Time periodic problem for equations for the compressible fluids

津田, 和幸

https://doi.org/10.15017/1654671

出版情報：九州大学, 2015, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式６－２）

氏　　名	津田 和幸
論 文 名	Time periodic problem for equations for the compressible fluids (圧縮性流体方程式の時間周期問題)
論文調査委員	主　査　　九州大学　教授　　隠居 良行 副　査　　九州大学　教授　　川島 秀一 副　査　　大阪大学　教授　　小林 孝行

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は全空間上の圧縮性流体方程式の時間周期問題を考察したものである。流体力学の基礎方程式である圧縮性 Navier-Stokes 方程式に加えて，相転移を伴う二相流体の運動を記述する圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式も考察の対象としている.

時間周期問題は偏微分方程式論における基本的な問題であり，流体現象を記述する方程式系についても時間周期解の存在とその安定性に関して多くの研究が行われてきた. 有界領域上の圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する時間周期問題は，線形化問題の解が時間指数的に減衰することから比較的容易に解析することが可能であり，1980 年台に時間周期解の存在，安定性に関する結果が得られていた. 非有界領域上の問題については，線形化問題の解の減衰が遅いため時間周期解の存在および安定性に関する結果が得られたのは比較的最近のことである. 2010 年に Ma-Ukai-Yang により，空間次元が 5 以上の場合に，十分小さい時間周期外力に対する全空間上の時間周期解の存在およびその安定性が示されたのが最初の結果である. しかしながら，この結果は空間次元が 5 以上という制限が付いており，物理的に意味のある 2 次元問題および 3 次元問題の解析が望まれていた.

本論文において津田和幸氏は，空間次元が 3 以上の場合に，十分小さい時間周期外力に対する時間周期解の存在およびその安定性を示し，未解決であった 3 次元時間周期問題を解決している. さらに空間 2 次元問題に対して，周期外力がある種の空間反対称性をもち十分小さければ時間周期解が存在することを示している. また圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する解析手法を応用して，空間次元が 3 以上の場合に圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の時間周期解の存在と安定性を証明している.

論文の第 1 部および第 2 部は，3 次元全空間上の圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する時間周期問題の解析に充てられている. 第 1 部では奇関数的対称性をもつ十分小さな外力に対して，重み付き Sobolev 空間を導入することにより，時間周期解の存在と漸近安定性を示している. 問題を低周波部分と高周波部分に分解し，それぞれの部分に対して必要な評価を導出することによって時間周期解の存在証明を行っている. 低周波部分は Fourier 変換を通じた線形化半群の表現式を使って周期写像のスペクトルを調べて必要な評価を導出し，高周波部分は重み付きエネルギー法により周期写像のスペクトル半径の評価を行って必要な評価を導出している. 安定性解析においては，得られた時間周期解の空間無限遠方での減衰評価を利用して線形化方程式の摂動解析を行い，攪乱の L^2 ノルムの最適な時間減衰評価を得ている. 論文の第 2 部においては，時間周期外力に対する対称性の条件を取り除いて，時間周期解の存在を証明し，未解決であった 3 次元時間周期問題を解決している. Ma-Ukai-Yang が線形化半群の時間減衰評価を利用して時間周期問題の解析を行ったのに対し，津田氏は時間周期問題と定常問題との間に類似性があることを見出し，解の空間無限遠方での減衰度に着目して新たにポテン

シャル論的アプローチを取り入れた解析を行っている．定常問題の場合とは異なり，ポテンシャル論的アプローチを用いると，時間周期問題の場合は非線形項評価に困難な点が新たに現れるが，その困難を津田氏は運動量保存則などを用いて克服するなど独自の着想で証明を完結させている．論文の第 3 部においては，第 2 部で用いた手法を用いて空間次元が 3 以上の場合に圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の時間周期解の存在と安定性を証明している．

論文の第 4 部では 2 次元全空間上の圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する時間周期問題を考察している．周期外力がある種の空間反対称性をもち十分小さい場合に，時間周期解の存在が示されている．第 2 部と同様に周期写像を用いた定式化により解析がなされている．証明においては，空間反対称性をもつ関数空間における合成積の重み付き評価が新たに導出されている．低周波部分に対し，運動量保存則の形の方程式への書き換えに加えて，空間反対称性の条件が上手く働く形への式変形を導入して重み付き評価を適用し，時間周期解の存在を証明している．なお，この結果は時間周期問題の特別な場合である定常問題に対しても成立するものであり，定常解の存在定理としても新しい結果となっている．

これらの結果はすでに知られている全空間上の圧縮性粘性流体方程式に対する時間周期問題に関する結果を本質的に改良したのみならず，本論文において津田氏が展開した解析手法は，非有界領域における非線形偏微分方程式に対する時間周期問題の解析の進展に寄与する重要なものである．

以上のように津田氏は圧縮性粘性流体方程式に対する時間周期問題の解析において顕著な研究成果を挙げ，それらは流体方程式の数学解析において価値ある業績であると認められる．よって，本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める．