})$$

ここで, 式 (3.17) より,  $G_j = A_j + C_j = \tilde{A}_j \cos \psi_j$ ,  $H_j = B_j + D_j = \tilde{A}_j \sin \psi_j$  を代入し,  $\tilde{A}_p$  で除ると, 式 (A1.5) から式 (3.38) が導かれる.

$$\varepsilon\tilde{A}_q\{\tilde{\Delta}_{12pq0} \sin(\psi_p + \psi_q) + \tilde{\Delta}_{33pq0} \cos(\psi_p + \psi_q)\} = -4\tilde{A}_p\omega_1({}^R\sigma_{pq}\Omega + \tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p) \quad (\text{3.38})$$

## 付録 A2 負性抵抗系に関する補足

### A2.1 励振エネルギーの分散化 [式 (4.18)] の導出

第4章で述べた負性抵抗系の不減衰時には、1次と2次の励振エネルギーの和が主系単体時の励振エネルギーに等しいことが明らかになった。本節では付録A1のA1.3節と同様に、励振エネルギーの分散化の導出過程について説明する。まず、第4章で述べた負性抵抗系におけるモード別の励振エネルギーは、不減衰時には式(4.15)および式(4.9)を考慮すると、実モード $\hat{\phi}_p$ を用いて次のように表される。

$$W_{N,p} = -\frac{\varepsilon}{2} \hat{\delta}_{0,p} = -\frac{\varepsilon}{2} \hat{\phi}_p^T \mathbf{C}_N \hat{\phi}_p \quad (\text{A2.1})$$

式(A2.1)より、1次および2次モードの励振エネルギーの和は、 $\mathbf{M}$ で正規化された実モードは $\hat{\phi}_p^T \mathbf{M} \hat{\phi}_p = 1$ となることを考慮すると、トレースの性質を用いて次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} W_{N,1} + W_{N,2} &= -\frac{\varepsilon}{2} \text{tr} \left[ \hat{\Phi}^T \mathbf{C}_N \hat{\Phi} \right] = -\frac{\varepsilon}{2} \text{tr} \left[ (\hat{\Phi}^T \mathbf{C}_N \hat{\Phi}) (\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi})^{-1} \right] \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} \text{tr} \left[ \hat{\Phi}^T \mathbf{C}_N \mathbf{M}^{-1} (\hat{\Phi}^T)^{-1} \right] = -\frac{\varepsilon}{2} \text{tr} \left[ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_N \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.2})$$

ここで、第4章で述べた負性抵抗系の解析モデルにおいて、 $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_N$ は式(4.2)より具体的に次のように求められる。

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_N = \omega_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \omega_n \begin{bmatrix} c_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.3})$$

式(A2.3)を式(A2.2)に代入すると、 $W_{N,1} + W_{N,2} = -\varepsilon c_N \omega_n / 2$ の関係式が導き出される。一方、主系単体時の励振エネルギーは $W_{N,0} = -\varepsilon c_N \omega_n / 2$ と求められることから、第4章の式(4.18)が次のように導き出される。

$$W_{N,1} + W_{N,2} = -\frac{\varepsilon}{2} c_N \omega_n = W_{N,0} \quad (\text{4.4})$$

また、上記の特徴は、動吸振器に負性抵抗に関する項が存在しない場合には、付録A1のA1.3節と同様の手続きにより、 $n+1$ 自由度不減衰系に対しても成立することが確かめられる。動吸振器を付加する前の励振エネルギー $W_{N0,j}$ ,  $j=1, \dots, n$ と動吸振器を付加した場合の励振エネルギー $W_{N,i}$ ,  $i=1, \dots, n+1$ との間に次のような関係が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{n+1} W_{N,i} = \sum_{j=1}^n W_{N0,j} \quad (\text{A2.5})$$

## 付録 A3 非対称行列系に関する補足

### A3.1 非対称行列系に対するモード分離について

第 5 章で述べた非対称行列系に対する検討では、元の運動方程式の非対称な剛性行列から、不安定化要因を反対称行列とし、それ以外の対称な行列から構成される系を安定系として分離した。一方で、摩擦が作用しない系を安定系、摩擦力に関する項を不安定化要因として分離する単純な方法も考えられる。そこで、本付録では摩擦が作用しない安定系に対してモード解析を適用し、得られるモード方程式から近似安定判別法を定式化して具体的な数値計算結果からその精度を検証する。

#### A3.1.1 摩擦力が作用しない安定系に基づくモード方程式の導出

まず、式 (5.1) および式 (5.2) から、元の運動方程式を摩擦力が作用しない安定系と摩擦力に関する項とに分離すると、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K_0\mathbf{x} &= -\mathbf{f}_F, \quad \mathbf{f}_F = K_F\mathbf{x} \\ \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ u_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = 2\omega_n \begin{bmatrix} \zeta_n + \kappa\zeta_a\nu_a & \eta\kappa\zeta_a\nu_a & -\kappa\zeta_a\nu_a \\ \eta\kappa\zeta_a\nu_a & \zeta_n + \eta^2\kappa\zeta_a\nu_a & -\eta\kappa\zeta_a\nu_a \\ -\kappa\zeta_a\nu_a & -\eta\kappa\zeta_a\nu_a & \kappa\zeta_a\nu_a \end{bmatrix} \\ K_0 &= \omega_n^2 \begin{bmatrix} 1 + \gamma + \kappa\nu_a^2 & -\gamma\alpha + \eta\kappa\nu_a^2 & -\kappa\nu_a^2 \\ -\gamma\alpha + \eta\kappa\nu_a^2 & 1 + \gamma\alpha^2 + \eta^2\kappa\nu_a^2 & -\eta\kappa\nu_a^2 \\ -\kappa\nu_a^2 & -\eta\kappa\nu_a^2 & \kappa\nu_a^2 \end{bmatrix}, \quad K_F = \mu\beta\gamma\omega_n^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.1})$$

式 (A3.1) 中の無次元パラメータは式 (5.2) に示すものと同様であり、第 5 章と同様に  $C$ 、 $\mu$  はともに微小量と仮定する。ここで、第 2 章で述べた新型複素モード解析法を適用するにあたり、式 (2.1) の励振力  $\varepsilon\mathbf{f}_S$  が本節では  $\mathbf{f}_F$  であることを考慮すると、式 (5.5) の導出手順と同様の手続きにより、式 (A3.1) は次のようなモード方程式に変換される。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\tilde{Z}\tilde{\Omega}\dot{\xi} + \tilde{\Omega}^2\xi &= -\tilde{\Delta}_3\ddot{\xi} - \tilde{\Delta}_2\dot{\xi} - \tilde{\Delta}_1\xi \\ \tilde{\Delta}_1 &= {}^R\Phi^T K_F {}^R\Phi, \quad \tilde{\Delta}_2 = {}^R\Phi^T K_F ({}^I\Phi\tilde{\Omega}^{-1}) + (\tilde{\Omega}^{-1}{}^I\Phi^T) K_F {}^R\Phi \\ \tilde{\Delta}_3 &= (\tilde{\Omega}^{-1}{}^I\Phi^T) K_F ({}^I\Phi\tilde{\Omega}^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.2})$$

このように、式 (A3.1) に対しても同様に、質量、減衰および剛性行列を同時に対角化した上で、モード方程式を 2 階の実常微分方程式として導出することが可能である。その一方で、右辺の摩擦力に関する非対称行列項  $\tilde{\Delta}_j$ 、 $j=1\sim 3$  は対角化されず、第 5 章で述べたような反対称行列ではなく、一般的な非対称行列となる。



### A3.1.2 近似安定判別法

本節では、5.3 節と同様に式 (A3.2) のモード方程式から近似的な特性根 (近似特性根) を導出し、近似安定判別法を定式化する。5.3 節と同様に、式 (A3.2) から  $p$  次および  $q$  次モード ( $\tilde{\omega}_p < \tilde{\omega}_q$ ) に関する項のみを取り出し、他のモードの連成項を無視すると、次のような連成系のモード方程式が導出される。

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c} \ddot{\xi}_p \\ \ddot{\xi}_q \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} 2\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p & 0 \\ 0 & 2\tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\xi}_p \\ \dot{\xi}_q \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} \tilde{\omega}_p^2 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_q^2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \xi_p \\ \xi_q \end{array} \right] \\
 & = - \left[ \begin{array}{cc} \tilde{\delta}_{3pp} & \tilde{\delta}_{3pq} \\ \tilde{\delta}_{3qp} & \tilde{\delta}_{3qq} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\xi}_p \\ \dot{\xi}_q \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} \tilde{\delta}_{2pp} & \tilde{\delta}_{2pq} \\ \tilde{\delta}_{2qp} & \tilde{\delta}_{2qq} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \xi_p \\ \xi_q \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} \tilde{\delta}_{1pp} & \tilde{\delta}_{1pq} \\ \tilde{\delta}_{1qp} & \tilde{\delta}_{1qq} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \xi_p \\ \xi_q \end{array} \right] \\
 & \tilde{\delta}_{1ij} = {}^R\phi_i^T \mathbf{K}_F {}^R\phi_j, \quad \tilde{\delta}_{2ij} = \frac{{}^R\phi_i^T \mathbf{K}_F {}^I\phi_j}{\tilde{\omega}_j} + \frac{{}^I\phi_i^T \mathbf{K}_F {}^R\phi_j}{\tilde{\omega}_i} \\
 & \tilde{\delta}_{3ij} = \frac{{}^I\phi_i^T \mathbf{K}_F {}^I\phi_j}{\tilde{\omega}_i\tilde{\omega}_j}, \quad (i, j) = (p, p), (p, q), (q, p), (q, q)
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.3})$$

ここで、式 (A3.3) の  $p$  次モードおよび  $q$  次モードの振動解を  $\xi_k = \Xi_k e^{s_{pq}t} + \mathbf{cc}$ ,  $k = p, q$  ( $s_{pq} = {}^R s_{pq} + i {}^I s_{pq}$  は特性根,  $\mathbf{cc}$  は前項の複素共役項) と仮定すると、第 5 章の式 (5.7) 以下と同様の手続きにより、近似特性根は次のように導出される。

$$\left. \begin{aligned}
 & {}^R s_{pq(\pm)} = -\frac{\tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p + \tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q}{2} - \frac{\tilde{\delta}_{2pp} + \tilde{\delta}_{2qq}}{4} \pm \frac{1}{2\tilde{\omega}_{P0,pq}} \text{Im} \left[ \sqrt{{}^C \tilde{D}_{pq}} \right] \\
 & {}^I s_{pq(\pm)} = \sqrt{\tilde{\omega}_{P,pq}^2 \mp \text{Re} \left[ \sqrt{{}^C \tilde{D}_{pq}} \right]} \\
 & {}^C \tilde{D}_{pq} = \left\{ \tilde{\omega}_{M,pq}^2 - i\tilde{\omega}_{P0,pq} \left( \tilde{\zeta}_p\tilde{\omega}_p + \frac{\tilde{\delta}_{2pp}}{2} - \tilde{\zeta}_q\tilde{\omega}_q - \frac{\tilde{\delta}_{2qq}}{2} \right) \right\}^2 \\
 & \quad + (\tilde{\delta}_{13pq} + i\tilde{\delta}_{2pq}\tilde{\omega}_{P0,pq})(\tilde{\delta}_{13qp} + i\tilde{\delta}_{2qp}\tilde{\omega}_{P0,pq}) \\
 & \tilde{\delta}_{13ij} = \tilde{\delta}_{1ij} - \tilde{\delta}_{3ij}\tilde{\omega}_{P0,pq}^2, \quad i = p, q, \quad j = p, q \\
 & \tilde{\omega}_{P0,pq}^2 = \frac{\tilde{\omega}_p^2 + \tilde{\omega}_q^2 + \tilde{\delta}_{1pp} + \tilde{\delta}_{1qq}}{2}, \quad \tilde{\omega}_{P,pq}^2 = \frac{\tilde{\omega}_p^2 + \tilde{\omega}_q^2 + \tilde{\delta}_{13pp} + \tilde{\delta}_{13qq}}{2} \\
 & \tilde{\omega}_{M,pq}^2 = \frac{\tilde{\omega}_q^2 - \tilde{\omega}_p^2 + \tilde{\delta}_{13qq} - \tilde{\delta}_{13pp}}{2}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.4})$$

式 (A3.4) より、 ${}^R s_{pq(+)}$  と  ${}^R s_{pq(-)}$  のうち大きい方の値が負であれば  $p$  次および  $q$  次モードの振動解は安定、正であれば不安定と判別できる。このように、摩擦力に基づいて不安定化要因を分離した場合、得られる近似特性根は第 5 章で述べた近似特性根よりも複雑な形式で表される。

### A3.1.3 数値計算例

本節では 5.5 節と同様に、A3.1.2 節で述べた近似安定判別法の精度を数値的厳密解と比較する。動吸振器の減衰が  $\zeta_a = 0.0, 0.1, 0.3$  の 3 種類の場合に対して計算を実施し、その他のパラメータは表 5.1 と同様のものを用いた。また、解析モデルは 3 自由度系であるため、近似安定判別法では  $s_{12(\pm)}, s_{23(\pm)}, s_{13(\pm)}$  の 6 つの特性根が求められるが、今回の計算パラメータにおいては、 $s_{12(\pm)}, s_{23(\pm)}$  の 2 つのみが不安定化する。

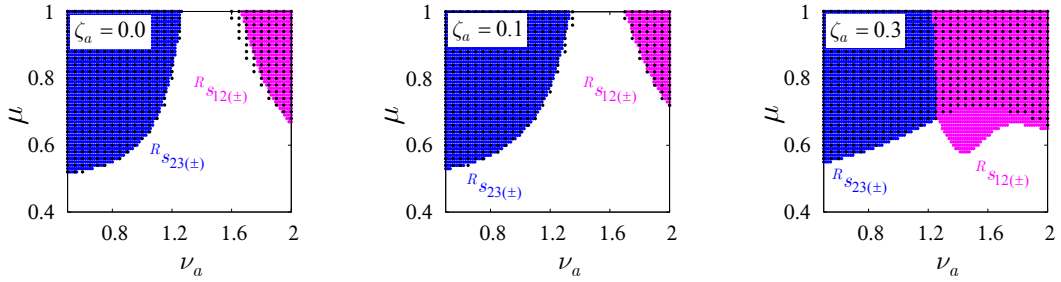


Fig. A3.1 The unstable region obtained by the numerical solutions (black dots) and the approximate solutions (purple and blue areas)

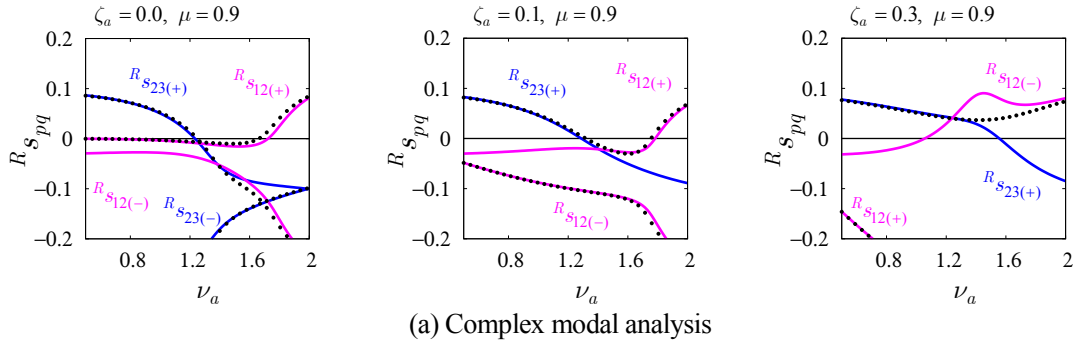


Fig. A3.2 The real parts of the characteristic roots obtained by the numerical solutions (black dots) and the approximate solutions (purple and blue lines).

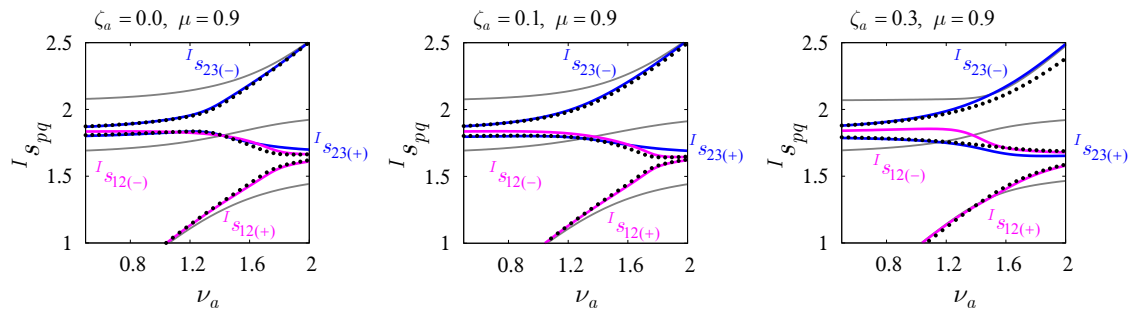


Fig. A3.3 The imaginary parts of the characteristic roots obtained by the numerical solutions (black dots) and the approximate solutions (purple and blue lines).

図 A3.1 は各手法で求められた不安定領域を示す。図の横軸および縦軸は動吸振器の振動数比  $\nu_a$  および摩擦係数  $\mu$  であり、黒色の点は数値的厳密解、紫色および青色の領域は近似特性根によって求められた不安定領域を表す。紫色は 1 次と 2 次モードの連成、青色は 2 次と 3 次モードの連成を仮定して求められた近似解である。  $\zeta_a = 0.0, 0.1$  の場合には、数値的厳密解の結果と近似安定判別法の結果が概ね一致し、近似特性根は高精度であることが確認できる。一方、  $\zeta_a = 0.3$  の場合には、  $\nu_a \approx 1.5$  近傍では数値的厳密解の結果よりも不安定領域が大きくなり、精度が低下する。

図 A3.2 および図 A3.3 は、  $\mu = 0.9$  における近似特性根の実部  $^R s_{pq(\pm)}$  および虚部  $^I s_{pq(\pm)}$  と動吸振器の振動数比  $\nu_a$  との関係を示したものである。黒色の点は数値的厳密解、実線は近似安定判別法によって求められた  $s_{12(\pm)}, s_{23(\pm)}$  の 4 つの近似特性根を表し、図 A3.3 中の灰色の実線は各手法で求められる固有角振動数を示す。図 A3.2 から、  $\zeta_a = 0.0, 0.1$  の場合には、不安定領域における近似安定判別法の結果と数値的厳密解の結果とが概ね一致しており、高精度であることが確認される。しかしながら、  $\zeta_a = 0.3$  の場合には、  $\nu_a \approx 1.5$  近傍で  $^R s_{12(\pm)}$  の値が数値的厳密解の特性根の実部よりも非常に大きな値となり、精度の低下がみられる。これは、摩擦に関する励振項  $\tilde{\Delta}_j$ ,  $j=1\sim 3$  の対角成分の値が大きくなり、摩擦力が安定系の固有角振動数に及ぼす影響を精度よく表せなくなることが原因と考えられる。その一方で、図 A3.3 に示す特性根の虚部の値については、いずれの減衰比においても近似安定判別法の結果が数値的厳密解の結果と概ね一致する。

以上より、摩擦力が作用しない安定系の固有モードに基づく近似安定判別法は、解析的な取扱いが煩雑になる上、動吸振器の減衰が大きい場合には精度の大幅な低下が確認される。

### A3.2 式 (5.20) の導出

5.6.2 項では、式 (5.20) の導出過程は煩雑であるため本編では省略した。そこで、本節ではその詳しい導出過程について述べる。

まず、式 (5.20) を仮定する際に用いた式 (5.7) から導出される複素固有モード  $[\Xi_p \ \Xi_q]^T = [1 \ -A_{pq} e^{i\psi_{pq}}]^T$  の  $-A_{pq} e^{i\psi_{pq}}$  は具体的に次のように表される。

$$-A_{pq} e^{i\psi_{pq}} = -\frac{s_{pq}^2 + 2\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p s_{pq} + \tilde{\omega}_p^2}{\tilde{\delta}_{3pq} s_{pq}^2 + \tilde{\delta}_{2pq} s_{pq} + \tilde{\delta}_{1pq}} = \frac{\tilde{\delta}_{3pq} s_{pq}^2 + \tilde{\delta}_{2pq} s_{pq} + \tilde{\delta}_{1pq}}{s_{pq}^2 + 2\tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q s_{pq} + \tilde{\omega}_q^2} \quad (\text{A3.5})$$

次に、式 (A3.5) に  $s_{pq} = {}^R s_{pq} + i {}^I s_{pq}$  を代入し、微小量の 1 次のオーダーで近似すると次式が導出される。ただし、具体的な数値計算結果から  $\tilde{\delta}_{2pq}, \tilde{\delta}_{3pq}$  は微小量であることを確認している。

$$-A_{pq} e^{i\psi_{pq}} \approx -\frac{\tilde{\omega}_p^2 - {}^I s_{pq}^2}{\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2} - i \left\{ \frac{2\tilde{\omega}_{P,pq} ({}^R s_{pq} + \tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p)}{\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2} - \frac{\tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq} (\tilde{\omega}_p^2 - {}^I s_{pq}^2)}{(\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2)^2} \right\} \quad (\text{A3.6})$$

$A_{pq}, \psi_{pq}$  は実数であるため、式 (A3.6) より次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} A_{pq} \cos \psi_{pq} &= \frac{\tilde{\omega}_p^2 - I s_{pq}^2}{\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2} \\ A_{pq} \sin \psi_{pq} &= \frac{2\tilde{\omega}_{P,pq} ({}^R s_{pq} + \tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p)}{\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2} - \frac{\tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq} (\tilde{\omega}_p^2 - I s_{pq}^2)}{(\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.7})$$

以上の関係式より,  $\xi_k = \Xi_k e^{s_{pq} t}$ ,  $k = p, q$ であることを考慮すると, 式 (5.6) の基本解のひとつとして式 (5.20) で表されるような調和振動解を仮定することができる.

$$\begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos I s_{pq} t \\ -A_{pq} \cos(I s_{pq} t + \psi_{pq}) \end{bmatrix} \quad (\text{5.20})$$

### A3.3 式 (5.24) の導出

5.6.2 項では, 動作原理の解明のため, 解析的に散逸エネルギーと励振エネルギーに関する関係式を導出したが, 式 (5.24) の導出過程は煩雑であるため本編では省略した. そこで, 本節ではその詳しい導出過程について述べる.

$A_{pq}^2$  について, 式 (5.9) の近似特性根を式 (A3.5) に代入し,  $\left| (-A_{pq} e^{i\psi_{pq}})^2 \right| = A_{pq}^2$  の関係を考慮すると, 微小量の 1 次のオーダーの近似は次のように表される.

$$\left. \begin{aligned} A_{pq}^2 &= \left| (-A_{pq} e^{i\psi_{pq}})^2 \right| \\ &= \left| \frac{s_{pq}^2 + 2\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p s_{pq} + \tilde{\omega}_p^2}{\tilde{\delta}_{3pq} s_{pq}^2 + \tilde{\delta}_{2pq} s_{pq} + \tilde{\delta}_{1pq}} \frac{\tilde{\delta}_{3pq} s_{pq}^2 + \tilde{\delta}_{2pq} s_{pq} + \tilde{\delta}_{1pq}}{s_{pq}^2 + 2\tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q s_{pq} + \tilde{\omega}_q^2} \right| \\ &= 1 - \frac{2}{\tilde{\omega}_{M,pq}^2} \text{Re} \left[ \sqrt{{}^C \tilde{D}_{pq}} \right] \\ {}^C \tilde{D}_{pq} &= \left\{ \tilde{\omega}_{M,pq}^2 - i\tilde{\omega}_{P,pq} (\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q) \right\}^2 - (\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2 + i\tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq})^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.8})$$

なお, 具体的な数値計算結果から  $\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p$ ,  $\tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q$ ,  $\tilde{\delta}_{2pq}$ ,  $\tilde{\delta}_{3pq}$  は微小量, 安定不安定境界近傍では  $\tilde{\omega}_{M,pq}^2 - \tilde{\delta}_{1pq}^2$  も微小量であることが確認されているため,  $\text{Re}[\sqrt{{}^C \tilde{D}_{pq}}]$  を微小量と見なすことができる.

また, 系全体の散逸エネルギー  $-(W_{D,p} + W_{D,q})$  については, 式 (5.21) と式 (5.23) で表される散逸エネルギーに式 (A3.6) を代入して微小量の 1 次のオーダーで近似すると次のように導出できる.

$$-(W_{D,p} + W_{D,q}) = \frac{1}{1 + A_{pq}^2} (\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p + A_{pq}^2 \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q) \approx \frac{1}{2} (\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p + \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q) \quad (\text{A3.9})$$

### A3.4 式 (5.27) の導出

5.6.2 項で導出した  $\sin \psi_{pq}$  について、その導出過程は煩雑であるため本編では省略したが、本節ではその詳しい導出過程について述べる。

まず、 $\sin \psi_{pq}$  に関して式 (A3.5) を考慮すると次の 2 つの関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} \left[ A_{pq} e^{i\psi_{pq}} \right] &= A_{pq} \sin \psi_{pq} = \frac{2\tilde{\omega}_{P,pq} ({}^R s_{pq} + \tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p)}{\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2} - \frac{\tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq} (\tilde{\omega}_p^2 - I s_{pq}^2)}{(\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2)^2} \\ \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{-A_{pq} e^{i\psi_{pq}}} \right] &= \frac{1}{A_{pq}} \sin \psi_{pq} = \frac{2\tilde{\omega}_{P,pq} ({}^R s_{pq} + \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q)}{\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2} - \frac{\tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq} (\tilde{\omega}_q^2 - I s_{pq}^2)}{(\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.10})$$

次に、式 (A3.10) の上段と下段の式の和は  $A_{pq} \sin \psi_{pq} + (\sin \psi_{pq}) / A_{pq} = \{(1 + A_{pq}^2) / A_{pq}\} \cdot \sin \psi_{pq}$  となり、式 (5.9) の近似特性根を用いて、微小量の 1 次のオーダーで近似すると次のように表される。

$$\frac{1 + A_{pq}^2}{A_{pq}} \sin \psi_{pq} = \frac{2\tilde{\omega}_{P,pq} (2{}^R s_{pq} + \tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p + \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q)}{\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2} = \frac{2}{\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{{}^C \tilde{D}_{pq}} \right] \quad (\text{A3.11})$$

ここで、 $(1 + A_{pq}^2) / A_{pq}$  については、式 (A3.8) より  $\operatorname{Re}[\sqrt{{}^C \tilde{D}_{pq}}]$  を微小量と見なし、微小量の 1 次のオーダーで近似すると、 $(1 + A_{pq}^2) / A_{pq} = 2$  が導出される。これを式 (A3.11) に代入し整理すると、式 (5.27) が次のように導出できる。

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi_{pq} &= \frac{1}{\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2} \operatorname{Im} \left[ \sqrt{{}^C \tilde{D}_{pq}} \right] \\ {}^C \tilde{D}_{pq} &= \left\{ \tilde{\omega}_{M,pq}^2 - i\tilde{\omega}_{P,pq} (\tilde{\zeta}_p \tilde{\omega}_p - \tilde{\zeta}_q \tilde{\omega}_q) \right\}^2 - (\tilde{\delta}_{1pq} - \tilde{\delta}_{3pq} \tilde{\omega}_{P,pq}^2 + i\tilde{\delta}_{2pq} \tilde{\omega}_{P,pq})^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{5.27})$$

## 参考文献

- (1) 末岡淳男, 金光陽一, 近藤孝広, 基礎工学シリーズ6 機械振動学, 2000, p.82 & pp.173-174 & p. 183, 朝倉書店.
- (2) 川田忠樹, だれがタコマを墜としたか, 1975, 建設図書.
- (3) M. L. Cartwright, Balhazar van der pol, Journal of the London Mathematical Society, Vol.35 (1960), pp.367-376.
- (4) J. M. S. Rayleigh, The theory of sound, 1877, Macmillan.
- (5) 日本機械学会編, 機械工学便覧 基礎編 α2 機械力学, 2004, p.70 & p.74. & p.76
- (6) J. P., Den Hartog, Mechanical Vibrations, 1956, p.299, New York: McGraw-Hill.
- (7) Blevins, Robert D., Flow-induced vibration second edition, 1990, pp.105-110 & pp. 130-138, Van Nostrand Reinhold.
- (8) 藤井澄二, 遠心式ポンプの安定性およびサージングについて (第1報), 日本機械学会論文集, Vol. 13, No. 44, 1947, pp.184-191.
- (9) 草間秀俊, うず巻ポンプのサージングの研究 (第1, 2報) (ポンプ系の安定性について), 日本機械学会論文集, Vol. 19, No. 85, 1953, pp.43-49.
- (10) 竹矢一雄, 多段軸流圧縮機のサージング限界について (第1報, サージング点の計算法), 日本機械学会論文集, Vol. 27, No. 183, 1961, pp.1801-1808.
- (11) 高野英資, 摩擦振動について (第1報, 粘性抵抗のない場合), 日本機械学会論文集, Vol. 33, No. 253, 1967, pp.1352-1362.
- (12) 岡村健二郎, 松原十三生, 野呂周平, 山根崇宏, 摩擦振動の理論的解析, 精密機械, Vol. 34, 1968, No. 406, pp.731-736.
- (13) 末岡淳男, 劉孝宏, 白水健次, 江村篤裕, 中野寛, 自転車用ディスクブレーキの鳴き・ビビリ現象に関する実験的研究, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 70, No. 689, 2004, pp.38-45.
- (14) N. W., McLachlan, Theory and application of Mathieu functions, 1947, Dover publications, inc.
- (15) 遠藤巖, 船用ディーゼルとの出逢い, 日本船用機関学会誌, Vol. 29, No. 8, 1994, pp.549-787.
- (16) 末岡淳男, 田村英之, 近藤孝広, 藤本俊郎, 大崎栄喜, ローラチェーンの非線形強制パラメトリック共振, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 51, No. 465, 1985, pp.912-919.
- (17) 柴田碧, 鉄道車両における高速集電について, 日本機械学会論文集, Vol. 63, No. 499, 1960, pp.1118-1128.
- (18) 柴田碧, パンタグラフの力学, 生産研究, Vol. 10, No. 11, 1958, pp.367-372.
- (19) 江原信郎, 高速集電の動力学的研究 (第1報, 高速集電系のモデルとその検討), 日本機械学会論文集, Vol. 36, No. 287, 1970, pp.1067-1074.
- (20) 藤岡健彦, 西小野俊則, 井口雅一, パンタグラフ-架線系の定常振動 (ハンガ間隔, パンタグラフ間隔の集電性能への影響), 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 51, No. 470, 1985, pp.2663-2667.
- (21) S. S. Ghosh and G. Chakraborty, Parametric instability of a multi-degree-of-freedom spur gear system with friction, Journal of Sound and Vibration, Vol. 354, 2015, pp.236-253.
- (22) A. H. Nayfeh and L. D. Zavodney, The response of two-degree-of-freedom systems with quadratic

- non-linearities to a combination parametric resonance, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 107, 1986, pp.329-350.
- (23) S. A. Tobias, Machine tool vibration research, *International Journal of Machine Tool Design and Research*, Vol. 1, 1961, pp.1-14.
- (24) 末岡淳男, 劉孝宏, 近藤孝広, 富樫実, 藤本俊郎, 自動車タイヤの多角形摩耗現象, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 62, No. 600, 1996, pp.3145-3152.
- (25) 末岡淳男, 劉孝宏, 安田昭博, 近藤孝広, 片山圭一, 抄紙機ゴム巻きロールのパターン形成現象とその防止対策の検討, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 61, No. 591, 1995, pp.4160-4167.
- (26) 末岡淳男, 松崎健一郎, 劉孝宏, 製鉄機械ホットレベラのワークロールに発生する多角形摩耗, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 66, No. 651, 2000, pp.3583-3590.
- (27) 大野進一, 円筒研削における自励振動の研究 (第 2 報, 理論的研究), *日本機械学会論文集*, Vol. 35, No. 276, 1969, pp.1806-1814.
- (28) 太田和秀, 香川洸二, 江藤俊夫, 西川進, ディスクブレーキ鳴きに関する研究 (モード修正法によるシミュレーション計算および実験), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 50, No. 457, 1984, pp.1585-1592.
- (29) 末岡淳男, 劉孝宏, 白水健次, 自動車用フローティング型ディスクブレーキの鳴き (第 2 報, 解析結果), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 67, No. 658, 2001, pp.1727-1734.
- (30) Ales Tondl, Some problems of rotor dynamics (回転軸の力学, 前澤成一郎訳), 1967, コロナ社, pp.106-109
- (31) 堀幸夫, オイルウィップ, *日本機械学会論文集*, Vol. 61, No. 478, 1958, pp.1348-1356.
- (32) A. Muszynska, Whirl and whip-rotor/bearing stability problems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 110, 1986, pp.443-462.
- (33) Alexei A. Mailybaev and Alexander P. Seyranian, Instability of a general rotating system with small axial asymmetry and damping, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, 2013, pp.346-360.
- (34) 野波健蔵, 宮下政和, ジャイロ効果を考慮した回転体の危険速度通過問題 (第 2 報, 内部減衰に起因する自励振動の発生), *日本機械学会論文集*, Vol. 44, No. 387, 1978, pp.3726-3737.
- (35) 横瀬景司, 金鼎昌, 笠木誠司, 円弧踏面形状車輪をもつ高速台車の蛇行動解析, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 55, No. 516, 1989, pp.1983-1991.
- (36) 佐藤勇一, 振動の捉え方, 2010, オーム社, pp.80-83.
- (37) A. Tondl, M. Ruijgrok, F. Verhulst and R. Nabergoj, *Autoparametric resonance in mechanical systems*, 2000, Cambridge university press.
- (38) H. Frahm, Device for damping vibrations of bodies, 1909, U. S. Patent No. 989958A.
- (39) J.B. Hunt and J. C. Nissen, The broadband dynamic vibration absorber, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 83, 1982, pp.573-578.
- (40) J. Ormondroyd and J. P. Den hartog, The theory of the dynamic vibration absorber, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, Vol. 50, 1928, pp.9-22.
- (41) S. E. Randall, D. M. Halsted and D. L. Taylor, Optimal vibration absorbers for linear damped system, *Transaction of the ASME*, Vol. 103, 1981, pp.757-765.
- (42) E. Pennestri, An application of chebyshev's min-max criterion to the optimal design of a damped dynamic vibration absorber, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 217, 1998, pp.757-765.

- (43) W. M. Mansour, Quenching of limit cycles of a van der pol oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 25, 1972, pp.395-405.
- (44) A. Tondl, Quenching of self-excited vibrations: equilibrium aspects, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 42, 1975, pp.251-260.
- (45) D. A. D. Cooke and M. D. Rowbottom., Effects of mechanical and aerodynamic damping on the galloping of overhead lines, *Proceedings of the institution of electrical engineers*, Vol.121, 1994, No.8, pp.845–848.
- (46) M. D. Rowbottom, The optimization of mechanical dampers to control self-excited galloping oscillations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 75, 1981, pp.559-579.
- (47) M. Abdel-rohman, Design of tuned mass dampers for suppression of galloping in tall prismatic structures , *Journal of Sound and Vibration*, Vol.171, 1994, pp.289–299
- (48) V.J. Modi and M. L. Seto, Suppression of flow-induced oscillations using sloshing liquid dampers: analysis and experiments, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.67-68, 1997, pp.611–625
- (49) 中江貴志, 末岡淳男, 劉孝宏, 日野良章, 動吸振器を用いたギャロッピング現象の抑制対策, *Dynamics & Design Conference2010 CD-ROM 講演論文集*, 2010, 209.
- (50) 五藤員雄, 小池東一郎, 架空送電線のギャロッピング振動の数値計算法と一防止方法, *電気学会論文誌*, Vol 97, 1977, pp. 405-412.
- (51) Yabuno, H., Murakami, T., Kawazoe, J. and Aoshima, N., Suppression of parametric resonance in cantilever beam with a pendulum (Effect of static friction at the supporting point of the pendulum), *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.126, 2004, pp.149–162..
- (52) 三船博史, 架線パンタグラフ系におけるダイナミックダンパの効果, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 55, No. 516, 1989, pp.2001-2006.
- (53) 古厩和寿, 山本浩, 藤貴洋, 田子洋輔, 係数励振系の動吸振器による制振, *Dynamics & Design Conference2012 USB 論文集*, 2012, 206.
- (54) 高櫻豊樹, 坂口龍之介, 杉浦壽彦, 高温超電導磁気浮上系における係数励振的振動の線形動吸振器による低減, *Dynamics & Design Conference2012 USB 論文集*, 2012, 208.
- (55) 宗義林, 佐藤秀紀, 岩田佳雄, 小松崎俊彦, 振り子のパラメトリック励振を利用した動吸振器系の応答, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 67, No. 661, 2001, pp. 2763-2769.
- (56) 岩田佳雄, 小松崎俊彦, 箱田有司, パラメトリック励振型動吸振器による多自由度系の制振, *Dynamics & Design Conference2007 CD-ROM 論文集*, 2007, 533.
- (57) 趙訓熙, 藪野浩司, 吸振器との非線形連成効果を利用した線形共振振幅の低減化, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 73, No. 728, 2007, pp. 1005-1011.
- (58) Jerzy Warminski, Krzysztof Kecik., Instabilities in the main parametric resonance area of a mechanical system with a pendulum, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.332, 2009, pp.612–628.
- (59) 近藤孝広, 宗和伸行, 森博輝, 崔銘秀, 接触回転系におけるパターン形成現象に対する動吸振器の最適設計 (第 1 報, 1 自由度系の場合), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 71, No. 704, 2005, pp.1131-1138.
- (60) 宗和伸行, 近藤孝広, 橋田友祐, 動吸振器を用いた時間遅れ系における不安定振動の防止対策, *Dynamics & Design Conference2003 CD-ROM 論文集*, 2003, 642.



- (61) 宗和伸行, 近藤孝広, 古賀みず江, 北村幸嗣, 接触回転系におけるパターン形成現象(粘弾性モデルに対する防止対策の実験的検証), Dynamics & Design Conference2007 CD-ROM 論文集, 2007, 721.
- (62) 宗和伸行, 近藤孝広, 接触回転系におけるパターン形成現象に対する動吸振器の最適設計(第3報, 多自由度系の場合), 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 77, No. 782, 2011, pp.3608-3620.
- (63) 松崎健一郎, 末岡淳男, 劉孝宏, 森田英俊, 製鉄機械ホットレベラのワークロールに発生する多角形摩耗(第3報, 動吸振器を用いた多角形摩耗の防止・遅延対策), 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 71, No. 704, 2005, pp.1123-1130.
- (64) 松崎健一郎, 末岡淳男, 劉孝宏, 森田英俊, 日高孝平, 野口聡司, 製鉄機械ホットレベラのワークロールに発生する多角形摩耗(第4報, 動吸振器を用いた遅延対策の実験的検証), 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 72, No. 724, 2006, pp.3703-3710.
- (65) 中野寛, 近藤英二, 高原弘樹, 動吸振器を用いたエンドミル加工時に発生する再生びびり振動の抑制対策, Dynamics & Design Conference2009 CD-ROM 論文集, 2009, 328.
- (66) 中野寛, 高原弘樹, 園部拓郎, 畑尾友紀, 回転工具に取付けた動吸振器によるエンドミル加工時再生びびり振動抑制対策, Dynamics & Design Conference2010 CD-ROM 論文集, 2010, 353.
- (67) 中野寛, 高原弘樹, 河合謙吾, 多重動吸振器を用いたエンドミル加工時の強制びびりおよび再生びびり振動の抑制対策, 日本機械学会論文集, Vol. 80, No. 812, 2014, DOI: 10.1299/transjsme.2014dr0098.
- (68) 中野嘉邦, 加藤秀雄, 飛田敏光, 上竹昭浩, 宇野麦二郎, 動吸振器による平面研削のびびりマークの抑制, 精密工学会誌, Vol. 53, No. 5, 1987, pp.795-800.
- (69) 末岡淳男, 劉孝宏, 中野寛, 山崎俊広, 中江貴志, 川原大輔, 動吸振器を用いた自動車用ディスクブレーキの鳴き抑制対策, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 73, No. 734, 2007, pp.2653-2661.
- (70) 川島孝幸, 池田健, 動吸振器によるフラッタ防止の効果について, 日本航空宇宙学会誌, Vol. 30, No. 339, 1982, pp.40-46.
- (71) 岡田徹, 本家浩一, 杉井謙一, 島田諭, 松久寛, 振り子型動吸振器による吊り橋の連成フラッタの制御(第1報, 橋桁断面モデルによる効果の検証), 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 66, No. 644, 2000, pp.1165-1172.
- (72) 岡田徹, 本家浩一, 杉井謙一, 島田諭, 松久寛, 振り子型動吸振器による吊り橋の連成フラッタの制御(第2報, 最適設計方法とロバスト性に関する考察), 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 66, No. 649, 2000, pp.3002-3010.
- (73) Saeid Pourzeynali and T. K. Datta., Control of flutter of suspension bridge deck using TMD, Wind and Structures, Vol.5, No. 5, 2002, pp.407-422.
- (74) 林世彬, 富松大峰, 西村健太郎, 藪野浩司, 須田義大, 復元機構を有するジャイロダンパによる一軸台車車両の蛇行動安定化, 日本機械学会第12回「運動と振動の制御」シンポジウム講演論文集, 2011, C108.
- (75) 長松昭男, モード解析, 1985, 培風館.
- (76) 松宮央登, 坂口剛, 西原崇, 雪野照寛, モード重ね合わせ法を用いた送電線のギャロッピングの時刻歴応答解析, 構造工学論文集, Vol.59A, 2013, pp.574-584.
- (77) Fadi Dohnal, Suppressing self-excited vibrations by synchronous and time-periodic stiffness and

- damping variation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.306, 2007, pp.136-152.
- (78) Alexei A. Mailybaev, Alexander P. Seyranian, Stabilization of statically unstable systems by parametric excitation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.323, 2009, pp.1016-1031.
- (79) J. Lin, R. G. Parker, Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.249, 2002, pp.129-145.
- (80) 吉武裕, 原田晃, 濱野崇, 塘健志, 佐藤慶太, 小林敦, 多段歯車系の係数励振, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 73, No. 728, 2007, pp.997-1004.
- (81) 松崎健一郎, 末岡淳男, 劉孝宏, 森田英俊, ホットレベラにおけるパターン形成現象のモード解析, *Dynamics & Design Conference2002 講演論文集*, 2002, 809.
- (82) 近藤孝広, 宗和伸行, 接触回転系におけるパターン形成現象 (第 2 報, 簡易安定判別法による多自由度ロール系の安定化法), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 67, No. 659, 2001, pp. 2129-2135.
- (83) 藤川猛, 井上善雄, 阿部亨, 田中俊光, 振動問題に対する複素モーダル解析の適用法 (モーダル方程式の二階微分形表現による方法), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 49, No. 437, 1983, pp. 12-21.