Time periodic problem for equations for the compressible fluids

津田, 和幸

https://doi.org/10.15017/1654671

出版情報：九州大学, 2015, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式３）

氏　　名　：津田　和幸

論 文 名　：Time periodic problem for equations for the compressible fluids
（圧縮性流体方程式の時間周期問題）

区　　分　：　甲

論　文　内　容　の　要　旨

本論文は全空間上の圧縮性流体方程式の時間周期問題を考察したものである。ここでは圧縮性流体方程式として圧縮性 Navier-Stokes 方程式、圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式を扱う。圧縮性 Navier-Stokes 方程式は圧縮性流体の運動を記述する流体の基礎方程式であり、圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式は圧縮性 Navier-Stokes 方程式を発展させた方程式で、水と水蒸気のような液体と気体の相転移を伴う二相流体の運動を拡散界面モデルとして記述する流体方程式である。時間周期問題は偏微分方程式論における基本的な問題である。流体現象を記述する方程式系についても、時間周期外力を与えたときの時間周期解の存在とその安定性に関して多くの研究が行われてきた。放物型方程式系である非圧縮性 Navier-Stokes 方程式については、[2,3,6,7]によって非有界領域上の時間周期問題が研究されている。空間次元 3 次元の全空間上・半空間上([3,6])、及び外部領域上([7])で時間周期解の存在と安定性が示された。[2]では 2 次元の全空間上で時間周期解の存在が示された。一方、圧縮性 Navier-Stokes 方程式および圧縮性 Navier-Stokes-Kortweg 方程式は準線形の双曲・放物型連立系のため非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の場合よりも解析が難しくなる。非有界領域における時間周期問題についての先行研究としては、全空間上において

・圧縮性 Navier-Stokes 方程式の時間周期問題・・・Ma-Ukai-Yang([4])(2010)

・圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の時間周期問題・・・Cai-Tan-Xu([1])(2015)

による研究が知られている。[1]、[4]では空間次元 n が n≧5 の場合に，十分小さな周期外力に対して時間周期解の存在が示され、また、その時間周期解は十分小さな攪乱に対して安定であることが示されている。さらに[4]では攪乱の L^2 ノルムの時間減衰評価も得られている。 しかしながら、[1]、[4]ともに空間次元が 5 以上の場合の結果しか得られておらず、とくに物理的な意味を持つ 2 次元および 3 次元の場合の時間周期解の存在と安定性については知られていなかった。本論文では全空間上の時間周期問題について以下のような考察を行い、次元を下げて空間次元 n が n=3 の場合を含むときに時間周期解の存在と安定性、また 2 次元において時間周期解の存在を示した。

論文の第一部においては圧縮性 Navier-Stokes 方程式を扱い、周期外力がある種の空間対称性をもつ場合に、新たに重み付き関数空間を導入することによって、外力が十分小さければ、空間次元 n が n≧3 のとき時間周期解が存在することを示した。さらに得られた時間周期解は十分小さな攪乱に対して安定であり、攪乱の L^2 ノルムは時刻が無限大にいくとき t の－n/4 乗のオーダーで減衰することを示した。時間周期解の存在証明においては、方程式を低周波部分と高周波部分に分解して、それらを線形化発展作用素に対する周期写像を用いて積分方程式系に変換し、新たに重み付き Sobolev 空間を導入することによって時間周期解を得た。低周波部分は Fourier 変換を通じた線形化半群の表現式を使って周期写像のスペクトルを調べて必要な評価を導出し、高周波部分は重み付

きエネルギー法により、周期写像のスペクトル半径の評価を行って必要な評価を導出した。安定性解析においては、得られた時間周期解の空間無限遠方での減衰評価を利用して線形化方程式の摂動解析を行い、攪乱の L^2 ノルムの最適な時間減衰評価を得た。

論文の第二部においては周期外力に空間対称性を課さない場合を考察し、空間次元 $n \geqq 3$ において小さい外力に対して時間周期解が存在することを示した。さらに得られた時間周期解の十分小さな攪乱に対する漸近安定性を得た。時間周期解の存在を示すために、低周波部分において新たに重み付き L^∞空間を導入して解析した。第一部における証明で考察した周期写像の空間無限遠での漸近展開の主要部が線形化定常問題の基本解と同じ性質をもつことを示し、第一部において確立した重み付きエネルギー法と定常問題に対するポテンシャル論的アプローチ（[5]）とを組み合わせることによって時間周期解の存在証明を与えた。証明においては、低周波部分に対しては運動量保存則の形の方程式を用い、高周波部分に対しては運動方程式の形の方程式を用いて derivative loss を回避し、非線形項評価において、高周波部分に対して成立する Poincare タイプの不等式を巧妙に用いて必要な評価を導出するなど、更なる工夫を凝らして時間周期解の存在証明に必要な評価を導出した。得られた時間周期解の安定性については、エネルギー法と Hardy の不等式を用いた摂動解析を用いて十分小さな攪乱に対する漸近安定性を示した。

論文の第三部においては圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式を扱い、空間次元 $n \geqq 3$ において小さい外力に対して時間周期解が存在することを示した。さらに得られた時間周期解の十分小さな攪乱に対する漸近安定性を得た。時間周期解の存在を示すために、第二部と同様に、まず方程式系を周期写像を用いて積分方程式系に変換した。その際低周波部分と高周波部分で異なる可積分性を持つ関数空間を導入した。詳細な解析が要る周期写像の低周波部分では、空間無限遠での挙動を調べ、ポテンシャル論的アプローチを用いて、さらに非線形項は方程式を保存則系で扱うことで必要な評価を導出した。

論文の第四部では 2 次元全空間上の圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する時間周期問題を考察した。周期外力がある種の空間反対称性をもち、十分小さければ、時間周期解が存在することを示した。時間周期解の存在を示すために第二部と同様に周期写像を用いた定式化を行った。詳細な解析が要る周期写像の低周波部分では、全空間 2 次元での非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の定常問題([8])で使われた、外力についてのある種の空間反対称性を課して解析し、空間反対称性の条件下での畳み込みの重み付き評価を新たに導出した。さらに運動量保存則の形の方程式への書き換えに加えて、空間反対称性の条件が上手く働く形へ式変形するなどの工夫をし、重み付き評価と組み合わせることで時間周期解の存在を証明した。

[1] H. Cai, Z.Tan and Q. Xu, Time periodic solutions of the non-isentropic compressible fluid models of Korteweg type, Kinet. Relat. Models., **8** (2015), pp. 29--51.

[2] P. Galdi, Existence and uniqueness of time-periodic solutions to the Navier-Stokes equations in the whole plane, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **6** (2013), pp. 1237–1257

[3] H. Kozono and M. Nakao, Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains, Tôhoku math. J., **40** (1996), pp. 33–50.

[4] H. Ma, S. Ukai, and T. Yang, Time periodic solutions of compressible Navier-Stokes equations, J. Differential Equations, **248** (2010), pp. 2275--2293.

[5] Y. Shibata and K. Tanaka, On the steady flow of compressible viscous fluid and its stability with respect to initial disturbance, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), pp.797--826.

[6] Y. Taniuchi, On stability of periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded

Domains, Hokkaido Math. J., **28** (1999), pp. 147–173.
[7] M. Yamazaki, The Navier-Stokes equations in the weak-L^n space with time dependent external force, Math. Ann., **317** (2000), pp. 635--675.
[8] M. Yamazaki, The stationary Navier-Stokes equation on the whole plane with external force with antisymmetry, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. **55** (2009), pp. 407--423.