Holomorphic maps into the complex Grassmannian manifold induced by orthogonal product of a holomorphic line bundle

古賀, 勇

https://doi.org/10.15017/1654670

出版情報：九州大学, 2015, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式３）

氏　　名　：古賀　勇

論 文 名　：Holomorphic maps into the complex Grassmannian manifold induced by orthogonal product of a holomorphic line bundle
（正則直線束の直和により誘導される複素グラスマン多様体への正則写像について）

区　　分　：甲

論 文 内 容 の 要 旨

本論文では，コンパクト複素多様体から複素射影空間への正則写像に関する種々の結果を複素グラスマン多様体への正則写像に拡張することを主目的として研究した．その中で特に，射影平坦写像，強射影平坦写像という複素グラスマン多様体への正則写像のうち，複素射影空間への正則写像のある種の一般化とみなせるクラスを定義し，それらに対して複素射影空間への正則写像の結果の一般化が確かに成り立つことを確認した．

一般に複素多様体M上の正則ベクトル束$V \to M$に対して大域正則切断のなす線形空間Wで正則ベクトル束を大域的に生成するものが与えられたとき，それらから正則写像$f: M \to Gr(W)$が得られる．これを誘導写像という．逆に正則写像$f: M \to Gr(W)$が先に与えられたとき，複素グラスマン多様体上の普遍商束$Q \to Gr(W)$のfによる引き戻しにより，M上の正則ベクトル束$f^*Q \to M$およびその大域切断のなすベクトル空間Wが得られる．これらによる誘導写像は初めの正則写像fと一致する．

以上より，複素グラスマン多様体への正則写像の性質と複素多様体上の正則ベクトル束と大域正則切断のなす線形空間の性質が結びつく．したがって正則写像の性質を考察するために正則ベクトル束の性質を考察することは意味がある．

特に複素射影空間は階数１の複素グラスマン多様体であるが，正則写像に対応する正則ベクトル束は階数１である．正則直線束の構造については数学の各分野においてよく考察されており，その結果として対応する正則写像の構造もよくわかっている．本論文では，この写像の持つ性質を一般化して，次のような複素グラスマン多様体への正則写像を定義した．

1. 射影的平坦写像：対応する正則ベクトル束が射影的平坦．
2. 強射影的平坦写像：対応する正則ベクトル束が正則直線束の直交直和

特に複素射影空間への正則写像は射影平坦写像でも強射影平坦写像でもある．一般には強射影平坦写像は射影平坦であるが，逆は成り立たない．しかしその正則写像が等長はめ込みであるときは，両者は一致する．

本論文の構成は，１章で論文全体の概要などに付いて述べ，２章で複素グラスマン多様体の幾何学についてと正則写像と正則ベクトル束の対応についての一般論を準備した．そして，３章でコンパクト型エルミート対称空間からの等長射影的平坦はめ込み，４章でコンパクト単連結等質ケーラー多様体からの強射影的平坦写像について考察した．これらのとき写像に対応する定義域上の正則ベクトル束は等質ベクトル束であり，大域正則切断の空間にも Lie 群の作用がある．等質な正則ベクトル束による誘導写像を考察する場合，正則ベクトル束の群構造が写像にどのような影響を及ぼ

すか考えるのは自然なものと思われる．

3 章では，コンパクト型エルミート対称空間からの正則等長射影的平坦はめ込みの剛性を証明した．私の結果は，明治大学の長友康行氏が既約なコンパクト型エルミート対称空間の場合に得ていた結果を可約な場合に拡張したものである．また，E. Calabi によって証明されたケーラー多様体から複素射影空間への正則等長はめ込みの剛性についての結果の，定義域をコンパクト型エルミート対称空間に限定した場合での一般化になっている．更に応用として，コンパクトケーラー多様体からの正則等長射影的平坦はめ込みのうち，平行な第 2 基本形式を持つものの分類を行った．方法は，まず A. Ros による複素射影空間の複素部分多様体で平行な第 2 基本形式を持つものの正則断面曲率による pinching 定理を射影的平坦写像の場合に拡張し（長友氏との共同研究の結果），先に得ていた剛性定理を用いて分類したというものである．それによってこれらの写像は，H. Nakagawa-R. Takagi によって分類されていた複素射影空間内の平行な第 2 基本形式を持つ複素部分多様体により決定されることが分かった．

4 章では，コンパクト単連結等質ケーラー多様体からの強射影平坦写像$f: M \to Gr(W)$は同変ならば剛性を持つことを証明した．M. Takeuchi により，Calabi によって示された剛性をもつケーラー多様体から複素射影空間への正則等長はめ込みは，同変であることが知られている．本論文の結果は，複素射影空間の場合においても，沈めこみのような必ずしも等長はめ込みでなくても同変写像であることが剛性を持つための必要十分条件であることを示している．このような場合に限っても，本論文のような方法で考察したものはないと思われる．